国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系·前沿系列

近代电磁理论

(第二版)

龚中麟 编著



中外物理学精品书系·前沿系列

近代电磁理论（第二版）

龚中麟 1940年生于重庆，原籍湖北蕲春。1963年毕业于北京大学无线电电子学系（现称电子学系），现为北京大学信息科学技术学院教授。长期讲授电磁学核心课程：电动力学，近代电磁理论等。研究领域包括：微波电子学，天线与电波传播，微波技术等。有两项天线发明获中国专利。中国电子学会会士，美国电气与电子工程师学会（IEEE）高级会员，曾任IEEE天线与传播学会北京Chapter主席（1998～2004）。现为《中国高新技术企业》期刊社学术顾问。著有《近代电磁理论》、《电磁理论研究导引》（均为第一作者），该二书的繁体字版本已在台湾印行。


ISBN 978-7-301-15787-9
9 787301 157879 >
定价：65.00元

国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系 · 前沿系列

近代电磁理论

(第二版)

龚中麟 编著



《中外物理学精品书系》
编 委 会

内容简介

本书系统地讲述应用电磁理论的基本理论，着重选择与近代进展及应用密切相关的难度较高的问题．第二版新增内容占近半篇幅．第一章介绍电磁场的基本定理．第二章为电磁介质及平面电磁波理论，对于平面电磁波在复杂媒质中的传播作了全面论述，包括各向异性介质、超导体、手征介质、负电磁常数人工媒质和非均匀介质及射线方法等现代论题．第三章讲述导波理论，对于金属管波导、光纤有详细论述，在周期传输结构一节中增补了电磁波在晶格点阵中的传播及电磁带隙结构等内容．第四至六章为辐射、散射和衍射理论，着重论述积分方程方法，含有较多高难度问题．增补了天线阵的基本理论、T 矩阵方法、地波绕地球表面传播及衍射的高频渐近理论等内容．附录中除汇集常用的数学公式外还对电磁学的单位制作了较详细的讲解．

本书可作为理工科高等院校电子学与信息系统、通信、应用物理和工程物理等专业“电磁理论”等有关研究生课程的教学参考书．对于在相关领域内工作的研究人员和工程技术人员，本书也是一本有用的参考书．

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界

和中国物理科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统地整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其它相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会　主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

第二版序

本书第一版出版距今已有18年，其间曾于1996年由我国台湾凡异出版社(新竹)出版繁体字版本，但内容未作更动.在此期间，电磁学领域的研究有了长足的进展，此次有机会再版，作者感到有必要对第一版的内容作相应的增补，纳入一些新的进展.

此次对第一版的第一至六章均作了不同程度的增补，其中第二、三、六章的改动幅度较大.第二章对平面电磁波在复杂媒质中的传播问题作了全面论述，除第一版已有的各向异性介质、非均匀介质和射线光学近似外，增补了超导体、手征介质和双负电磁常数人工媒质的三节，后者是近年才取得重大进展和极受关注的课题，目前尚未见于电磁学教材.在第三章中增补金属管波导、电磁谐振腔和微带线三节是为了内容的完整性，以涵盖导波问题的各个方面.虽然第一版已有关于光纤和周期系统的两节，但第二版的这两节已完全重新写过.对于光纤传输的理论论述已力求详尽，关于损耗和色散已补充了实际内容.在周期传输系统的一节中增补了电磁波在晶格点阵中传播的基础知识，并综述了电磁带隙结构的原理和近年进展，这些内容也不曾出现在电磁学教材中.在第六章中增补了地波绕地球表面传播和衍射的高频渐近理论两节内容.选择地波问题的目的在于介绍抛物型方程近似方法和阻抗边界条件的导出，它们在波传播问题中有相当广的应用.衍射的高频渐近理论，特别是衍射的几何理论的应用已相当广泛，将它纳入很有必要.此外，在第四章中增补微带天线和天线阵的基本理论，以及在第五章中增加T矩阵方法也使这两章包含的内容更为完整.附录中汇集了常用的数学公式和物理常数，便于查阅而不必另外搜寻.电磁学单位制是困扰学生的问题之一，许多书籍在附录中只列出简单的表格，不足以释惑，为此附录C对电磁学单位制进行了较详细的讲解.新增补的文字占第二版篇幅的45%，可算得是一本新书.

第一版含有另一位作者撰写的文字，由于合作关系已经终止，这些文字在第二版中已经删去，以尊重著作权，也使第二版能保持适中的篇幅.

在退休之前的近20年中，作者在北京大学信息科学技术学院为电子学与信息系统和通信两个专业研究生讲授同名课程，第二版中仍然保留的第一版主要内容，以及第二版的部分增补内容，已在教学过程中多次使用.此次对于仍保留的第一版内容作了文字修改，并尽可能改正了已发现的错误.尽管如此，错误仍在所难免，尚祈读者和同行专家赐教.

第二版仍沿用第一版的体制,矢量用黑斜体字母表示,张量用黑正体字母表示,物理量随时间的简谐变化用工程上惯用的 $\exp(j\omega t)$ 表示方法,单位制采用国家法定的国际单位制.

对于北京大学出版社长期以来给予的支持和帮助,作者希望利用此机会表示衷心的感谢.

在本书行将完稿之际,汶川特大地震的灾难突然降临.一个月来,噙着泪水强忍悲痛,每天盯住抗灾的电视报道.灾难使人心碎,救灾英雄的事迹使人振奋,天安门广场的国哀场面……,这一幅幅画面会长存于记忆之中,变成未来前进的力量.作为全国人民支援抗灾的一个缩影,人口仅 283 万的日照市捐赠就已超过 2 亿元,莒县 10 位农民自驾农用三轮车赶赴四川救灾,……,请允许我记下这点点滴滴.多难兴邦,自然灾害、人为扼阻都不可能挡住已经趋向成熟的中华民族前进的步伐,中国定会到达明天的昌盛和辉煌.

龚中麟

2008 年 6 月 12 日,汶川地震一月祭

于日照海滨教授花园

中　外　物　理　学　精　品　书　系

本书出版得到"国家出版基金"资助

目　　录

第一章　电磁理论基础

§1.1　电磁场的基本方程

1. Maxwell 方程式[1]

英国物理学家 James Clerk Maxwell 在题为"电磁场的动力学理论"的论文(1864 年报告,1865 年发表)中首先建立了真空中宏观电磁场的完整方程组. 真空或介质中的宏观电磁场的 Maxwell 方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\quad &&\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J},\\&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,&&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

电荷和电流在 Maxwell 方程组中是作为源项出现的,电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 通过电流连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\tag{1.1.2}$$

相互联系. 作为确定电磁场和电荷、电流系统运动的完整方程组,除了 Maxwell 方程组和电流连续性方程之外还必须补充两个关系式以给出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移 $\boldsymbol{D}$ 以及磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系. 这两个关系与介质的性质有关,称为结构关系(constitutive relations).

在真空中 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 之间有简单的线性关系:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}.\tag{1.1.3}$$

这里的 ε_0 和 μ_0 分别称为真空介电常数和真空磁导率,取值分别为

$$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m},$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}.$$

ε_0 和 μ_0 是基本的物理常数. 对于各向同性电磁介质,在实际上通常遇到的场强值范围内结构关系是简单的线性关系:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\kappa_e\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E},\\\boldsymbol{B}&=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=\mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu_0\kappa_m\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.4}$$

$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别是介质的宏观电极化强度和磁化强度. 但是,在结构比较复杂的介质,例如晶体中 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 之间的这种简单的线性关系不再成立,介电常数和磁导率需要用张量表示,这种介质称为各向异性介质. 关于介质的电磁性质问题

将在第二章中作详细的讨论.

2. 磁荷及磁流[2]. 电磁场方程的对偶性[3,4]

对于随时间简谐变化的电磁场使用复数表示是方便的,本书中我们使用对于工程问题方便的 $e^{j\omega t}$ 表示物理量随时间的简谐变化. 从 20 世纪 40 年代开始在应用电磁理论中引入虚构的磁荷和磁流概念已被证明对于解决许多应用电磁学实际问题是方便的. 使用简谐场的复数表示方法并且在对应的位置加上虚构的磁荷密度 ρ_m 及磁流密度 $\boldsymbol{J}_m$ 后 Maxwell 方程组(1.1.1)式就变成

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}+j\omega\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{J}_m, \quad \nabla\times\boldsymbol{H}-j\omega\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J},\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, \qquad\qquad\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.5}$$

尽管磁荷和磁流不像电荷和电流那样是物理上可以观察的实体,但将它们作为源项引入 Maxwell 方程式后使得 Maxwell 方程式的数学形式变成对称的,当认识到磁型源所表示的问题的物理意义之后就可以给某些电磁场问题的求解带来数学上的便利. 对于磁型源的意义我们将通过具体问题来逐步说明. 写成(1.1.5)式形式的 Maxwell 方程组在本书中将作为时谐电磁场问题的基本方程.

当只存在电型源 $\rho,\boldsymbol{J}$ 或只存在磁型源 $\rho_m,\boldsymbol{J}_m$ 时我们逐一写出均匀介质中的 Maxwell 方程式和电流连续性方程(在虚构源 ρ_m 和 $\boldsymbol{J}_m$ 之间存在着与真实源 ρ, $\boldsymbol{J}$ 之间相同的连续性方程):

电 型 源	磁 型 源
$\nabla\times\boldsymbol{E}+j\omega\mu\boldsymbol{H}=0$,	$\nabla\times\boldsymbol{E}+j\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_m$,
$\nabla\times\boldsymbol{H}-j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}$,	$\nabla\times\boldsymbol{H}-j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0$,
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$,	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$,	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_m/\mu$,
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+j\omega\rho=0$,	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m+j\omega\rho_m=0$.

不难看出这两组方程式之间存在着明显的对应关系,也就是说如果将上面两组方程式中的所有场量和源量作如下的代换:

$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$,	$\boldsymbol{E}\to-\boldsymbol{H}$,
$\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{E}$,
$\varepsilon\to\mu$,	$\varepsilon\to\mu$,
$\mu\to\varepsilon$,	$\mu\to\varepsilon$
$\rho\to\rho_m$,	$\rho_m\to\rho$,
$\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{J}_m$,	$\boldsymbol{J}_m\to\boldsymbol{J}$,

电型源方程就变为磁型源方程,而磁型源方程则变为电型源方程. 电型源方程式

和磁型源方程式的这种对应形式称为对偶性(duality).

电磁场方程的对偶性还表现在,当电型源和磁型源两者并存时,如果作上面左列的代换,再加上代换 $\rho_m \to -\rho$, $\boldsymbol{J}_m \to -\boldsymbol{J}$,那么方程组(1.1.5)式左列的两个电场方程变换为右列的磁场方程,同时右列的两个磁场方程变换为左列的电场方程,使方程组(1.1.5)式保持不变,电场与磁场的方程互为对偶.

电磁场方程式的对偶性提供了这样一种便利,如果知道一个问题(例如电型源问题)的解就可由对偶关系得出它的对偶问题(为一磁型源问题)的解,而无须重复求解过程. 由电偶极子的辐射场写出磁偶极子的辐射场可作为对偶性应用的简单例子.

【例】 短磁流元的辐射场.

位于原点沿 $+z$ 轴方向取向的短电流元 $I_0 \mathrm{d}l$ 在远区的辐射场的熟知结果为

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 \mathrm{d}l}{4\pi} \mathrm{j}\omega\mu_0 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0 r)}}{r}, \\ H_\phi &= \frac{1}{Z_0} E_\theta = \frac{I_0 \mathrm{d}l}{4\pi} \mathrm{j}k_0 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0 r)}}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

其中 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. 短电流元的对偶源是短磁流元 $I_{m0} \mathrm{d}l$,依据对偶关系可由(1.1.6)式直接写出沿 $+z$ 轴取向的短磁流元 $I_{m0} \mathrm{d}l$ 在远区的辐射场

$$\left.\begin{aligned} H_\theta &= \frac{I_{m0} \mathrm{d}l}{4\pi} \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0 r)}}{r}, \\ E_\phi &= -\frac{I_{m0} \mathrm{d}l}{4\pi} \mathrm{j}k_0 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0 r)}}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

不难看出这是小电流圈的辐射场,但为得到磁流元与小电流圈磁矩之间的具体对应关系还需直接求出小电流圈的辐射场,所得到的具体对应关系为

$$I_{m0} \mathrm{d}l = \mathrm{j}\omega\mu_0 IS = \mathrm{j}\omega\mu_0 m_0, \tag{1.1.8}$$

这里 $m_0 = IS$ 为小电流圈的磁矩.

3. 边界条件

在不同介质分界面两侧场发生不连续性变化,应用与(1.1.5)式对应的积分形式的 Maxwell 方程式可导出在介质分界面两侧场应当满足的下列边界条件:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = -\boldsymbol{J}_{ms}, \quad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s, \\ &\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_s, \qquad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = \rho_{ms}. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为介质分界面的单位法线,方向由介质 2 指向介质 1;ρ_s,ρ_{ms},$\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{J}_{ms}$ 分别表示电荷、磁荷、电流以及磁流的面密度.

4. 复数 Poynting 定理[5,6]

由复数形式的 Maxwell 方程式可以导出表示电磁场能量关系的复数

Poynting 定理.当讨论能量关系时(1.1.5)式中引入的虚构的磁型源应当去掉，Maxwell 方程式的两个旋度方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H},\tag{1.1.10a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}.\tag{1.1.10b}$$

(1.1.10b)式取复共轭得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^*=-\mathrm{j}\omega\varepsilon^*\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{J}^*,\tag{1.1.11}$$

然后分别用 $\boldsymbol{H}^*$ 和 $\boldsymbol{E}$ 标乘(1.1.10a)和(1.1.11)式,所得的两式相减后为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)&=\boldsymbol{H}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}^*)\\&=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*.\end{aligned}$$

上式在闭合面 S 包围的区域 V 上积分得

$$\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\iiint_V(\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V,$$

整理后就得到下列形式的复数 Poynting 定理:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=&-\mathrm{j}2\omega\iiint_V\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\mathrm{d}V\\&+\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

对于各向同性介质,介质常数 μ,ε 一般为复数[①], $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$, $\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$,在无外源的情况下由 Ohm 定律有 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$,将这些关系代入(1.1.12)式,分离出它的实部和虚部后得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\oint\!\!\!\oint_S\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&\\=\frac{1}{2}\iiint_V\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\omega\iiint_V(\varepsilon''\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+\mu''\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*)\mathrm{d}V,\end{aligned}\tag{1.1.13}$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\oint\!\!\!\oint_S\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&\\=-2\omega\iiint_V\frac{1}{4}(\varepsilon'\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*-\mu'\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*)\mathrm{d}V&\\=2\omega(\overline{W}_{\mathrm{m}}-\overline{W}_{\mathrm{e}}).\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

以上两式右方体积分项的物理意义是明显的.(1.1.13)式右方第一项表示体积 V 内介质中的 Ohm 损耗功率的时间平均值,由于复数介电常数 ε 和复数磁导率

① 见§2.1关于介质性质的讨论.

μ 的虚部表示介质中的损耗[①]，右方第二项表示体积 V 内介质损耗功率的时间平均值，这两项之和则表示 V 内的全部损耗功率的时间平均值，用 P_l 表示.(1.1.14)式右方的体积分则表示 V 内贮存的电能和磁能的时间平均值之差 $\overline{W}_e-\overline{W}_m$.(1.1.13)和(1.1.14)两式合起来可以写作

$$-\oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = P_l + \mathrm{j}2\omega(\overline{W}_m-\overline{W}_e), \qquad (1.1.12\mathrm{a})$$

该式将复数 Poynting 定理的物理意义表示得更加明显.

复数矢量 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)/2$ 称为复数 Poynting 矢量，它的实部表示能流密度的周期平均值. 复数 Poynting 定理(1.1.13)式表明流入一闭合区域的电磁能流的周期平均值与这个区域内由于欧姆损耗和介质损耗所消耗的电磁功率的周期平均值相等，这是能量守恒定律的具体表现形式. 由于使用物理量的复数表示在这里得到了一个新的关系式(1.1.14)，它表明当 V 内贮存的电能与磁能的时间平均值不相等时对于呈现电性或磁性的这部分平均净贮能需要用复数 Poynting 矢量的虚部来平衡. 在一个闭合的区域中所包含的电磁场系统通过边界与外界交换能量时可以等效地表示成具有一定端口(例如二端口)的网络系统，系统中贮存的电能和磁能的时间平均值之差可用网络输入阻抗的电抗部分等效地表示.

§1.2　势　函　数

1. 电型 Lorenz 势及磁型 Lorenz 势

电型源的 Lorenz 势的引入在大学水平的电磁理论中是熟知的，现在简单地重复一下. 在均匀媒质中由 Maxwell 方程组中磁感应的散度方程式可以引入矢势 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \qquad (1.2.1)$$

上式代入 Faraday 电磁感应定律得

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\nabla\times\boldsymbol{A} = 0,$$

引入标量势 Φ 后上式可改写为

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\Phi. \qquad (1.2.2)$$

将(1.2.1)和(1.2.2)式代入 $\boldsymbol{H}$ 的旋度方程得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{J} = k^2\boldsymbol{A} - \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\nabla\Phi + \mu\boldsymbol{J},$$

① 见§2.1关于介质性质的讨论.

这里 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$. 然后利用矢量公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ 可将上式改写为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\nabla\Phi-\mu\boldsymbol{J}.$$

将(1.2.2)式代入 $\boldsymbol{D}$ 的散度方程得

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\varepsilon\nabla^2\Phi=\rho,$$

引入 Lorenz 规范条件①

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi=0 \tag{1.2.3}$$

后,上面得到的两个方程式就分别化为 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 所满足的非齐次 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}, \tag{1.2.4}$$

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=-\rho/\varepsilon. \tag{1.2.5}$$

利用 Lorenz 规范条件(1.2.3)式在(1.2.2)式中消去 Φ 后,$\boldsymbol{E}$ 可以仅用 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\frac{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}. \tag{1.2.2a}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 Φ 称为电型 Lorenz 势.

磁型源情况下可以用类似的方法引入势函数. 如果用 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 和 Φ_{m} 表示磁型源的矢势和标势,电磁场可以表示为

$$\boldsymbol{D}=-\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}, \tag{1.2.6}$$

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}-\nabla\Phi_{\mathrm{m}}. \tag{1.2.7}$$

在 Lorenz 规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi_{\mathrm{m}}=0 \tag{1.2.8}$$

下 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 和 Φ_{m} 也满足非齐次 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}+k^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}=-\varepsilon\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}, \tag{1.2.9}$$

$$\nabla^2\Phi_{\mathrm{m}}+k^2\Phi_{\mathrm{m}}=-\rho_{\mathrm{m}}/\mu. \tag{1.2.10}$$

$\boldsymbol{H}$ 也可以仅用 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 表示为

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}+\frac{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}})}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}. \tag{1.2.7a}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 和 Φ_{m} 称为磁型 Lorenz 势.

当两类源同时存在时电磁场则可用两类 Lorenz 势表示为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\frac{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}, \tag{1.2.11}$$

---

① 长期以来,在电磁学文献中,这个条件以及相应的势函数以荷兰物理学家 H. A. Lorentz(1853—1928)的名字命名. 据近年的研究,该势函数在 1867 年已出现在丹麦物理学家 L. V. Lorenz (1829—1891)的论文中. 见 J. Van Bladel, Lorenz or Lorentz? *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 33, no. 2, p. 69, 1991,及该刊其后发表的讨论. 故本书将这个条件及势函数冠以 Lorenz 之名.

$$H = \frac{1}{\mu}\nabla\times A - \mathrm{j}\omega A_{\mathrm{m}} + \frac{\nabla(\nabla\cdot A)}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}. \tag{1.2.12}$$

2. 无界空间三维标量波动方程的 Green 函数

Green 函数是求解边值问题的有效工具，在引进 Green 函数之前我们先介绍为表述点源的密度所必需的 Dirac-δ 函数. δ 函数不是通常意义下的数学函数，因为不能给出它的函数值. 它的定义是通过它和其它函数的积分给出的. 对于 δ 函数的严格处理需要用到广义函数或分布(distributions)理论，在这里我们仅给出本书需用到的定义和它在正交曲线坐标系中的表达式.

三维空间中的 δ 函数可以用它的积分定义为

$$\iiint_V f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{r}\notin V; \\ f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in V, \end{cases} \tag{1.2.13}$$

式中 $f(\boldsymbol{r})$是 $\boldsymbol{r}$ 的任意正常函数. 在直角坐标系中 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$可以表示为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'). \tag{1.2.14}$$

其中的每一个一维 δ 函数都可以用与(1.2.13)式相类似的一维区间上的积分定义. 在正交曲线坐标系(u_1,u_2,u_3)中 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$应表示为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\delta(u_1-u'_1)\delta(u_2-u'_2)\delta(u_3-u'_3)}{\mathrm{J}(x',y',z')}, \tag{1.2.15}$$

这里 J 是从直角坐标系变换到正交曲线坐标系(u_1,u_2,u_3)的 Jacobi 行列式. 但在奇异点，例如球坐标系的原点，$x'=y'=z'=0$，$\mathrm{J}(x',y',z')=0$，直角坐标系与曲线坐标系之间一对一的变换关系不再成立，这时需用到下列形式的 δ 函数的表示式

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad \text{—— 直角坐标系}(x,y,z) \tag{1.2.16a}$$

$$= \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho} \quad \text{—— 柱坐标系}(\rho,\phi,z) \tag{1.2.16b}$$

$$= \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}. \quad \text{—— 球坐标系}(r,\theta,\phi) \tag{1.2.16c}$$

不难验证，对于圆柱坐标系和球坐标系中包含坐标原点的体积 V，(1.2.16b)和(1.2.16c)式满足 δ 函数的定义式(1.2.13). 利用定义(1.2.13)式容易证明

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{1.2.17}$$

现在我们来导出无界空间中三维标量波动方程的 Green 函数，该函数用 $\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示. 这是一个最常用到的 Green 函数，定义为下面的点源的非齐次 Helmholtz 方程的解：

$$(\nabla^2+k^2)\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{1.2.18}$$

为便于求解,我们先将方程(1.2.18)变换到以 $\boldsymbol{r}'$ 为球心的球坐标系中,令 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$,由(1.2.16c)式得

$$(\nabla^2+k^2)\mathrm{g}(R)=-\frac{\delta(R)}{4\pi R^2}. \tag{1.2.18a}$$

在 $R\neq 0$ 点这个方程变成为零阶球 Bessel 方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\mathrm{g}(R)\right]+k^2\mathrm{g}(R)=0,$$

它的出射球波解为零阶第二类球 Bessel 函数 $\mathrm{h}_0^{(2)}$,所以可以将(1.2.18a)式的解写作

$$\mathrm{g}(R)=A\mathrm{h}_0^{(2)}(kR)=A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{-\mathrm{j}kR}, \tag{1.2.19}$$

这里 A 为待定常数. 我们作出以原点为球心、半径为 a 的小球体,在这个球体上做出方程式(1.2.18a)的积分,将左侧体积分的第一项应用散度定理化成面积分,得

$$4\pi R^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\mathrm{g}(R)\bigg|_{R=a}+k^2\int_0^a\mathrm{g}(R)4\pi R^2\mathrm{d}R=-1.$$

将解(1.2.19)代入上式就可定出常数

$$A=-\mathrm{j}k/4\pi.$$

这样就得到了在以 $\boldsymbol{r}'$ 为原点的球坐标系中方程式(1.2.18a)的解

$$\mathrm{g}(R)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R},$$

再变换回原来的球坐标系就得到方程式(1.2.18)的解

$$\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{1.2.20}$$

这是一个最经常遇到的 Green 函数,利用它可以很方便地将无界空间中局域分布源的势表示成积分形式.

3. 无界空间中任意局域分布源的势

如果所有的源均分布于空间中的有限区域,这样的源分布称为局域分布. 利用标量 Green 函数(1.2.20)式,局域分布源在无界空间中产生的势可以简单地表示为源分布与 Green 函数的积分. 我们已经知道标量 Green 函数 $\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是处于 $\boldsymbol{r}'$ 的单位点源在无界空间中产生的势,由于标势 Φ 所满足的方程(1.2.5)的线性,此方程式的解可以由解

$$\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\epsilon}\mathrm{d}V'=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

的叠加构成,所以(1.2.5)式的解

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon}\iiint_V \mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{\epsilon}\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V', \tag{1.2.21}$$

积分区域 V 为包围所有源分布的任意形状区域. Φ_m 所满足的方程(1.2.10)的解可类似地写出. 矢势 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}_m$ 所满足的矢量 Helmholtz 方程(1.2.4)和(1.2.9)在直角坐标系中可分解为与(1.2.5)式形状相同的标量方程式,因此可同样地用 $\mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的积分构成解,于是我们有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\iiint_V \mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \mu\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V', \tag{1.2.22}$$

$$\Phi_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu}\iiint_V \mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho_m(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{\mu}\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho_m(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V', \tag{1.2.23}$$

$$\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\iiint_V \mathrm{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \varepsilon\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'. \tag{1.2.24}$$

解(1.2.21)—(1.2.24)也就是熟知的推迟势,我们现在利用 Green 函数以更简单的方式导出了它们.

【例】 无穷长均匀线电流的矢势.

所取的坐标系示于图 1.1. 在这里我们将直角坐标系的 z 轴取得与线电流重合,而且电流的正向取作 z 轴的正向. 由于电流为无限长可将场点取在 $z=0$ 平面内. 由图可见电流元 $\mathrm{d}z'$ 到场点的距离

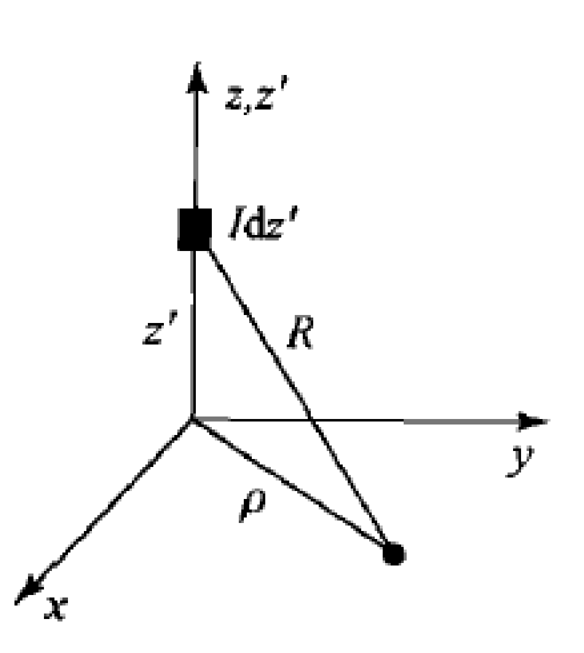


图 1.1 计算线电流的矢势使用的坐标系

$$R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = [\rho^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}},$$

代入(1.2.22)式后得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\boldsymbol{J}(z')\mathrm{d}V' = \lim_{\Delta S'\to 0}\iint_{\Delta S'}J\mathrm{d}S'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}z' = \boldsymbol{a}_z\frac{\mu I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}z'.$$

由于关系式[①]

$$\mathrm{H}_0^{(2)}(k\rho) = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}z \qquad (R=\sqrt{\rho^2+z^2}),$$

我们最后得到

① 见,例如,I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1980.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu I}{4\mathrm{j}} \mathrm{H}_0^{(2)}(k\rho), \tag{1.2.25}$$

式中 $\boldsymbol{a}_z$ 为 z 方向单位矢量，$\mathrm{H}_0^{(2)}$ 为零阶第二类 Hankel 函数.

§1.3 场等效原理

1. 唯一性定理[3,7]

唯一性定理是建立场等效原理的基础，我们在这里先来简单地介绍唯一性定理. 考虑被闭合面 S 包围的空间区域 V，假定 V 内无源，场 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ 是外源在 V 内建立的一组场，若 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$ 是外源在 V 内可能建立的另一组场，则这两组场之差 $\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$ 在 V 内满足无源的 Maxwell 方程组. 重复 §1.1 第 4 小节中导出复数 Poynting 定理时的同样步骤可得到关系式

$$\oiint_S [(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)^*] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= \mathrm{j}\omega \iiint_V [\varepsilon^* \mid \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 \mid^2 - \mu \mid \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 \mid^2] \mathrm{d}V - \iiint_V \sigma \mid \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 \mid^2 \mathrm{d}V.$$

为使上式左方的面积分为零则要求右方的体积分为零，在右方体积分的三项中被积函数 $|\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1|^2$ 及 $|\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1|^2$ 为非负函数，使等式右方为零的唯一可能是 $|\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1|^2$ 和 $|\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1|^2$ 均为零，这意味着区域 V 内的场只有唯一的一组解. 如果对于 V 内场的任何可能解，在 V 的边界面 S 上电场或磁场的切线分量要求取确定值，那么对于所假定的 V 内的两组解在 S 面上应有

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{或} \quad (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)^* \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,$$

在 S 面的每一个面元上如果上面的条件能保证成立就可以使左方的面积分为零. 因此，电磁场的唯一性定理可以表述如下：对于一个被闭合面 S 包围的区域 V，如果 S 面上的电场或者磁场的切线分量给定，或者在 S 面的部分区域给定 $\boldsymbol{E}$ 的切线分量，在 S 的其余表面给定 $\boldsymbol{H}$ 的切线分量，那么在区域 V 内的电磁场是唯一确定的.

2. 镜像原理[4]

根据电磁场的唯一性定理，为确定一个空间给定区域内的电磁场，只需要给定这个区域边界面上的切线分量电场或磁场，而不必顾及场是由怎样的源产生的. 这就为建立场等效原理提供了必要的基础. 场等效原理是这样的一个物理原理，在一个给定空间区域内由确定的源产生的电磁场可以看作是由另外的等效源产生的. 不论等效源是否实际存在，只要它们在给定的同一空间区域内产生的场相同即可. 通常等效源问题较原问题更容易求解，这就有助于解决某些困难的

电磁场边值问题. 举一个熟知的例子来说明：点电荷 q 在以它为中心的半径 r_0 球面以外的空间区域中建立的静电场也可以认为是由在半径 r_0 球面上均匀分布的面电荷建立的，对于球外区域的场这两种源是互为等效的，尽管它们在球内区域建立的场不同.

熟知的镜像问题可以作为场等效原理的另一个例子. 我们来建立谐振的短电流元(电偶极子)和磁流元(磁偶极子)对于无穷大导体平面的镜像. 根据短电流元的电磁场的知识，不难证明平行于导体平面和垂直于导体平面的短电流元的镜像应如图 1.2 所示，因为如此作出的镜像电流元与源电流元的场的矢量和可以满足导体平面上电场切线分量为零的边界条件. 同样，也可以根据短磁流元电磁场的知识(见 § 1.1 的例)作出平行于导体面和垂直于导体面的磁流元的镜像(见图 1.2). 值得注意的是对于静电场问题镜像原理适用于任何导体，但对于交变场，镜像原理只适用于理想导体的边界面.

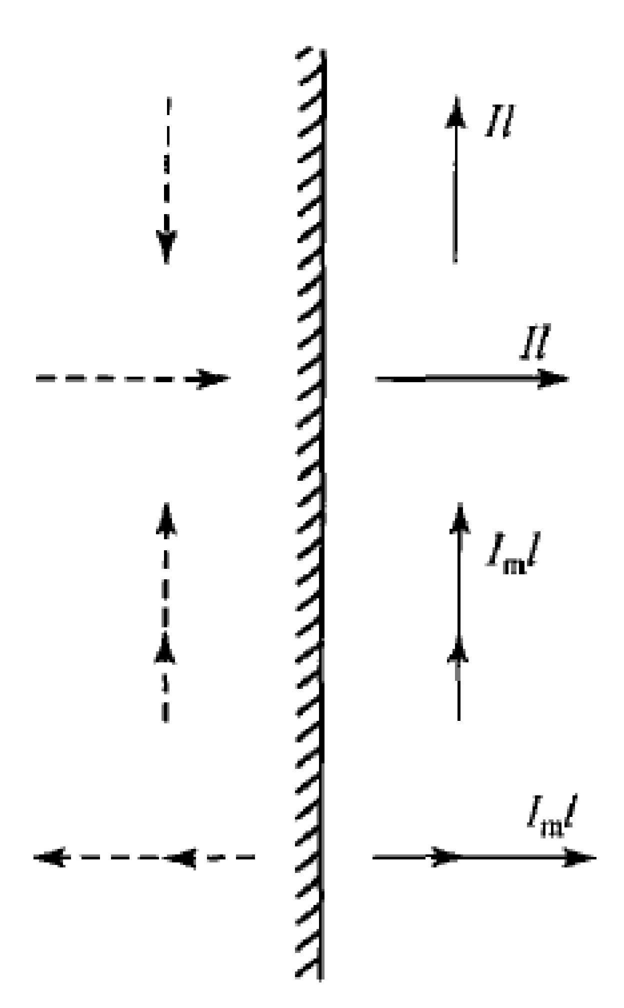


图 1.2 电流元和磁流元对于理想导体平面的镜像

镜像原理的实质是，对于求解区域内的场用镜像源代替区域边界面上的面分布源，因此是一种场等效原理. 由于作出等效源的方式可以是多样的，也就是说可以使用真实的电型源，也可以使用虚构的磁型源，所以场等效原理可以有不同的形式. 即使等效源是电型源，也只是在场等效意义下的等效源，而不是物理真实源. 在这个意义下，作为等效源的电型源和虚构的磁型源并没有什么区别，我们将会看到使用磁型等效源通常是更方便的.

3. 场等效原理[3,4,8]

现在我们来具体导出场等效原理的一般形式. 设在原问题中源局限于闭合面 S 包围的区域 V_1 内部，源在 S 内、外区域 V_1 和 V_2 中产生的场用 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 表示，如图 1.3(a). 可以这样来作出对于 S 面外的空间区域 V_2 的场等效问题，在这个等效问题中 S 面内的空间区域 V_1 中无源而且场为零，但在 S 面上有面电流和面磁流

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{J}_{ms} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}, \tag{1.3.1}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位外法线，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是原问题中 S 面上的场强分布，如图 1.3(b). 由唯一性定理可知，在等效问题中 S 面外的空间区域 V_2 中的场分布应当和原问题相同，也是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 在场等效原理的这种形式中等效源是面电流和面磁流两者，这种等效形式可以追溯到 Love(1901)的工作，现在常称为 Love 场等效原理.

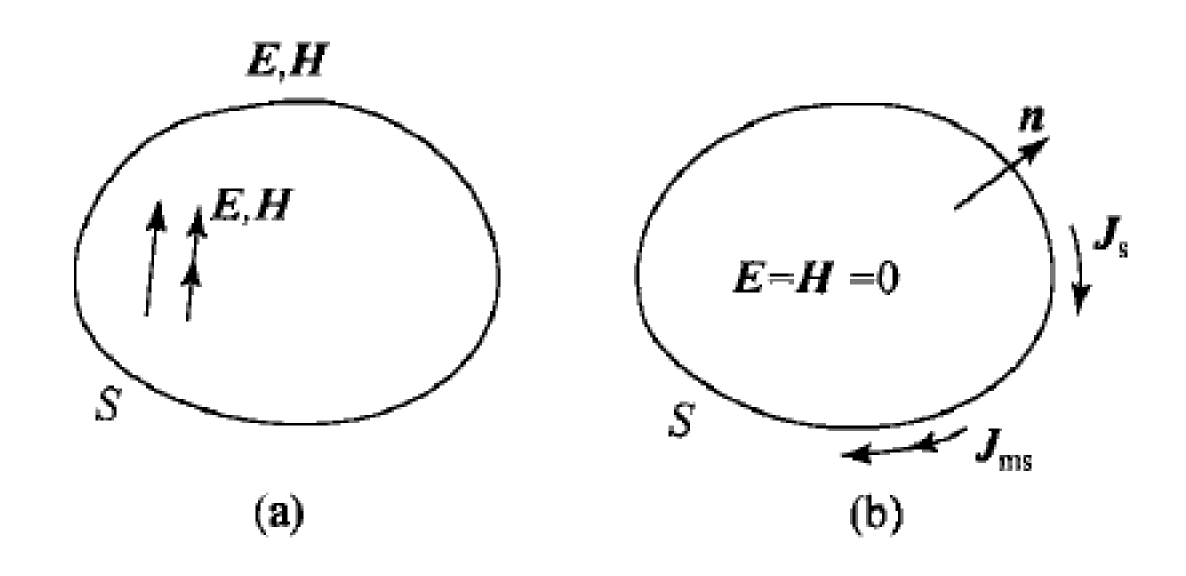


图 1.3 Love 的场等效原理

在 Love 的场等效形式中需要使用两种等效源，这会增加实际计算的复杂性，更方便的场等效形式是只使用一种等效源. 由于唯一性定理并不要求在边界面上给定 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 两者的切线分量，而只要求给定两者中的任一个的切线分量，所以导出只使用一种等效源的场等效形式是可能的. 这样的等效形式之一如图 1.4(b)所示，在 S 面内侧放置有一理想导体面，而在 S 面上有迫布面磁流分布

$$\boldsymbol{J}_{ms} = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}, \tag{1.3.2}$$

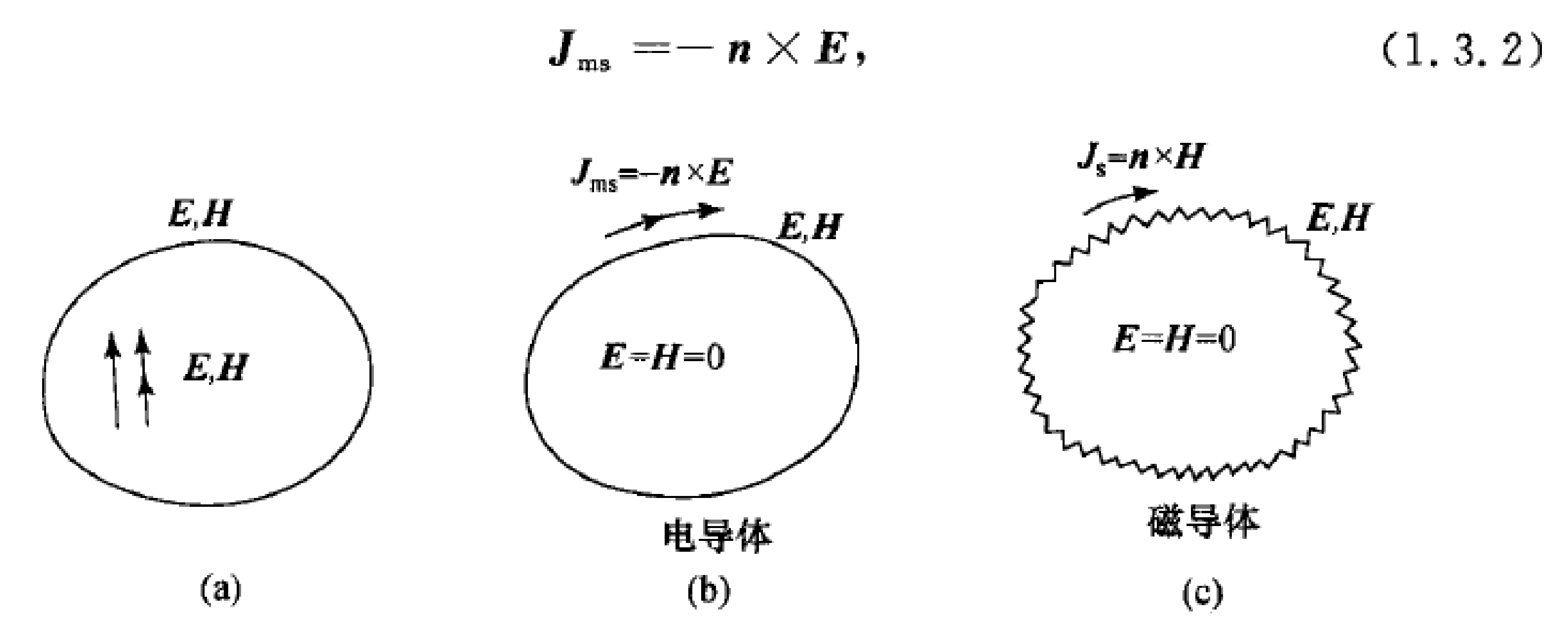


图 1.4 Schelkunoff 的场等效原理

这里 $\boldsymbol{E}$ 是原问题(图 1.4(a))中 S 面上的电场分布. 由唯一性定理在 S 面内的区域 V_1 中 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$，在 S 面外的区域 V_2 中得到原问题的电磁场 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$，所以这是与原问题等效的问题.

另外的一种等效形式示于图 1.4(c)，现在在 S 面内的区域 V_1 被理想磁导体面包围而在 S 面上有迫布面电流分布

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}, \tag{1.3.3}$$

$\boldsymbol{H}$ 是原问题中 S 面上的磁场分布. 理想磁导体是一种虚构的物质，在它的表面上要求 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=0$. 同样由唯一性定理可以证明在 V_1 内 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$，在 V_2 内的电

磁场与原问题相同. 这两种场等效形式是首先被 Schelkunoff 导出的[①].

我们现在用一个简单的例子来说明场等效原理的应用,并通过直接计算使读者相信场等效原理的正确性.

【例】 半无界空间中平面电磁波传播问题的等效.

设想由 $z<0$ 半空间中的电流源和磁流源产生的平面电磁波沿 z 轴方向传播,在 $z>0$ 半空间的场为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{Z_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

其中 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. 这是本例的原问题,示于图 1.5(a).

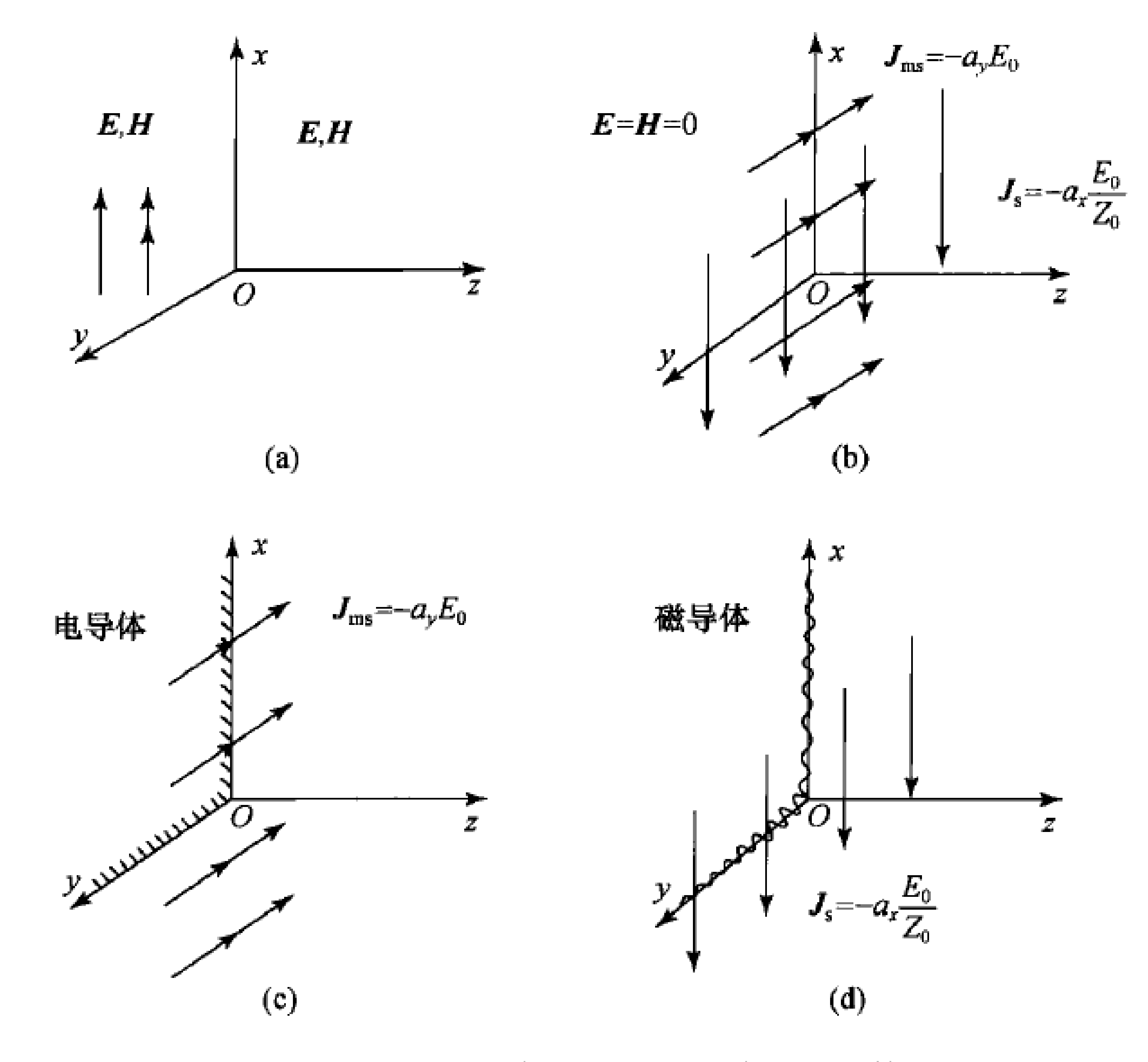


图 1.5　平面电磁波在半无界空间中传播的场等效问题

根据场等效原理,可以作出这个原问题的几种不同等效问题,在 $z>0$ 半空间中都可给出与(1.3.4)式相同的平面电磁波场. 首先可以作出 Love 的场等效

---

① S. A. Schelkunoff, Some equivalence theorems of electromagnetics and their applications to radiation systems, *Bell Systems Tech. Jour.*, Vol. 15, pp. 92—112, 1936.

S. A. Schelkunoff, Kirchhoff's formulae, its vector analogue and other field equivalence theorems, *Commun. Pure Appl. Math.*, Vol. 4, pp. 43—59, June, 1951.

形式,根据(1.3.1)式在 $z=0$ 平面上的等效面电流和等效面磁流分别为

$$\boldsymbol{J}_{s}=\boldsymbol{a}_{z}\times\boldsymbol{H}\big|_{z=0^{+}}=-\boldsymbol{a}_{x}\frac{E_{0}}{Z_{0}},$$

$$\boldsymbol{J}_{ms}=-\boldsymbol{a}_{z}\times\boldsymbol{E}\big|_{z=0^{+}}=-\boldsymbol{a}_{y}E_{0}.$$

不难计算出上面所设的等效源在 $z<0$ 和 $z>0$ 半空间中产生的场:

面电流的场

$$H_{y}=\frac{1}{2}\frac{E_{0}}{Z_{0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{0}z},\qquad E_{x}=Z_{0}H_{y},\qquad z>0;$$

$$H_{y}=-\frac{1}{2}\frac{E_{0}}{Z_{0}}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_{0}z},\qquad E_{x}=-Z_{0}H_{y},\qquad z<0.$$

面磁流的场

$$E_{x}=\frac{1}{2}E_{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{0}z},\qquad H_{y}=\frac{1}{Z_{0}}E_{x},\qquad z>0;$$

$$E_{x}=-\frac{1}{2}E_{0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_{0}z},\qquad H_{y}=-\frac{1}{Z_{0}}E_{x},\qquad z<0.$$

对应的分量相加后就可证明等效源在 $z<0$ 半空间产生的场为零,在 $z>0$ 半空间产生的场与(1.3.4)式给出的平面波场相同.

在图 1.5(c)所示的等效问题中 $z=0$ 平面是一理想导体平面,在这个面的 $z=0^{+}$ 一侧加有迫布面磁流

$$\boldsymbol{J}_{ms}=-\boldsymbol{a}_{z}\times\boldsymbol{E}\big|_{z=0^{+}}=-\boldsymbol{a}_{y}E_{0}.$$

我们已经知道这样的迫布面磁流,在 $z=0$ 理想导体平面的镜像是与它数值和方向均相同的面磁流(见§1.3),所以在 $z>0$ 半空间中的电磁场可以从 $z=0^{+}$ 面上的迫布面磁流和 $z=0^{-}$ 面上的镜像面磁流算出,结果仍是(1.3.4)式的平面波场. 而由于导体平面的屏蔽作用在 $z<0$ 半空间中的场为零.

另一种场等效形式示于图 1.5(d),这里 $z=0$ 平面为一理想磁导体面,而在这个面的 $z=0^{+}$ 平面上加有迫布面电流

$$\boldsymbol{J}_{s}=\boldsymbol{a}_{z}\times\boldsymbol{H}\big|_{z=0^{+}}=-\boldsymbol{a}_{x}E_{0}/Z_{0}.$$

同样,考虑到迫布面电流对于理想磁导体面的镜像面电流,可以证明在 $z>0$ 半空间仍得到平面波场(1.3.4)式,同时由于理想磁导体的屏蔽作用在 $z<0$ 半空间的场为零.

从这个例子我们可以看到,只使用一种等效源的等效形式在计算上比较简单,特别是理想导体面加上迫布面磁流的等效形式是人们比较熟悉的问题,所以这种形式的等效使用得较多. 这也是需要引入虚构的磁型源的一个重要原因.

§1.4　互易定理

1. 互易定理[3,4,9]

互易定理的概念首先见于 Lord Rayleigh 的声学著作中(1894)，H. A. Lorentz 首先从电磁场的定理导出了互易定理(1895).

电磁互易定理反映两组不同的场源之间的影响和响应关系. 我们先导出它的数学形式，然后再解释它的意义.

考虑同一线性介质中的两组频率相同的源 $\boldsymbol{J}^a, \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^a$ 和 $\boldsymbol{J}^b, \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b$. 我们用 $\boldsymbol{E}^a, \boldsymbol{H}^a$ 表示源 a 产生的场，用 $\boldsymbol{E}^b, \boldsymbol{H}^b$ 表示源 b 产生的场，写出相应的场方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^a = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^a - \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^a,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}^a = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^a + \boldsymbol{J}^a \tag{1.4.1a}$$

和

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^b = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}^b = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^b + \boldsymbol{J}^b \tag{1.4.1b}$$

以 $\boldsymbol{E}^b$ 标乘 $\nabla\times\boldsymbol{H}^a$ 的方程，$\boldsymbol{H}^a$ 标乘 $\nabla\times\boldsymbol{E}^b$ 的方程，所得的两式相减后为

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a) = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^b\cdot\boldsymbol{E}^a + \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{H}^b + \boldsymbol{E}^b\cdot\boldsymbol{J}^a + \boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b.$$

再将上式的 a 和 b 互换得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b) = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{E}^b + \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^b\cdot\boldsymbol{H}^a + \boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b + \boldsymbol{H}^b\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^a.$$

上面得到的后一式减去前一式有

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a) = \boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b + \boldsymbol{H}^b\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^a - \boldsymbol{E}^b\cdot\boldsymbol{J}^a - \boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b. \tag{1.4.2}$$

如果在区域 V 内无源，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=0$，(1.4.2)式化为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a) = 0,$$

此式在 V 上积分，应用散度定理化为面积分后得

$$\oiint_S(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0. \tag{1.4.3}$$

(1.4.3)式称为 Lorentz 引理，或 Lorentz 互易定理.

如果区域 V 内有源，对(1.4.2)式积分后得

$$-\oiint_S(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iiint_V(\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b - \boldsymbol{E}^b\cdot\boldsymbol{J}^a + \boldsymbol{H}^b\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^a)\mathrm{d}V. \tag{1.4.4}$$

在实际问题中源总是局限于有限空间的，在第四章中我们会证明局限于有限空间区域的源在无穷远处的电场与磁场之间的关系为

$$E_\theta = ZH_\phi,\qquad E_\phi = -ZH_\theta, \tag{1.4.5}$$

这里 $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$为介质空间波阻抗. 如果将(1.4.4)式的积分区域扩展至全空间，面 S 变成半径为无穷大的球面，利用(1.4.5)式可以证明(1.4.4)式左方 S 面上的积分为零，便得到互易定理

$$\iiint_V (\boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a \cdot \boldsymbol{J}_m^b)\mathrm{d}V = \iiint_V (\boldsymbol{E}^b \cdot \boldsymbol{J}^a - \boldsymbol{H}^b \cdot \boldsymbol{J}_m^a)\mathrm{d}V, \quad (1.4.6)$$

(1.4.6)式的积分区域 V 是全空间. 如果在有界区域的边界面上(1.4.4)式左方的面积分为零，例如被理想导体包围的闭合区域，那么互易定理(1.4.6)式也适用于这样的区域.

2. 反应概念及互易定理的简单应用[3,4]

现在我们来解释互易定理(1.4.6)式的物理意义. 首先我们注意积分中的量不是复共轭量，因此一般说来(1.4.6)式中的积分并不表示功率，Rumsey 将这两个积分称为反应(reaction)[10]. 例如，(1.4.6)式左方的积分是场 a 对于源 b 的反应，用符号表示为 $\langle a,b\rangle$：

$$\langle a,b\rangle = \iiint_V (\boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a \cdot \boldsymbol{J}_m^b)\mathrm{d}V; \quad (1.4.7)$$

而(1.4.6)式右方的积分是场 b 对于源 a 的反应，用符号 $\langle b,a\rangle$ 表示. 互易定理(1.4.6)式可以用反应表示为

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle. \quad (1.4.6a)$$

反应概念可以看作是场与源之间的响应的度量，通过下面的简单电路问题使我们对于反应概念的意义得到一些更具体的了解.

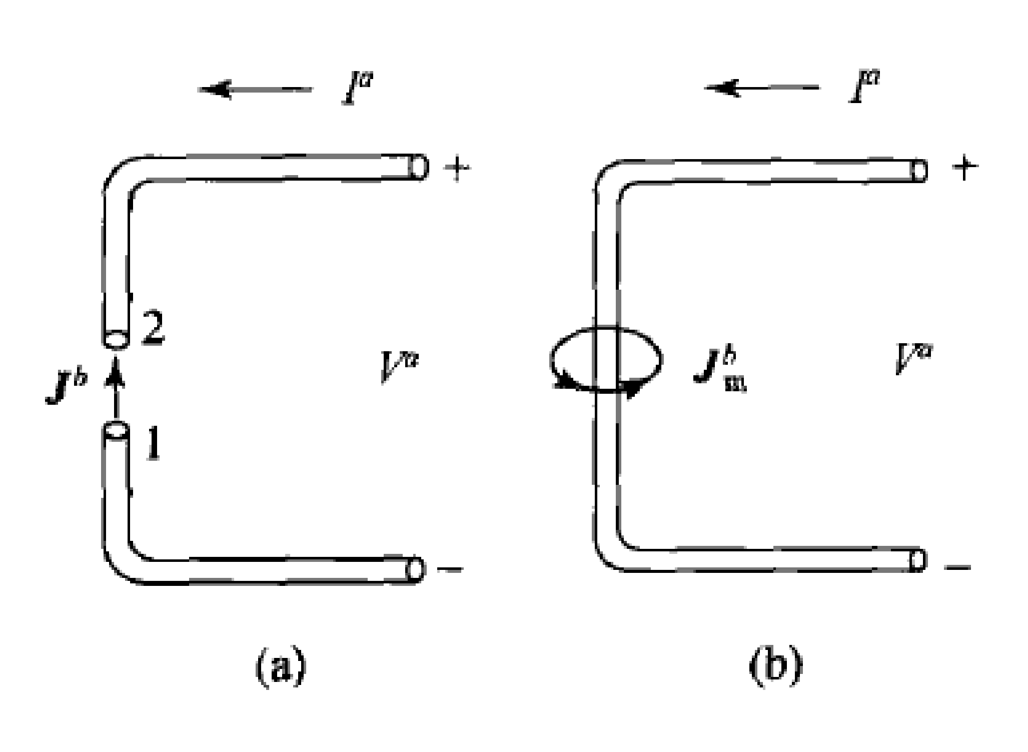


图 1.6 电流源(a)和磁流源(b)与开路电路之间的反应

图 1.6(a)示出一个给定的电流源 $\boldsymbol{J}^b$ 通过电路的开路端与场 a 之间的作用，V^a 和 I^a 分别是场 a 在电路开路端产生的电压和电流. 我们求出场 a 与源 b 的反应，得

$$\langle a,b\rangle = \iiint_V \boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{J}^b \mathrm{d}V = I^b\int_1^2 \boldsymbol{E}^a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -I^bV^a. \quad (1.4.8a)$$

图 1.6(b)所示是给定的磁流源 $\boldsymbol{J}_m^b$ 与场 a 通过电路开路端的相互作用，场 a 与磁流源之间的反应为

$$\langle a,b\rangle = \iiint_V -\boldsymbol{H}^a \cdot \boldsymbol{J}_m^b \mathrm{d}V = -I_m^b\oint \boldsymbol{H}^a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -V^bI^a, \quad (1.4.8b)$$

这里积分区域 V 是磁流环 $\boldsymbol{J}_m^b$ 占据的空间. 对于图示的磁流环方向和电路上的电流方向，在 Ampère 定律中略去位移电流，然后沿磁流环的流线积分，得

$$\oint \boldsymbol{H}^a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = - I^a;$$

同样,略去位移磁流后在磁流环的横截面上积分得

$$-I_{\mathrm{m}}^b = -\iint \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint \nabla \times \boldsymbol{E}^b \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{E}^b \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V^b.$$

这个关系式表明磁流环相当于电压源.如果令(1.4.8a)或(1.4.8b)式中的 I^b 或 V^b 等于1,得到下面的简单关系式:

$$\langle a,b\rangle = \begin{cases} -V^a & (\text{当 } b \text{ 为单位电流源}), \quad (1.4.9\text{a}) \\ -I^a & (\text{当 } b \text{ 为单位电压源}). \quad (1.4.9\text{b}) \end{cases}$$

所以外场 a 与图1.6所示的简单电路中的单位电流(电压)源 b 的反应 $\langle a,b\rangle$ 等于电路开端的电压(电流)的负值.

反应概念的引入使得互易定理的意义变得要直观些,给互易定理的应用带来一定的好处.在应用电磁学的实际问题中电磁互易定理有着相当广泛的应用,在这里我们先来看两个简单例子.

【例1】 线性四端网络阻抗矩阵元的对称关系.

考虑图1.7所示的四端网络,它的阻抗矩阵定义为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

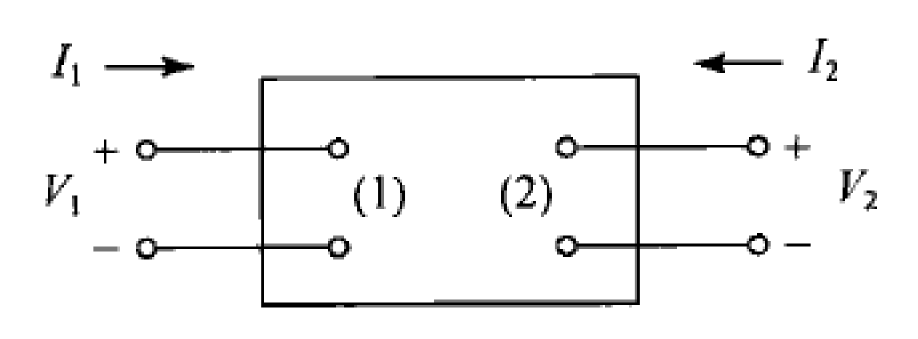


图1.7　四端网络

当网络由端口(2)的单位电流源激励时,代入上面的网络方程,由

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可求得 $Z_{12}=V_1$,也就是说矩阵元 Z_{12} 表示端口(2)加有单位电流源时在端口(1)产生的电压.类似地,当端口(1)加有单位电流源时由网络方程可得 $Z_{21}=V_2$,即 Z_{21} 表示端口(1)的单位电流源在端口(2)产生的电压.由(1.4.9a)和(1.4.9b)式,对于单位电流源我们有 $\langle 1,2\rangle=-V_1$ 和 $\langle 2,1\rangle=-V_2$,应用互易定理(1.4.6a)式便可证明

$$Z_{12} = Z_{21}. \quad (1.4.10)$$

因此,在线性电路问题中熟知的四端网络非对角阻抗矩阵元的对称性实际上是互易定理的具体体现.

下面再来看互易定理在场问题中应用的简单例子.

【例2】 理想导体表面的迫布面电流不产生场.

在§1.3中介绍场等效原理时我们回避了这个问题,现在回过头来看当我们从 Love 的场等效形式过渡到 Schelkunoff 的理想导体面加迫布面磁流的等

效形式时可以提出这样的疑问：当在 Love 等效形式的零场区域 V_1 中引入理想导体时，区域 V_2 中的场应当不会受到扰动，但在 Schelkunoff 的等效形式中原有的迫布面电流却不存在了，为什么 V_2 区域中的场仍可以保持不变？如果区域 V_1 和 V_2 的分界面是平面，例如 § 1.3 中讨论过的半空间中传播的平面波的例子，这个问题不难用镜像原理解决. 因为平行于导体平面的迫布面电流在导体平面上的镜像电流与源电流取向相反，所以迫布面电流与镜像电流在 $z>0$ 半空间中的合场为零，在等效问题中可以认为迫布面电流不存在. 用互易定理可以推广这个结论，我们可以证明，对于任意形状的导体面，面外的迫布面电流所产生的场同样也为零，这样就可以认为在图1.4(b)的等效问题中只存在着迫布面磁流.

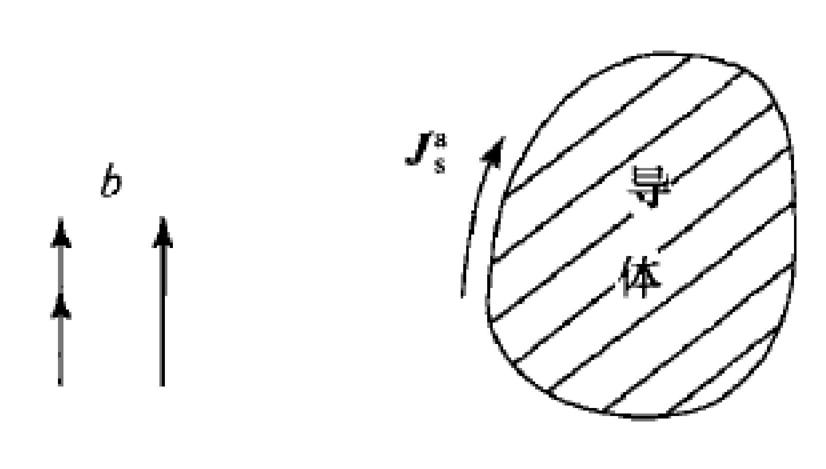


图 1.8 电流元和磁流元与孤立导体之间的反应

为证明这一点我们假定导体面外存在着迫布面电流，令它为源 a，如图 1.8 所示. 为测量源 a 的场需在 V_2 中的某一局部区域放置场探针(例如可以认为是偶极子). 设场探针上所加的外源(电流或磁流)为源 b，由于 b 源所产生的电场在导体表面的切线分量为零，所以有

$$\langle b,a\rangle = \iiint_V \boldsymbol{E}^b \cdot \boldsymbol{J}^a \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{E}^b \cdot \boldsymbol{J}_s^a \mathrm{d}S = 0,$$

再应用互易定理(1.4.6a)式就可证明

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle = 0,$$

这里 $\langle a,b\rangle$ 是迫布面电流 a 的场与源 b 的反应. 由于源 b 可以放置于 V_2 中的任何位置，而且电流(或磁流)方向可以任意取向，仅当区域 V_2 中的场 $\boldsymbol{E}^a$ 处处为零时才有可能使 $\langle a,b\rangle=0$. 这样，我们就证明了任意形状的理想导体面外的任意迫布面电流分布将不会在导体面以外的区域中产生场.

应当强调指出的是互易定理与介质的性质有关，只是在一定类型的介质中才有互易关系(1.4.6)式，而在一些特殊介质中互易关系(1.4.6)式不再成立，这样的介质称为不可逆介质. 不可逆介质的例子将会在第二章中讲到.

3. 以反应作为约束导出的变分公式[11,4]

电磁学问题的求解通常要求获得所关心区域内的电磁场分布. 也有一些实际的电磁学问题，更关心电磁系统或结构的某些特征量，例如电容器的电容，传输线的特性阻抗，谐振腔的谐振频率等. 在这些问题中未知的电磁场分布函数是置于一定边界条件的微分方程的解，而所关心的特征量(例如谐振腔的谐振频率)则是本征值. 如果所关心的是本征值，而并不须知微分方程的精确解，变分法就是有效的近似求解方法.

对于微分方程的边值问题或本征值问题的求解，变分法是这样的一种近似方法，它构造出一个取极值的泛函 J，将微分方程转化为变分方程 $\delta J=0$. 该泛函 J 通常由待求解函数的积分表示，使该泛函取极值的必要条件通常为带有边界条件的微分方程(称为该变分方程的 Euler 方程)，Euler 方程就是原问题的微分方程，而待求的本征值由泛函确定. 由于泛函取极值，当在泛函中代入与精确的待求函数之差为一级小量(称为一级变分)的试探函数时，由泛函式可获得误差在高级小量范围内的本征值. 这样，运用变分法可由不是精确场解的近似解获得特征量的具有高一级精度的近似值，对难于求出精确场解的问题，变分法很有实用价值. 泛函对于自变量函数的一级变分为稳定(stationary)，即取极值，的特性称为驻留性.

在分析力学中常根据最小作用量原理(Hamilton 原理)构造变分公式. 在电磁学中则依据能量原理构造变分公式. Thomson 定理(导体系上电荷的平衡分布使系统的静电能最小)是最先用来建立电磁学变分公式的能量原理. 依据储存的磁能与电能之差与电抗矩阵的关系，量子物理学家 J. Schwinger 于 20 世纪 40 年代导出了波导中多种不连续性的等效电路参量的变分表示式，攻克了这个难于用场解解决的困难问题. 虽然由能量原理往往可保证所导出的电磁学特征量的泛函表示式具有驻留性，但并不能给出普遍的证明，仍需对每一具体问题证明所得泛函具有驻留性.

以反应作为约束条件也可以导出某些电磁学特征量的稳定表示式(stationary formulae)，由它们可确定相应电磁学特征量的极大或极小值. 反应的这种功能表明它是电磁学的一个基本量，具有与能量相似的重要意义. 下面以谐振腔的谐振波数问题为例，说明反应在导出变分公式中的作用，及变分法的应用过程.

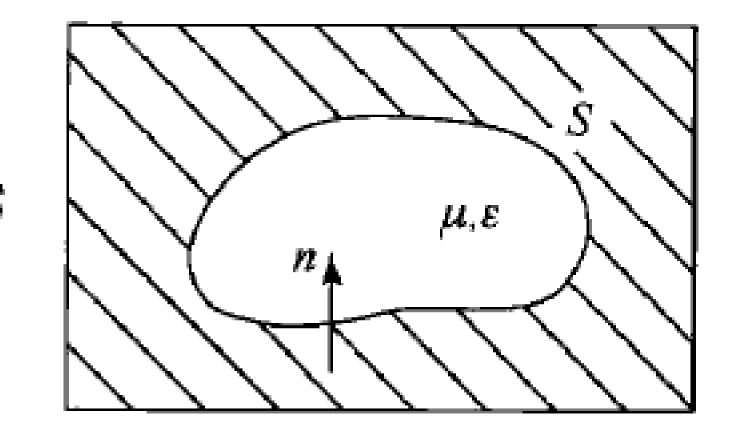


图 1.9 任意形状空腔谐振器

我们来看图 1.9 所示的以任意形状闭合曲面 S 为边界的空腔谐振器. 由于 S 面的形状是任意的，求出谐振腔内电磁场分布的精确解通常是不可能的. 但如果谐振腔的谐振波数是主要感兴趣的物理量，我们可以回避求解电磁场分布这个困难的问题，仅仅使用电磁场分布的近似解并应用变分原理就可以得出谐振波数的较为精确的解答. 我们先来导出谐振波数的变分表示式，然后证明以反应作为对于试探解的约束条件导出的表示式确实具有驻留性.

设谐振腔内的电磁场分布的试探函数 $\boldsymbol{E}^a$ 和 $\boldsymbol{H}^a$ 是由谐振腔内的电流源 $\boldsymbol{J}^a$ 产生的，由 Maxwell 方程式有

$$\boldsymbol{J}^a=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^a+\nabla\times\boldsymbol{H}^a=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}[-k^2\boldsymbol{E}^a+\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}^a]. \quad (1.4.11)$$

如此假定的试探电场分布 $\boldsymbol{E}^a$ 显然不是谐振腔本征模式的精确电场分布,它在腔壁面上的切线分量不为零,故在腔壁面上会产生面磁流

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{ms}}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^a, \tag{1.4.12}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是腔导体壁的单位外法线,如图 1.9 所示. 作出试探场的自反应

$$\begin{aligned}\langle a,a\rangle &= \iiint_V \boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^a\mathrm{d}V-\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{ms}}\mathrm{d}S\\ &=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\Big\{-k^2\iiint_V |\boldsymbol{E}^a|^2\mathrm{d}V+\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)^2\mathrm{d}V\\ &\quad-2\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{n}\cdot[(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{E}^a]\mathrm{d}S\Big\},\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

这里积分区域为腔壁面 S 包围的体积 V,在得到后一个等式时除代入了(1.4.11)和(1.4.12)式外还用到了下面两个矢量等式:

$$\boldsymbol{E}^a\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)=(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)^2+\nabla\cdot[(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{E}^a],$$

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^a)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)=-\boldsymbol{n}\cdot[(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{E}^a].$$

另一方面,如果用 $\boldsymbol{E}^c$ 表示谐振腔内的本征模式的精确电场,精确场的自反应 $\langle c,c\rangle$ 应当为零. 这是因为对应于精确电场 $\boldsymbol{E}^c$ 的腔内电流分布为零,$\boldsymbol{J}^c=0$;同时由于 $\boldsymbol{E}^c$ 满足腔壁面上的边界条件,在腔壁面上相应的面磁流也应为零.

导出电磁场的特征量(这里是本征值,即谐振波数)的变分表示式可以根据不同的原则,用反应作为约束条件的方法是相当简捷而且具有清晰物理概念的方法,这只需简单地要求试探场分布的自反应与精确场分布的自反应相同,即要求

$$\langle a,a\rangle=\langle c,c\rangle=0. \tag{1.1.14}$$

让(1.4.13)式给出的 $\langle a,a\rangle$ 满足条件(1.4.14)式便导致谐振波数 k^2 的下列变分表示式

$$k^2=\frac{\displaystyle\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)^2\mathrm{d}V-2\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{n}\cdot[(\nabla\times\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{E}^a]\mathrm{d}S}{\displaystyle\iiint_V\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{E}^a\mathrm{d}V}. \tag{1.4.15}$$

在(1.4.15)式中谐振波数 k 的平方值取决于试探场分布 $\boldsymbol{E}^a$ 的函数形式,这种依赖于自变量函数(在这里为 $\boldsymbol{E}^a$)的量称为泛函. 由变分原理导出的特征量的变分表示式使得泛函(在这里为 k^2)取极值,也就是说对于自变函数的变化泛函值是稳定的,这种性质称为驻留性,因此较之场分布试探函数的粗略近似,特征量的值达到了更好的近似.

为证明(1.4.15)式具有所希望的驻留性,我们设

$$\boldsymbol{E}^a=\boldsymbol{E}^c+\Delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^c+p\boldsymbol{e}, \tag{1.4.16}$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是具有和 $\boldsymbol{E}^a$ 相同的可微性的一个固定函数,p 为小参量. 通过引入 p 可

将泛函(1.4.15)式表示为 p 的普通函数

$$k^2 = N(p)/D(p),$$

这里 $N(p)$表示(1.4.15)式的分子，$D(p)$表示分母，这样求泛函的极值问题就化成了求一个普通函数 $f(p)$的极值问题. 按照对于普通函数求微商的法则我们有

$$\left.\frac{\partial k^2}{\partial p}\right|_{p=0} = \frac{D(0)N'(0) - N(0)D'(0)}{D^2(0)} = \frac{N'(0) - k^2 D'(0)}{D(0)}, \quad (1.4.17)$$

后一等式是因为 $N(0)/D(0) = k^2$，这里的 k^2 是精确值. 将(1.4.16)式代入 $N(p)$可求出

$$N'(0) = 2\iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{E}^c) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{e}) \mathrm{d}V - 2\oiint_S \boldsymbol{n} \cdot [(\nabla \times \boldsymbol{E}^c) \times \boldsymbol{e}] \mathrm{d}S$$
$$- 2\oiint_S \boldsymbol{n} \cdot [(\nabla \times \boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{E}^c] \mathrm{d}S.$$

由于 $\boldsymbol{E}^c$ 满足在腔壁面上切线分量为零的条件，上式中的第二个面积分为零，再利用矢量公式

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}^c) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{e}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{e} \times \nabla \times \boldsymbol{E}^c) + \boldsymbol{e} \cdot (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^c)$$

并考虑到在谐振腔体内精确解 $\boldsymbol{E}^c$ 所满足的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^c = k^2 \boldsymbol{E}^c,$$

最后得

$$N'(0) = 2k^2 \iiint_V \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{E}^c \mathrm{d}V = k^2 D'(0),$$

这里和上式中的 k 亦均为精确值. 上式代入(1.4.17)式得

$$\left.\frac{\partial k^2}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \quad (1.4.18)$$

这就证明了变分表示式(1.4.15)的驻留性，也就是说通过变分公式(1.4.15)使用较为粗略的场分布试探函数 $\boldsymbol{E}^a$ 可得出较为精确的谐振波数 k 的值. 下面用一个例子来说明.

【例】 用变分法求圆柱谐振腔的谐振波数.

直圆柱谐振腔的基模为 E_{010} 模，它的电磁场只有 E_z 和 H_ϕ 两个非零分量：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_z E_0 \mathrm{J}_0(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\phi \mathrm{j} \frac{E_0}{Z_0} \mathrm{J}_1(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

谐振波数

$$k = \frac{\nu_{01}}{a} = \frac{2.405}{a},$$

这里 a 是腔的半径，J_0 和 J_1 分别为零阶和一阶 Bessel 函数，$\nu_{01} = 2.405$ 是 J_0 的

第一个根. 谐振波数的精确值可表示为

$$k^2a^2 = 5.784.$$

当用变分法求谐振波数的近似值时可以将试探电场简单地设作

$$\boldsymbol{E}^a = \boldsymbol{a}_z \cos\frac{\pi}{2a}\rho,$$

所设的试探场 $\boldsymbol{E}^a$ 满足 $\rho=a$ 柱面上的边界条件,但不满足波动方程. 求出

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^a = \boldsymbol{a}_\phi \frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi}{2a}\rho,$$

将 $\boldsymbol{E}^a$,$\nabla\times\boldsymbol{E}^a$ 代入(1.4.15)式,谐振波数的近似值即可求出为

$$k^2a^2 = \frac{a^2\int_0^l \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi\rho}{2a}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho}{\int_0^l\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2a}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho} = 5.830,$$

这里 l 为谐振腔的长度. 可以看出使用如此粗略的试探场所得到的谐振波数近似值已相当接近于精确值. 当在试探函数中引入多个变量而应用 Rayleigh-Ritz 程序时还可得到更精确的 k^2a^2 值[11].

4. 补偿定理[12]

补偿定理可由互易定理导出,用它可解决传播路径上的障碍物对电磁波传播的影响,在无线通信传播链路的规划和设计中会遇到这样的问题. 发射源用电流 I^a 和磁流 I_m^a 表示,设它们局限于以面 S_a 为边界的体积 V_a 中. 接收设备由电流 I^b 和磁流 I_m^b 表示,它们也局限于以 S_b 为边界的小体积 V_b 中. 设传播路径上存在障碍物,以 P 表示,但它局限于以 S_P 为边界的体积 V_P 内. 现在用一个大的几何面 S 包围接收设备和障碍物,S 面内的体积为 V_s,如图 1.10 所示.

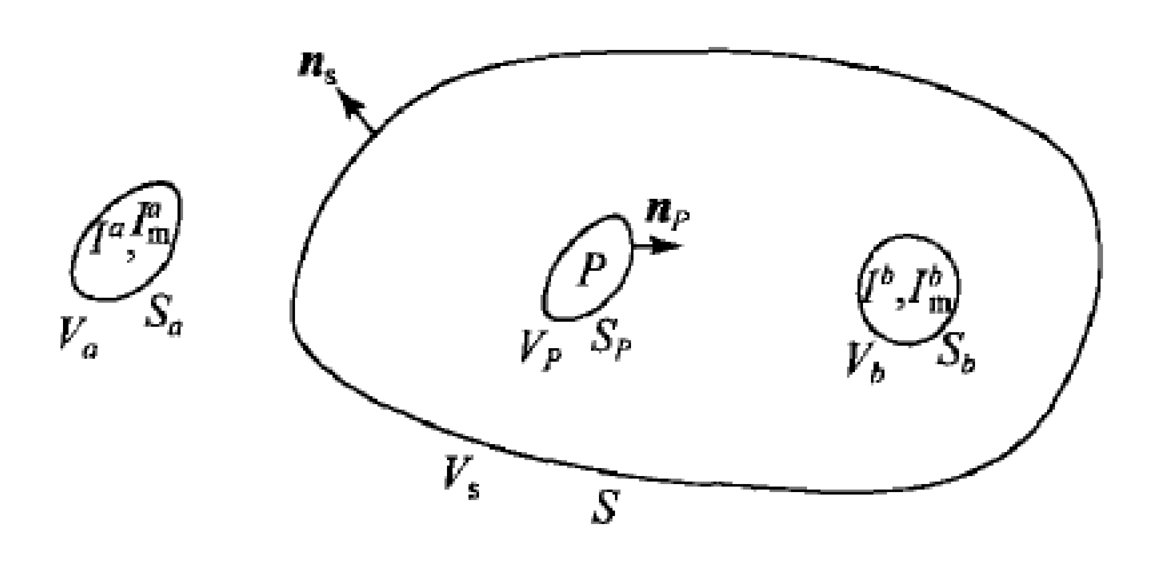


图 1.10　补偿定理的导出

由互易定理(1.4.4)式,当障碍物不存在时,对于区域 V_s 可以写出

$$\oint\!\!\oint_S (\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b - \boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{V_s}(-\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b + \boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_m^b)\mathrm{d}V, \tag{1.4.19}$$

式中 $\boldsymbol{E}^a,\boldsymbol{H}^a$ 及 $\boldsymbol{E}^b,\boldsymbol{H}^b$ 分别为源 a 和源 b 产生的场. 当障碍物存在时会对接收点的场产生扰动,使其变为 $\boldsymbol{E}_1^a$ 和 $\boldsymbol{H}_1^a$. 有障碍物和无障碍物时接收点场强之差 $\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a$ 和 $\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a$ 可视为障碍区域表面 S_P 外的等效面源产生的场. 对于 S 和 S_P 之间的体积,由互易定理(1.4.4)式有

$$\oint\!\!\!\oint_S[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{H}^b-\boldsymbol{E}^b\times(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\oint\!\!\!\oint_{S_P}[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{H}^b-\boldsymbol{E}^b\times(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\iiint_{V_s-V_P}[-(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\cdot\boldsymbol{J}^b+(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b]\mathrm{d}V. \qquad (1.4.20)$$

对于 S_P 上等效源的场$(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)$和$(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)$,源 I^a 和 I_{m}^a 已不存在,S 面包围了所有的源,因此可将 S 面推至无穷远处,而有

$$\oint\!\!\!\oint_S[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\times\boldsymbol{H}^b-\boldsymbol{E}^b\times(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0. \qquad (1.4.21)$$

对于场 $\boldsymbol{E}^a,\boldsymbol{H}^a$ 和 $\boldsymbol{E}^b,\boldsymbol{H}^b$,$S_P$ 面内无源,也有

$$\oint\!\!\!\oint_{S_P}(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^b-\boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}^a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0. \qquad (1.4.22)$$

由(1.4.20)式,考虑到(1.4.21)和(1.4.22)式,便得到补偿定理:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_P}(\boldsymbol{E}_1^a\times\boldsymbol{H}^b-\boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}_1^a)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\iiint_{V_s-V_P}[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\cdot\boldsymbol{J}^b-(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b]\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_{V_b}[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\cdot\boldsymbol{J}^b-(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b]\mathrm{d}V. \qquad (1.4.23)$$

对于已知的接收设备,可以设定模型使 $\boldsymbol{J}^b$ 和 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^b$ 变为已知,从而可以求出 S_P 上的场 $\boldsymbol{E}^b$ 和 $\boldsymbol{H}^b$. 无障碍物时接收点的场 $\boldsymbol{E}^a,\boldsymbol{H}^a$ 为已知,便可通过求解积分方程(1.4.23)式获得障碍物存在时接收点的场 $\boldsymbol{E}_1^a,\boldsymbol{H}_1^a$.

由于

$$(\boldsymbol{E}_1^a\times\boldsymbol{H}^b)\cdot\boldsymbol{n}_P=\boldsymbol{H}^b\cdot(\boldsymbol{n}_P\times\boldsymbol{E}_1^a),\quad(\boldsymbol{E}^b\times\boldsymbol{H}_1^a)\cdot\boldsymbol{n}_P=\boldsymbol{H}_1^a\cdot(\boldsymbol{n}_P\times\boldsymbol{E}^b),$$

(1.4.23)式也可写成另一形式:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_P}[\boldsymbol{H}^b\cdot(\boldsymbol{n}_P\times\boldsymbol{E}_1^a)-\boldsymbol{H}_1^a\cdot(\boldsymbol{n}_P\times\boldsymbol{E}^b)]\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_{V_b}[(\boldsymbol{E}_1^a-\boldsymbol{E}^a)\cdot\boldsymbol{J}^b-(\boldsymbol{H}_1^a-\boldsymbol{H}^a)\cdot\boldsymbol{J}_m^b]\mathrm{d}V. \qquad (1.4.24)$$

补偿定理原是个网络定理,Mittra[12] 利用互易定理和场等效原理导出了它的矢量场形式. 补偿定理的网络形式,以及互易定理应用于电磁波传播问题的更

多例子,可参考专著[13].关于补偿定理在电磁波传播问题中的应用,文献[14]给出了很多实例.

电磁场的基本定理,除以上已介绍的以外还有其他的一些,其中的 Babinet 原理我们将在第五章中介绍,综述论文[15]对电磁场的定理有全面论述,可以参考.

参考文献

[1] Elliott R S. Electromagnetics: history, theory, and applications. IEEE Press, 1993: §5.1.

[2] Stratton J A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill, 1941: §8.14, §8.15. [中译本:电磁理论.何国瑜译.北京:北京航空学院出版社,1986.]

[3] Harrington R F. Time-harmonic electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1961: ch.3.[中译本:正弦电磁场.孟侃译.上海:上海科技出版社,1964.]

[4] Kong J A. Electromagnetic wave theory. John Wiley & Sons, 1986: ch.5.

[5] Jackson J D. Classical electrodynamics. 2nd ed.. John Wiley & Sons, 1975: §6.10.[中译本:经典电动力学.朱培豫译.北京:人民教育出版社,1978.]

[6] Collin R E. Foundations for microwave engineering. McGraw-Hill, 1966: §2.5.[中译本:微波工程基础.北京:人民邮电出版社,1981.]

[7] Stratton J A. Electromagneti theory. McGraw-Hill, 1941: §9.2.[中译本,见[2]]

[8] Collin R E. Field theory of guided waves. McGraw-Hill, 1960: ch.1.[中译本:导波场论.侯元庆译.上海:上海科技出版社,1966.]

[9] Van Bladel J. Electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1964: §7.1, §7.5.

[10] Rumsey V H. Reaction concept in electromagnetic theory. Phys. Rev., 1954, 94(6): 1483—1491.

[11] Harrington R F. Time-harmonic electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1961: ch.7.[中译本,见[3]]

[12] Mittra R. A vector form of compensation theorem and its application to boundary value problems. Appl. Sci. Res. B., 1964, 11: 26—42.

[13] Momteath G D. Application of electromagnetic reciprocity principle. Pergamon Press, 1973: ch.5, ch.6.

[14] Maclean T S M, Wu Z. Radiowave propagation over ground. Chapman & Hall, 1993.

[15] Popović B D. Electromagnetic field theorems. IRE Proc., 1981, Vol.128, Pt. A, No.1: 47—63.

第二章　无界媒质中的平面电磁波

§2.1　电介质和导体的频率色散特性

1. 电介质的色散和损耗[1]

尽管严格的介质色散理论已不属于经典力学的范畴而要用到量子理论，但建立在原子结构的经典模型和经典力学定律基础上的经典电子论①关于电介质的色散和损耗的理论仍与实验结果良好地符合，因此经典的介质色散和损耗的理论实际上是经典电子论中目前尚有实际价值的主要部分，在本节中我们对此问题作一扼要的介绍.

(1) 极化的基本机构

当电介质的原子或分子置于外电场中，电子及原子核在电场力作用下产生向相反方向的位移，但由于核的质量要重得多，主要是质量轻的电子产生位移，电子与核系统的质量中心可以认为实际上不变. 由电子位移所产生的感应极化称为电子极化. 由于电子的质量轻，谐振频率高，电子极化是影响光频以上频率的介质高频特性的仅有物理机构. 若介质是离子晶体，例如 NaCl，在外电场作用下不仅核与电子产生相对位移，而且 Na^+ 和 Cl^- 离子间也会产生相对位移，由离子间相对位移引起的感应极化称为离子极化. 由于核的质量为电子质量的 10^4 倍以上，离子极化对于介质性质的影响通常在红外波段，对于少数介质可达到 10^{14} Hz 的频率.

有许多分子，例如 HCl 和 H_2O，具有固有的电偶极矩，称为极性分子. 气态或液态的极性分子可以自由旋转，在外电场中它们的电偶极矩倾向于平行外电场方向排列，从而表现出宏观的电偶极矩. 固有电偶极矩取向排列对于介质特性的影响主要是在低频范围内. 下面分别予以讨论.

(2) 电子及离子极化. 共振吸收和反常色散

为简单起见我们来讨论单原子分子中的一个电子的电子极化过程. 不运动

---

① 经典电子论的主要结果已汇集于 H. A. Lorentz 的经典著作 The Theory of Electrons (1915) 中，可参考该书的 Dover 1952 年重印本. 在 A. H. Матвеев 著 Электродинамика и Теория Относительности (ИЗД. Высшая Школа，1964 年) 一书中也含有电子论的专门的一篇，该书已有英译本. 也可参考[17]，§2.3.

的原子核对于电子的库仑吸力相当于弹簧对于所链接的小球的弹性恢复力,在这个力作用下电子作谐振动. 电子在谐振动过程中由于辐射而损失能量,相当于电子的谐振运动受到阻尼,结果电子的运动类似于似弹性谐振子. 电子在外场作用下运动的这种模型称为 Drude-Lorentz 模型. 这样,在外加单色波作用下电子的运动方程可写为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\gamma\dot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2\boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}, \tag{2.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为运动电子的矢径,圆点表示对时间求微商;γ 表示阻尼常数;$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m0}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 是作用于分子的 Lorentz 有效场. 运动方程(2.1.1)的解为

$$\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}, \tag{2.1.2}$$

e 为电子电荷的代数值,m 为电子质量. 为简单起见设介质的分子为单原子分子而且每个原子只含有一个电子,由(2.1.2)式可得分子的感生电偶极矩

$$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r} = \varepsilon_0\,\alpha_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}, \tag{2.1.3}$$

式中

$$\alpha_{\mathrm{e}} = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega} \tag{2.1.4}$$

称为分子极化率. α_{e} 为复数的原因是运动方程(2.1.1)中含有阻尼项. (2.1.4)式给出的分子极化率与外加电磁波频率 ω 的关系可用来解释在交变电磁场作用下电介质中发生的共振吸收和反常色散现象.

我们来求出电介质的宏观极化率. 如果假设单位体积介质中只有 N 个同样的单原子分子,每个分子中只有一个电子①,则介质的宏观电极化强度可以简单地写作

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\varepsilon_0\,\alpha_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}. \tag{2.1.5}$$

如果单位体积介质中有着若干种不同的原子组成,而且每个原子中有若干个电子,那么可以用类似的方式对于每一个电子对极化的贡献求和得出宏观极化强度. (2.1.5)式中 Lorentz 有效场 $\boldsymbol{E}_m$ 与介质中的宏观平均场 $\boldsymbol{E}$ 的一般关系为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{E} + \nu\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}, \tag{2.1.6}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为介质的宏观电极化强度,而因子 ν 的值与介质分子的排列有关. 对于具有高度对称性的晶体(例如立方晶系)以及完全无规排列的非晶体介质,$\nu=1/3$. 另一方面,介质的宏观电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 可用介质中的宏观平均场强 $\boldsymbol{E}$ 和宏观介质极化率 χ_{e} 表示为

① 即使是多电子原子,也只可能有一个电子通过谐振动与特定频率的外场发生互作用. 因此,这个假设很合理.

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}. \tag{2.1.7}$$

(2.1.7)式代入(2.1.6)式得

$$\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{E} + \nu\chi_e \boldsymbol{E} = (1 + \nu\chi_e)\boldsymbol{E}, \tag{2.1.8}$$

再将(2.1.8)式和(2.1.4)式代入(2.1.5)式得

$$\boldsymbol{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}(1 + \nu\chi_e)\boldsymbol{E},$$

此式与(2.1.7)式比较便可求出

$$\frac{\chi_e}{1 + \nu\chi_e} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}. \tag{2.1.9}$$

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 定义为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \kappa_e \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{2.1.10}$$

这里

$$\kappa_e = 1 + \chi_e = \varepsilon/\varepsilon_0 \tag{2.1.11}$$

称为相对介电常数.因此,(2.1.9)式可以改写作

$$\frac{\kappa_e - 1}{1 + \nu(\kappa_e - 1)} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}, \tag{2.1.9a}$$

其中

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}. \tag{2.1.12}$$

在(2.1.9a)式中取 $\nu = 1/3$ 得

$$\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} = \frac{1}{3} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}, \tag{2.1.13}$$

此式称为 Clausius-Mossotti 公式.

若在(2.1.9a)式中取 $\nu = 0$ 得

$$\kappa_e - 1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{j}\gamma\omega}, \tag{2.1.9b}$$

实际上对于 $\kappa_e \approx 1$ 的介质(例如气体)由(2.1.9a)式也可导出(2.1.9b)式.将 κ_e 的实部和虚部分离,令 $\kappa_e = \kappa' - \mathrm{j}\kappa''$,由(2.1.9b)式可得出 κ' 和 κ'' 与频率的下列关系:

$$\kappa' - 1 = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \tag{2.1.14a}$$

$$\kappa'' = \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \tag{2.1.14b}$$

似弹性谐振子的谐振频率 $f_0 = \omega_0/2\pi$ 可以由原子常数求出,典型的值为 $f_0 = 10^{14}—10^{16}/\mathrm{s}$,在可见光至紫外频段内,衰减常数 γ 值可根据振动电子的辐射求

出,结果表明条件 $\gamma/\omega_0 \ll 1$ 在高达 X 射线的频率仍能成立. 在共振频率附近, $\omega^2-\omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega-\omega_0)$,表示式(2.1.14a)和(2.1.14b)可以简化,相应的 $\kappa'-1$ 和 κ'' 作为 ω 的函数关系示于图 2.1.

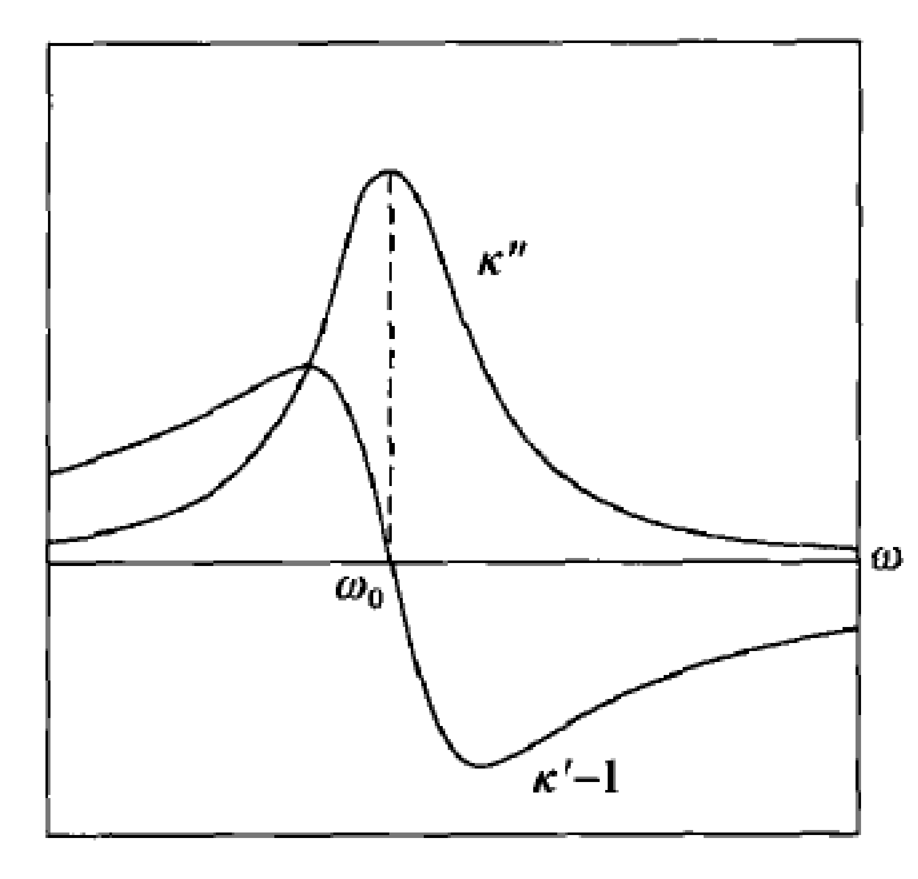


图 2.1 共振频率附近的色散曲线

电磁波在介质中传播时的色散特性是由 κ' 与频率的关系确定的,在 $\omega=\omega_0$ 附近的一段曲线表明,随着频率的增加 κ' 减小,波传播的相速增加,这样的色散关系称为反常色散. 另一方面,在共振频率,κ'' 呈现峰值,这时发生介质对于电磁波的共振吸收现象,作谐振动的电子从外加电磁波中吸收的能量达到极大值,转变为辐射能. 由图 2.1 可见,κ'' 曲线在 ω_0 两侧是对称的,这种形状的吸收曲线称为 Lorentz 型曲线.

对于离子极化可作完全类似的讨论,但离子谐振动的频率远低于电子的谐振动频率,由离子极化引起的共振吸收频率落在红外波段内,少数物质可达到 10^{14} Hz.

实际的电介质的组成是复杂的,而且通常具有电子极化和离子极化两种机构,相应地表示宏观电极化强度的(2.1.5)式需改为对于单位体积中所有分子的各种极化的贡献求和,因此组成复杂的介质通常具有多个共振吸收频率. 为此需要从(2.1.13)式解出 κ_e 的显式

$$\kappa_e = 1 + \frac{N_i e^2}{m_i \varepsilon_0 (\omega_i^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\gamma_i)}. \tag{2.1.15}$$

式中 $\omega_i^2=\omega_{0i}^2-N_ie^2/3\varepsilon_0 m_i$. ω_{0i} 为第 i 个电子或离子的谐振动频率,N_i,m_i 和 γ_i 分别为第 i 个谐振频率的相应量. 然后,对所有谐振频率求和,得

$$\kappa_e = 1 + \sum_i \frac{N_i e^2}{m_i \varepsilon_0 (\omega_i^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\gamma_i)}. \tag{2.1.16}$$

对于低损耗的介质材料,例如光纤的主要构成物熔凝石英,可以将(2.1.16)式中的 γ_i 略去,然后再将 ω_i 和 ω 换成波长 λ_i 和 λ,得

$$\kappa_e - 1 = n^2 - 1 = \sum_i B_i \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \tag{2.1.17}$$

这里 n 为光学折射率,$B_i=N_ie^2/m_i\varepsilon_0\omega_i^2$,求和通常只取 3 项甚至 2 项,此式称为 Sellmeier 方程. 由实验测量数据确定常数 B_i 后便可由(2.1.17)式计算介质的色散曲线.

(3) 偶极子极化. 介电损耗

极性分子的固有电偶极矩在外电场作用下取向排列形成宏观电偶极矩的过

程，其特征与上面所讨论的感应极化过程不同. 为简单起见，我们仍然假定单位体积中的所有分子的固有电偶极矩全相同，为 $\boldsymbol{p}_0$，我们先来讨论在静态外加电场作用下这些处于热运动无规分布的固有电偶极矩的取向排列问题. 偶极矩 $\boldsymbol{p}_0$ 在外电场 $\boldsymbol{E}_m$ 中的势能为

$$W = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}_m = -p_0 E_m \cos\theta,$$

这里 θ 是电偶极矩与外电场之间的夹角. 作热运动的偶极子的取向遵从统计力学的分布律

$$\mathrm{e}^{-W/kT},$$

这里 k 是 Boltzmann 常数，T 是绝对温度. 对于宏观电极化有效的是偶极矩 p_0 沿外电场方向的分量 $p_0 \cos\theta$，其统计平均值为

$$\langle p_0 \cos\theta \rangle = \frac{\int_0^\pi p_0 \cos\theta \mathrm{e}^{p_0 E_m \cos\theta/kT} \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \mathrm{e}^{p_0 E_m \cos\theta/kT} \sin\theta \mathrm{d}\theta} = p_0 \left[\coth y - \frac{1}{y}\right], \quad (2.1.18)$$

其中

$$y = \frac{p_0 E_m}{kT}. \quad (2.1.19)$$

(2.1.18)式称为 Langevin 公式，其右侧方括号中的函数称为 Langevin 函数. 对于绝大多数介质当温度高于 250 K 时在直到介质击穿的很宽的外加电场强度范围内条件 $y \ll 1$ 均满足，将 $\coth y$ 展开为 y 的幂级数，只取前两项就可以得到很精确的近似. 与(2.1.3)式类似，定义 α_0 为分子的取向极化率：

$$\langle \boldsymbol{p}_0 \rangle = \varepsilon_0 \alpha_0 \boldsymbol{E}_m, \quad (2.1.20)$$

将(2.1.18)式的近似式代入上式可求得

$$\alpha_0 = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 kT}, \quad (2.1.21)$$

此式给出了在静态场中极化分子的取向极化率.

当外加电场撤消后偶极子从取向分布恢复到无规的热平衡分布需要经过一定的时间，这个过程称为介质弛豫，这段时间 τ 称为弛豫时间. 弛豫时间的倒数称为弛豫频率，它的典型数量级是 $1/\tau = 10^9 — 10^{11}$/s. 当外加电场的频率远低于弛豫频率时，极化分子的取向过程与在静态场中相似，(2.1.21)式仍然适用. 如果外加电场的频率远高于弛豫频率，由于弛豫时间过长，偶极子的取向过程不能响应电场的快速变化，取向极化率从(2.1.21)式给出的值迅速下跌，这就是水的相对介电常数从静态值 81 下降到光频值 1.8 的原因. 当外加电场频率与弛豫频率接近时偶极子的取向过程在外电场交变的每一周期内均需从外电场吸取能量，这是在微波频率以及更低频率下电磁波在介质中发生损耗的主要机构，称为介电损耗.

考虑到介质弛豫，Debye 导出极性分子在交变电场中的取向分子极化率为

$$\alpha_d = \frac{\alpha_0}{1+j\omega\tau}. \tag{2.1.22}$$

对于极性分子的取向极化，当略去作用于分子的有效场与介质中的宏观平均场的差别时，由定义有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_d)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\kappa_d\boldsymbol{E}, \tag{2.1.10a}$$

这里 χ_d 和 κ_d 分别为介质取向极化的宏观极化率和相对介电常数. 在单位体积中的 N 个分子电偶极矩全相同的简化假定下，由(2.1.22)式容易求出 χ_d 和 κ_d. 由于弛豫过程 κ_d 为复数，将 κ_d 的实部和虚部分离，令

$$\kappa_d = \kappa' - j\kappa'' \tag{2.1.23}$$

可得

$$\kappa' - 1 = \frac{\kappa_0 - 1}{1+(\omega\tau)^2}, \quad \kappa'' = \frac{(\kappa_0-1)\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}, \tag{2.1.24}$$

其中

$$\kappa_0 = 1 + N\alpha_0 = 1 + \frac{Np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \tag{2.1.25}$$

为 κ_d 的静态值. (2.1.24)式称为 Debye 公式. 典型的 $\kappa'-1$，κ'' 与 ω 的函数关系示于图 2.2. 由图示曲线可看出取向极化的色散和吸收特性与感应极化有着很明显的区别，取向极化的色散完全是反常的，不存在正常色散区，但吸收曲线要平缓得多，在弛豫频率呈现不明显的吸收峰.

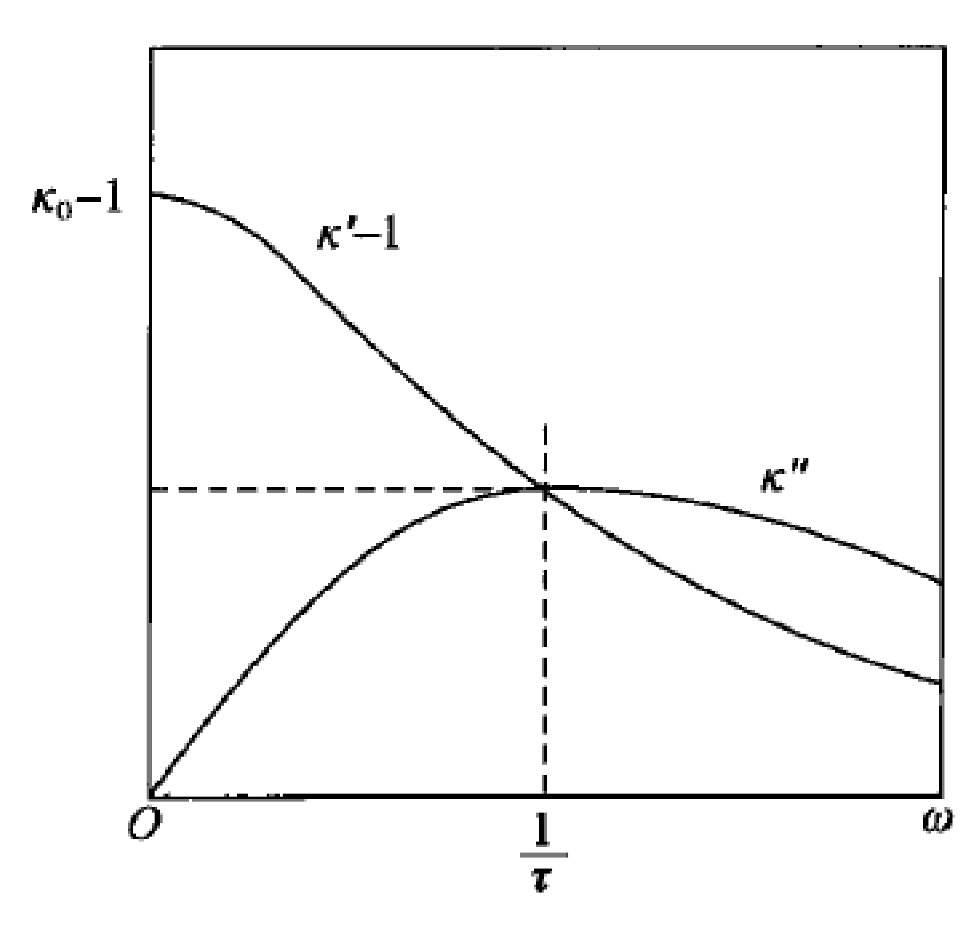


图 2.2 极化弛豫频率附近的色散曲线

由于存在着上述三种介质损耗机构，电介质在交变电磁场中的极化率 κ 是复函数，而且是频率的函数. 相应的介电常数 ε 也是频率的复函数，将它的实部和虚部分离后可以写作

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega), \tag{2.1.26}$$

$\varepsilon'(\omega)$是复介电常数的实部，它与频率的函数关系确定电磁波在介质中传播时的色散特性；$\varepsilon''(\omega)$为复介电常数的虚部，由它确定电磁波在介质中的损耗. 一种具有电子极化、离子极化和偶极子极化所有这三种机构的假想介质的 ε' 和 ε'' 与频率的关系示于图 2.3，这个图着重示出了这三种极化机构所影响的频率范围.

在技术科学中通常用介质损耗角 δ_e 来表示介电损耗，δ_e 定义为

$$\delta_e = \arctan \varepsilon''/\varepsilon' \quad 或 \quad \tan\delta_e = \varepsilon''/\varepsilon'. \tag{2.1.27}$$

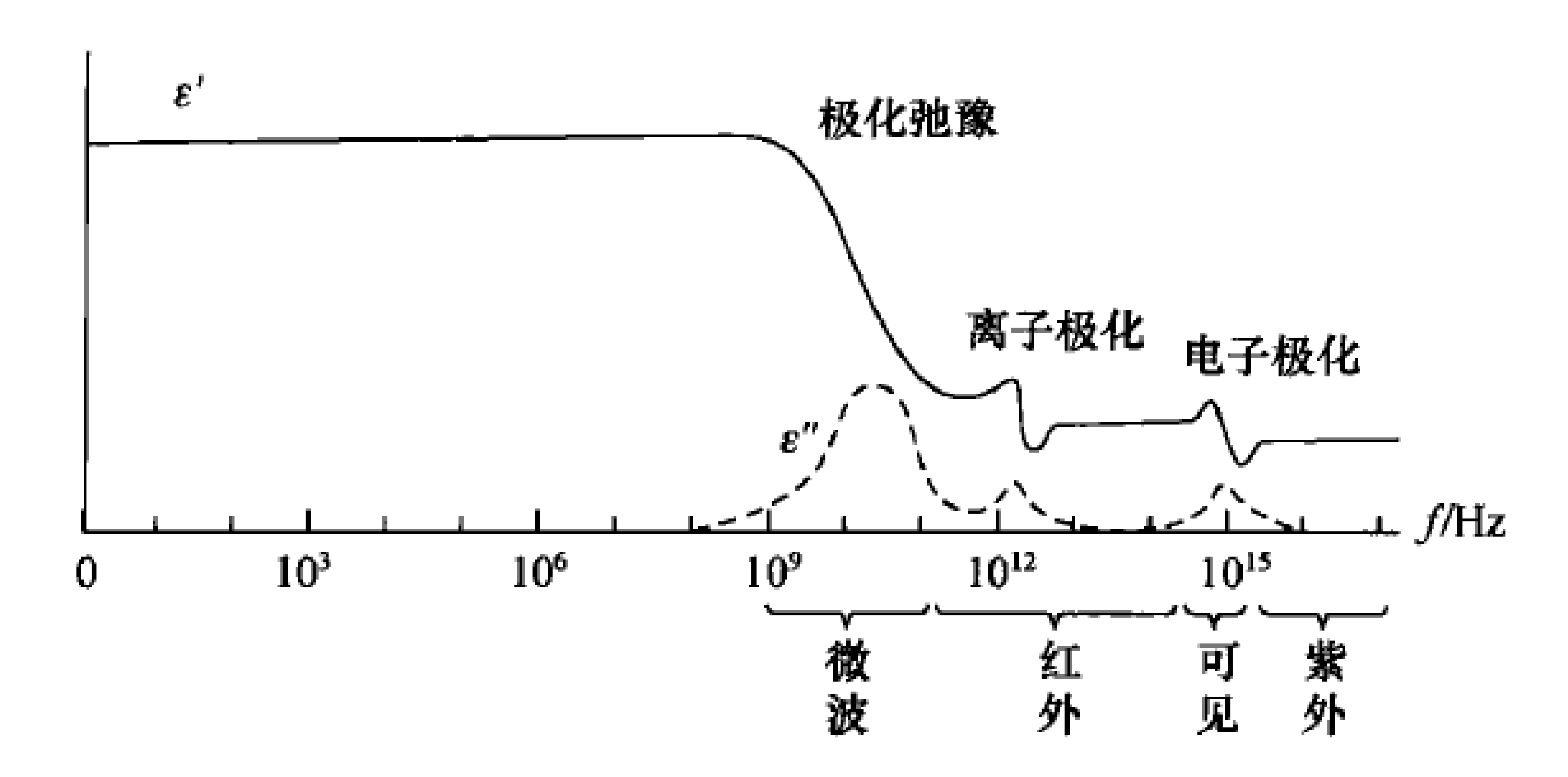


图 2.3 具有三种极化机构的假想介质的色散曲线

由于实际上总有 $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$，因此

$$\boldsymbol{D} = (\varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'')\boldsymbol{E} = \varepsilon'(1 - \mathrm{j}\varepsilon''/\varepsilon')\boldsymbol{E} \approx \varepsilon' \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_e}\boldsymbol{E},$$

此式表明介质损耗角 δ_e 实际上是电介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间的相位差.

2. 导电介质的色散和损耗[1,2]

在金属中存在着可以脱离原子外层轨道的自由电子而呈现直流电导. 自由电子在高频交变场中的行为受到它们的惯性的影响，导电特性的频率响应问题也完全可以利用简单的模型在经典力学范围内来解决，尽管与自由电子有关的许多其它物理现象的解释需要用到量子理论. 关于金属中自由电子在外电场中运动的经典模型称为 Drude 自由电子模型，在这个模型中自由电子的运动被看作与气体分子的运动相似，称为自由电子气. 如果将似弹性谐振子的运动方程(2.1.1)式中的谐振频率 ω_0 取作零(弹性恢复力为零)就得到自由电子的运动方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\gamma\dot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}. \tag{2.1.28}$$

但现在 γ 应理解为由于自由电子间的碰撞引起的阻尼常数，γ 也就是碰撞时间 τ 的倒数

$$\gamma = 1/\tau. \tag{2.1.29}$$

由运动方程(2.1.28)式可以证明 τ 也就是当外加场为零时电场衰减的时间常数，又称为弛豫时间. 在(2.1.9b)式中令 $\omega_0 = 0$ 就可得到由自由电子导致的介电常数

$$\kappa' - 1 = -\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \kappa'' = \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2\,\gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}, \tag{2.1.30}$$

或

$$\kappa_c = \kappa' - j\kappa'' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}, \tag{2.1.30a}$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \tag{2.1.12a}$$

称为电子等离子体频率，N 为单位体积中的自由电子数. ω_p 称为等离子体频率是因为自由电子气与金属中不运动的正离子现在构成了固态等离子体. 显然，相对介电常数的虚部 κ''是由于运动方程中碰撞项的存在. 如果直接计算在外电场作用下自由电子运动形成的传导电流并与 Ohm 定律比较就可建立电导率与介电常数的关系：

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma + j\omega}. \tag{2.1.31}$$

对于常温下的金属，$\omega_p \sim 10^{16}/\mathrm{s}$，$\gamma \sim 10^{14}/\mathrm{s}$，因而 $\omega_p \gg \gamma$. 根据(2.1.30)式金属对于三个不同频率范围的电磁波将呈现出极不相同的介质特性：

(1) $\omega \ll \gamma$，这是微波及其以下频率的电磁波，(2.1.30)式化为

$$\kappa' \approx -\omega_p^2/\gamma^2, \quad \kappa'' \approx \omega_p^2/\omega\gamma,$$

因此 $\kappa''/|\kappa'| = \gamma/\omega \gg 1$，介电常数的虚部是主要的，这时金属呈现导电性，电磁波在金属中受到强烈的衰减.

(2) $\omega \gg \omega_p$，对应于紫外或更短波长的电磁波，由(2.1.30)式有

$$\kappa' \approx 1, \quad \kappa'' = \omega_p^2\gamma/\omega^3 \ll 1.$$

在这个频率范围内金属呈电介质性，对于电磁波近乎是透明的.

(3) $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$，这是红外波段的电磁波，由(2.1.30)式有

$$\kappa' \approx -\omega_p^2/\omega^2, \quad \kappa'' \approx \omega_p^2\gamma/\omega^3.$$

虽然 $\kappa''/|\kappa'| = \gamma/\omega \ll 1$，但这时金属表面对于电磁波仍有强的反射，集肤厚度很小.

3. Kramers-Kronig 关系[2,3,4]

在本节第 1 小节中我们已就电子及离子极化以及偶极子极化的具体情况导出了在吸收峰附近 $\kappa'(\omega)$及 $\kappa''(\omega)$作为 ω 的函数的具体表达式. 实际上在介电常数的实部 $\kappa'(\omega)$和虚部 $\kappa''(\omega)$之间存在着确定的关系，称为 Kramers-Kronig 关系. 它们可以根据更普遍的原则导出，而不必借助于介质极化的具体模型.

为简单起见，我们仍然假定介质的单位体积中只含有 N 个完全相同的分子，而关于介质的性质则只要求是线性的，即 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间有简单的比例关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(\omega) &= \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) = \varepsilon_0\kappa(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) \\ &= \varepsilon_0[\kappa'(\omega) - j\kappa''(\omega)]\boldsymbol{E}(\omega).\end{aligned} \tag{2.1.32}$$

对作用于一个分子的任意外场 $\boldsymbol{E}(t)$ 做 Fourier 展开

$$\boldsymbol{E}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}_{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \tag{2.1.33}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{2.1.34}$$

是频率为 ω 的分量的振幅. 对于每个频率分量应用线性关系(2.1.32)式，分子的电偶极矩 $\boldsymbol{p}(t)$ 可以表示成

$$\boldsymbol{p}(t)=\frac{\varepsilon_0}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}[\kappa(\omega)-1]\boldsymbol{E}_{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.1.35}$$

假定外场为在 $t=0$ 时刻加的持续时间非常短的脉冲，这样 $t<0$ 就表示外场作用之前的时刻. 对于这个短脉冲(2.1.34)式给出的谱振幅 $\boldsymbol{E}_{\omega}$ 是常量，可以提到(2.1.35)式右方的积分号外：

$$\boldsymbol{p}(t)=\frac{\varepsilon_0}{N}\boldsymbol{E}_{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}[\kappa(\omega)-1]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

自然界的因果律要求在外场作用之前分子的极化为零，由上式有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\kappa(\omega)-1]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=0,\quad t<0. \tag{2.1.36}$$

同时，作为实际的场和电偶极矩，$\boldsymbol{E}(t)$ 和 $\boldsymbol{p}(t)$ 必须是实量，由(2.1.33)式和(2.1.35)式这就要求

$$\boldsymbol{E}_{-\omega}=\boldsymbol{E}_{\omega}^{*}, \tag{2.1.37}$$

$$\kappa(-\omega)=[\kappa(\omega)]^{*}, \tag{2.1.38}$$

* 号表示复共轭，后一式相当于要求

$$\kappa'(-\omega)=\kappa'(\omega),\quad \kappa''(-\omega)=-\kappa''(\omega). \tag{2.1.38a}$$

如果认为 ω 是复数而 $\kappa(\omega)$ 是定义于复平面上的函数，由(2.1.36)式可以推论 $\kappa(\omega)-1$ 是在下半复 ω 平面上的解析函数. 根据极化过程的物理分析我们知道当 $\omega\to\infty$ 时 $\kappa(\omega)\to1$，这是因为惯性使得任何实际的极化机构都不能对于外场的无穷快速的频率变化产生响应，这一结论也不难从(2.1.14a,b)式和(2.1.24)式得到验证. 所以，在实轴上当 $\omega\to\infty$ 时函数 $[\kappa(\omega)-1]\to0$. 在下半复 ω 平面内 $\mathrm{Im}\omega<0$，当 $t<0$ 时(2.1.36)式中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 含有负指数因子，所以可以用下半复 ω 平面上的无穷大半径半圆将积分(2.1.36)式闭合成围线积分. 这样就证明了(2.1.36)式的被积函数 $[\kappa'(\omega)-\mathrm{j}\kappa''(\omega)-1]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 在下半复 ω 平面内的留数之和为零，由此可进一步推论函数 $\kappa(\omega)-1=\kappa'(\omega)-\mathrm{j}\kappa''(\omega)-1$ 在下半复 ω 平面上是解析的. 利用这个性质和 Cauchy 定理就可以导出 $\kappa'(\omega)$ 和 $\kappa''(\omega)$ 之间的关系.

为了以下论述的方便，我们改用 ω' 表示复频率，而令 ω 为 ω' 的某一实正值. 根据上面论证的函数 $\kappa'(\omega')-\mathrm{j}\kappa''(\omega')-1$ 在下半复 ω' 平面上的解析性质和

Cauchy 定理①我们有

$$\oint_C \frac{\kappa'(\omega') - j\kappa''(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \tag{2.1.39}$$

这里积分路径 C 是由下半复 ω' 平面内无穷大半径圆和实轴组成的闭合围线，沿实轴的积分路径用半径很小的半圆 C_1 绕开了实轴上的极点 $\omega'=\omega$，如图 2.4 所示. 由于上面提到的理由，当 ω' 足够大时 $\kappa(\omega')\to 1$ 使得在大圆上的积分为零，(2.1.39)式化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'(\omega') - j\kappa''(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \tag{2.1.40}$$

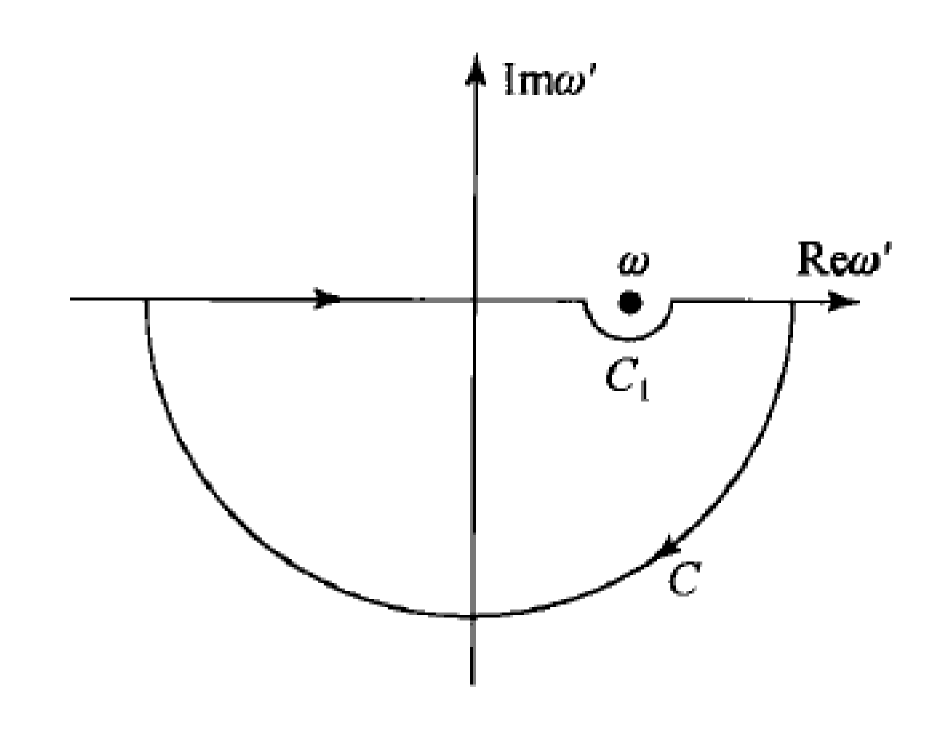


图 2.4 导出 Kramers-Kronig 关系所使用的复平面上的积分回路 C

这里，沿实轴的积分应理解为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + ⨍_{0}^{+\infty} + \int_{C_1},$$

式中 $⨍$ 表示 Cauchy 主值积分. 利用(2.1.38a)式将第一个积分的积分限改写，将第三个积分中的分子提到积分号外，这样(2.1.40)式就具体写成下面的形式：

$$\int_0^{\infty} \frac{\kappa'(\omega') + j\kappa''(\omega') - 1}{-\omega' - \omega} d\omega' + ⨍_0^{\infty} \frac{\kappa'(\omega') - j\kappa''(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$
$$+ [\kappa'(\omega) - j\kappa''(\omega) - 1]\int_{C_1} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = 0.$$

由 Cauchy 积分公式②在小半圆 C_1 上的积分为 πj，再将前两个积分合并，得

$$2⨍_0^{\infty} \frac{\omega[\kappa'(\omega') - 1] - j\omega'\kappa''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \pi j[\kappa'(\omega) - j\kappa''(\omega) - 1] = 0.$$

解出这个方程式就得到所希望的关系式

$$\kappa'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} ⨍_0^{\infty} \frac{\omega'\kappa''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \tag{2.1.41a}$$

---

① 见，例如，郭敦仁，《数学物理方法》，§4.3，高等教育出版社，1965.

② 参见同上，§4.5.

$$\kappa''(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{\kappa'(\omega')-1}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega',\tag{2.1.41b}$$

这两个式子给出了介电常数的实部和虚部之间的关系，称为 Kramers-Kronig 关系，亦称为色散关系.

Kramers-Kronig 关系对于计算介质的色散特性是很有用的，特别是(2.1.41a)式，在这里色散函数用吸收函数的积分给出. 因为介质的吸收特性是由一些谱线很窄的吸收线构成的，吸收线较容易测量，甚至可借助于经验知识得到，通过(2.1.41a)式就可计算出较难测量的色散特性. 1926 年导出色散关系后即根据测量的吸收特性利用(2.1.41a)式计算了介质的 X 射线折射率.

导出 Kramers-Kronig 关系时所依据的原则是十分基本的，除因果律外仅要求系统是线性的，因此 Kramers-Kronig 关系具有普遍性，其它线性系统的复响应函数的实部和虚部之间也有类似的关系，例如核物理及基本粒子物理系统以及线性网络系统等.

§2.2　超导体的电磁性质

1. 超导电性和完全抗磁性[5]

在制成液氦 3 年之后，荷兰工程师 K. H. Onnes 于 1911 年在实验中发现，当温度降至 4.15 K 以下时，水银的电阻突然降为零，由此开始了人类对超导电现象的研究. 开始出现零电阻的温度用 T_c 表示，称为超导转变温度. 正常态的导体在 T_c 以下的温度转变为超导态，称为超导体. 其后又陆续发现约有 20 余种元素和合金在极低温下呈现超导态，T_c 从数百分之一 K 至略高于 20 K. 在超导电现象发现之初即已发现超导电性与导体所处的外磁场强度有关. 例如在 Onnes 的实验样品加上弱的外磁场后，T_c 下移，变得更低；当外加磁感应强度超过 0.05 T 时，即使温度降至 0 K 也不会发生超导转变. 超导体的电阻与温度以及外磁场的关系示于图 2.5.

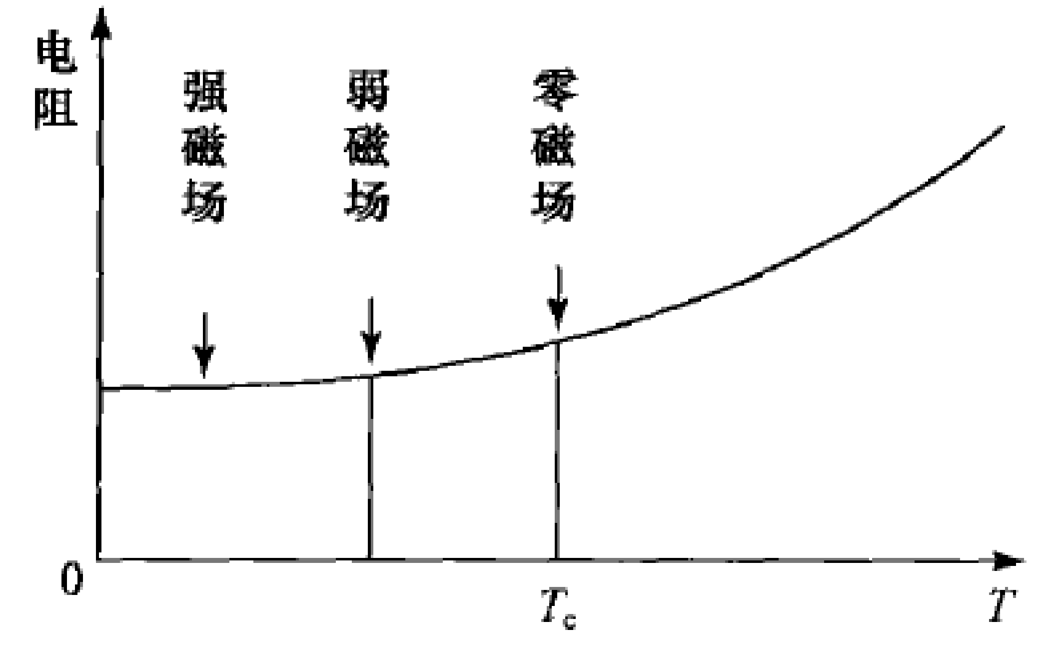


图 2.5　超导体电阻随温度的变化

随后的研究发现超导电现象与外磁场有更紧密的关系. 1933 年 M. Meissner 和 R. Ochsenfeld 发现，当置于外磁场中的导体球冷却至 T_c 以下时，原本透入导体球的磁力线被完全逐出超导体，如图 2.6 所示. 这个实验表明超导体具有完全抗磁性，被称为 Meissner 效应. 他们还发现，当外加磁场强度高于某一

临界值 H_c 时，样品的完全抗磁性消失，磁力线又重新透入样品，导体回到正常态. 这样的超导体后来被称为Ⅰ型超导体.

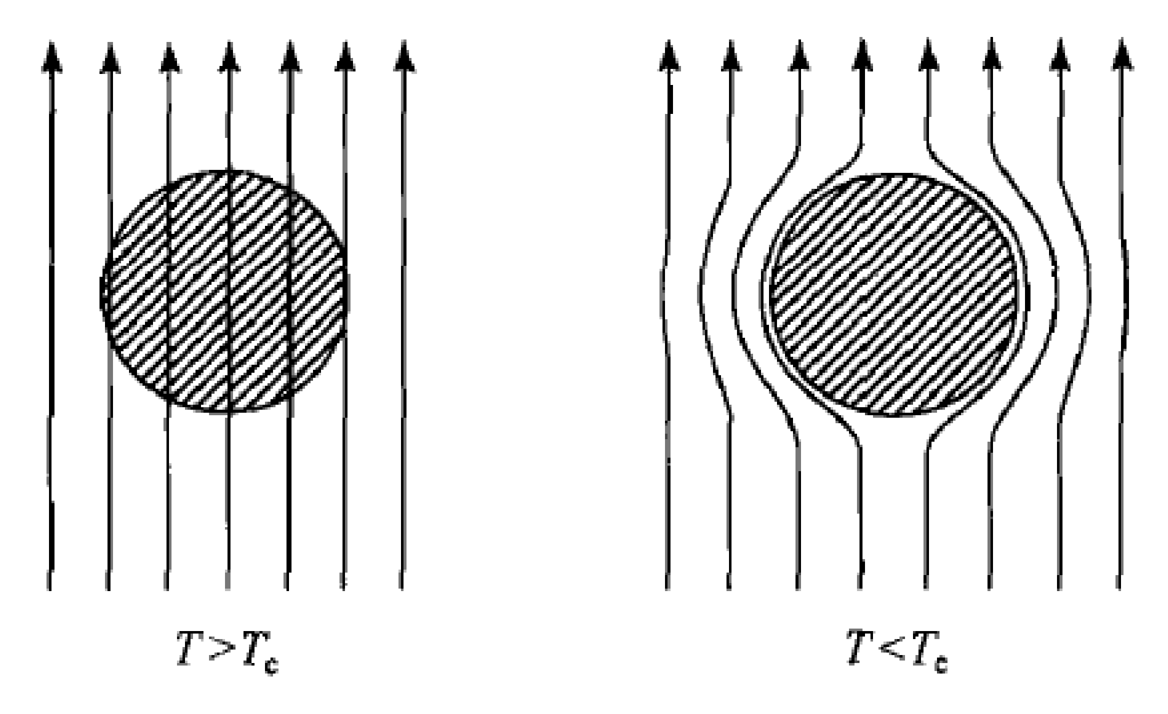


图 2.6 Meissner 效应

2. Ⅱ型超导和高温超导[5,6,7,8]

随后发现的Ⅱ型超导体其超导电性现象与Ⅰ型超导体相同，但 Meissner 效应的现象相当不同，其抗磁性是不完全的. 当冷却温度降到 T_c 以下时，Ⅱ型超导体中的磁力线不被完全逐出，有一部分磁感应通量仍可透入实验样品. 以置于螺线管磁场轴上的细长棒状超导体为例，棒中的磁感应强度 B 值，或磁感应通量 Φ_B，与外磁场(即螺线管磁场) H 值之间的关系，对于Ⅰ型和Ⅱ型超导体分别示于图 2.7(a)和图 2.7(b). 当外磁场低于临界值 H_c 时Ⅰ型超导体发生完全的 Meissner 效应. 对于Ⅱ型超导体，仅当临界磁场低于下临界磁场值 H_{c1} 时才发生完全的 Meissner 效应；在下临界磁场值 H_{c1} 和上临界磁场值 H_{c2} 之间的磁场强度下发生的是不完全 Meissner 效应，此时磁感应通量可部分透入超导体棒. 这部分透入的磁感应通量呈现极不均匀的分布，形成很细的丝，周围被电流涡旋环绕. 电流涡旋之间的物质保持超导态，所以电阻仍为零. 随着外磁场的增加，涡旋的拥挤程度增加，当 H 达到 H_{c2} 时涡旋占据了整个体积，超导态消失. 即便如此，在超导棒的表面鞘层仍然存在超导电流，直至达到更高的 H_{c3} 时才会消失. 处于 $H_{c1}<H<H_{c2}$ 之间的Ⅱ型超导体称为涡旋态.

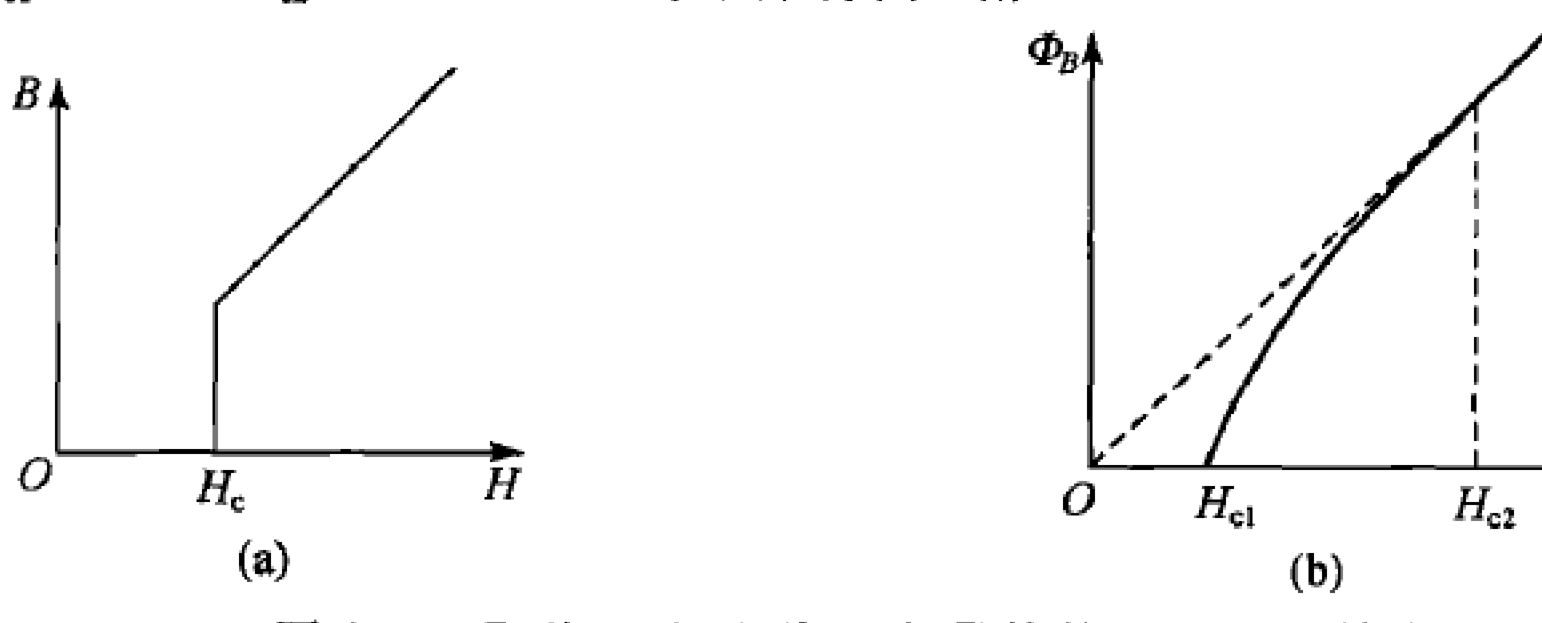


图 2.7 Ⅰ型(a)和Ⅱ型(b)超导体的 Meissner 效应

Ⅱ型超导体与Ⅰ型超导体的差别不仅在于不完全的 Meissner 效应，Ⅱ型超导态可以保持的临界磁场值 H_{c2} 较之Ⅰ型的 H_c 要高得多，可达 100 倍以上. 例如铌三锡（Nb_3Sn）的 $T_c=18\,K$，在 4.2 K 时它的 $\mu_0 H_{c2}$ 可达 10 T，而Ⅰ型超导体典型的 $\mu_0 H_c$ 值约为 10^{-2} T. 由于 H_c 很低，Ⅰ型超导体不能用于制作产生强磁场的超导磁体，因而没有实际的工业应用. Ⅱ型超导体由于 H_{c2} 高，其无阻尼的超导电流在强磁场下可以维持，用它制作的超导强磁体已有重要的工业应用，例如起重用的强电磁铁，磁悬浮高速列车等.

关于超导电性机理的理论研究吸引了很多物理学家，其中的一种宏观、唯象理论由 F. London 和 H. London 兄弟于 1935 年提出，我们将在下一小节中介绍. 美国物理学家 Bardeen，Cooper 和 Schrieffer 于 1957 年提出了一种超导体机理的微观理论，现通称为 BCS 理论，它成功地解释了低 T_c 的金属和合金超导体的一般特性①. BCS 理论根据量子力学解释了自旋相反的成对电子被量级为 kT_c 的束缚能结成电子对，k 为 Boltzmann 常数，这种零自旋的电子对是玻色（Bose）子，称为 Cooper 电子对. 根据量子力学，许多玻色子可以处于具有共同动量的单一量子态上. 在超导态下所有 Cooper 电子对是作为具有单一动量的群体出现的，即为宏观量子态. 正常导体中导致电阻的碰撞过程其能量不足以破坏电子对的宏观量子态，因此由电子对形成的超导电流没有电阻. 到达临界温度 T_c 时，Cooper 电子对解体，超导体便转变为正常导体. Meissner 效应也可由 BCS 理论获得解释.

超导体材料研究的突破性进展始于 1986 年，在 IBM 苏黎世实验室工作的两位物理学家 J. G. Bednorz 和 K. A. Müler 发表了关于含有 La（镧）和 Ba（钡）的氧化铜陶瓷材料的超导电性的研究，其超导转变温度高于 30 K，而此前的 70 年中所获得的 T_c 的最高记录为 23.4 K（Nb_3Ge，铌三锗）. ②次年，华裔美国物理学家朱经武的研究组即报道了成分为 $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-x}$（$x<0.1$）含钇（Y）和钡的氧化铜陶瓷材料（称为 YBaCuO 的 123 相）的超导特性的研究，T_c 高达 90 K 以上③，由此开启了高温超导材料研究的热潮. 近年的研究，已获得 T_c 高达 150 K 的高温超导材料. 所谓高温超导材料是指超导转变临界温度高于液氮温度（77.4 K）的超导体，此前的低温超导体须使用昂贵的液氦（温度 4.25 K）制冷，设

① J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Theory of superconductivity, *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1175—1204, 1957.

② J. G. Bednorz and K. A. Müler, Possible high T_c superconductivity in the Ba—La—Cu—O system, *Z. für Physics*, B64, p. 189, 1986.

③ M. K. Wu, J. R. Ashburn, C. J. Torng, P. H. Hor, R. L. Meng, L. Gao, Z. J. Huang, Y. Q. Wang, C. W. Chu, Superconductivity at 93 K in a new mixed phase Y—Ba—Cu—O compound system at ambient pressure, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 908, 1987.

备复杂,使其应用受到很大限制.高温超导体使用便宜的液氮制冷,设备简化,其应用变得切实可行.但高温超导陶瓷材料性脆,适宜制成薄膜,适于制作微波传输线和无源器件.高温超导体是Ⅱ型超导体,但 BCS 理论不能解释其物理特性,目前尚没有成熟的微观机理理论.

3. London 方程[5,6,7,8]

为研究高温超导体在微波无源器件方面的应用,需要建立可供工程计算使用的宏观方程式.早在 1935 年 London 兄弟就提出了超导体电磁学的宏观方程式①,当时的目的在于解释 Meissner 效应.以下的论述根据 BCS 理论对 London 理论的原来形式作了必要的修改.

根据 BCS 理论,超导电流由 Cooper 电子对的运动形成,由经典力学定律得电子对的运动方程:

$$m^* \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t} = e^* \boldsymbol{E}, \tag{2.2.1}$$

这里 $m^*=2m$, $e^*=2e$, m, e 分别为电子质量和电子电荷的代数值,$\boldsymbol{E}$ 为超导体中的电场,$\boldsymbol{v}_s$ 为电子对的运动速度.由于电子对的运动不受阻滞,方程式(2.2.1)中没有阻尼项.超导电流密度

$$\boldsymbol{J}_s = n_s^* e^* \boldsymbol{v}_s, \tag{2.2.2}$$

n_s^* 为单位体积中的电子对数目.(2.2.2)式代入(2.2.1)式,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*}\boldsymbol{E}, \tag{2.2.3}$$

此式称为第一 London 方程.将(2.2.3)式代入 Faraday 电磁感应定律

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

得第二 London 方程

$$\nabla \times \boldsymbol{J}_s = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^*}\boldsymbol{B}, \tag{2.2.5}$$

此式也称为 London 方程.与稳态及似稳态电流产生磁场的 Ampère 环路定理 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 比较可知,方程(2.2.5)表明磁感应 $\boldsymbol{B}$ 是产生超导电流的根源. London 理论对 Meissner 效应的解释建立在此基础之上.

设超导体为非磁性的,$\mu=\mu_0$,在似稳条件下略去位移电流,对 Ampère 环路定理

$$\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{J}_s \tag{2.2.6}$$

---

① F. London and H. London, The electromagnetic equations of the superconductor, *Proc. Roy. Soc. (London)*, vol. A-149, pp. 71—88, 1935.

取旋度，考虑到$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=-\nabla^2\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}_s.$$

以 London 方程(2.2.5)代入上式得

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}/\lambda_L^2, \tag{2.2.7}$$

其中

$$\lambda_L^2=\frac{m^*}{n_s^* e^{*2}\mu_0}=\frac{m}{n_s e^2\mu_0}. \tag{2.2.8}$$

λ_L 称为 London 透入深度，对于典型的超导体它的量级为 0.05～0.1 μm.

方程式(2.2.7)支持 Meissner 效应的存在，因为它不允许有空间均匀分布的磁感应. 设想 $z=0$ 平面为超导体的外表面，磁场从外部透入其中，超导体内的磁场设为 $\boldsymbol{B}=B(z)\boldsymbol{a}_x$，满足方程(2.2.7)的解为

$$B(z)=B_0\exp(-z/\lambda_L). \tag{2.2.9}$$

可见，磁感应只能透入超导体表面的薄层，Meissner 效应得到解释.

正常态导体的结构关系，即 Ohm 定律，对于超导体不再适用，因为超导体的 σ 为无穷大，$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 会导致超导体中的磁感应不随状态(超导态或正常态)改变，这与 Meissner 效应矛盾. 若引入矢势 $\boldsymbol{A}$，以 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 代入 London 方程，得

$$\boldsymbol{J}_s=-\boldsymbol{A}/\mu_0\lambda_L^2, \tag{2.2.10}$$

这便是类似于 Ohm 定律但能够导致 Meissner 效应的超导体的结构关系. 而超导电性则由第一 London 方程(2.2.3)表述.

4. 双流模型和复数电导[6,7,8]

早在 1934 年 Gorter 和 Casimir 为研究超导体的热力学性质就提出了超导体的双流模型①. 他们假定，当温度低于 T_c 时超导体中存在密度为 $n_s=2n_s^*$ 的超导电子和密度为 n_n 的正常态电子，总自由电子密度 $n=n_s+n_n$，如果 n_s 和 n_n 之间的比例按下面的分配规律随温度变化：

$$\frac{n_s}{n_n}=1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad (T<T_c), \tag{2.2.11}$$

超导体的热力学性质与实验会符合良好. 这样，在超导体中并存着两种电流：超导电流和正常态电流，这个模型称为双流模型.

双流模型与 London 理论结合形成的宏观理论将导致超导体的等效复数电导. 我们写出超导电子和正常电子的运动方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}=e\boldsymbol{E}, \tag{2.2.12}$$

---

① C. J. Gorter and H. B. G. Casimir, *Phys. Z.*, vol. 35, p. 963, 1934.

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}t}+m\frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\tau}=e\boldsymbol{E},\tag{2.2.13}$$

这里 τ 为弛豫时间. 总电流为超导电流与正常态电流之和

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{J}_{n}=n_{\mathrm{s}}e\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}+n_{\mathrm{n}}e\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}.\tag{2.2.14}$$

设场和电流随时间简谐变化:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \boldsymbol{J}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{n}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.\tag{2.2.15}$$

将(2.2.15)式代入(2.2.12)和(2.2.13)式,解出 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$,由(2.2.14)式得交变电流幅度与电场幅度的以下关系(略去下脚标中的 0 不写)

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=-\mathrm{j}\frac{e^2n_{\mathrm{s}}}{m\omega}\boldsymbol{E},\tag{2.2.16}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{n}}=-\mathrm{j}\frac{e^2n_{\mathrm{n}}}{m\omega}\frac{1}{1-\mathrm{j}(1/\omega\tau)}\boldsymbol{E}.\tag{2.2.17}$$

引入一个复数等效电导率

$$\sigma_{\mathrm{eff}}=\sigma'-\mathrm{j}\sigma'',\tag{2.2.18}$$

可以仍然使用 Ohm 定律

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{n}}=\sigma_{\mathrm{eff}}\boldsymbol{E}.\tag{2.2.19}$$

将(2.2.16)和(2.2.17)式代入(2.2.19)式,得 σ_{eff} 的实部和负虚部

$$\sigma'=\frac{e^2n_{\mathrm{n}}\tau}{m(1+\omega^2\tau^2)},\tag{2.2.20}$$

$$\sigma''=\frac{e^2n_{\mathrm{s}}}{m\omega}+\frac{e^2n_{\mathrm{n}}(\omega\tau)^2}{m\omega(1+\omega^2\tau^2)}.\tag{2.2.21}$$

τ 是正常导体的弛豫时间,在 $\omega<10^{11}$ Hz 的频率范围内 $\omega^2\tau^2\ll1$,(2.2.20)和(2.2.21)式便简化为

$$\sigma'=\frac{e^2n_{\mathrm{n}}\tau}{m}=\sigma_{\mathrm{n}}\left(\frac{n_{\mathrm{n}}}{n}\right)=\sigma_{\mathrm{n}}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^4,\tag{2.2.22}$$

$$\sigma''=\frac{e^2n_{\mathrm{s}}}{m\omega}=\frac{1}{\omega\mu_0\lambda_{\mathrm{L}}^2},\tag{2.2.23}$$

这里 $\sigma_n=e^2n\tau/m$ 为正常态导体的电导,而等效复数电导可以写成

$$\sigma_{\mathrm{eff}}=\sigma_{\mathrm{n}}\frac{n_{\mathrm{n}}}{n}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega\mu_0\lambda_{\mathrm{L}}^2}.\tag{2.2.24}$$

可以看出 σ_{eff} 的实部为与温度有关的正常态导体的电导,而虚部则是由超导电流贡献的.

由(2.2.11)式,考虑到在绝对零度全部自由电子都结为电子对,即 $n_{\mathrm{s}}=n$(当$T=0$),London 透入深度作为温度的函数可以写为

$$\lambda_{\mathrm{L}}(T)=\frac{\lambda_{\mathrm{L}}(0)}{\sqrt{1-(T/T_{\mathrm{c}})^4}},\tag{2.2.25}$$

而 σ_{eff} 作为温度的函数则可写为

$$\sigma_{\text{eff}} = \left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]\left[\sigma_n\eta(T) - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\mu_0\lambda_L(0)}\right], \tag{2.2.26}$$

其中

$$\eta(T) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{-1}.$$

5. 波方程[6,8]

在超导体中 Maxwell 方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, & \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0, & \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.27}$$

仍然成立，辅以结构关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$. 我们仅讨论非磁性的超导体，$\mu=\mu_0$. 由两个旋度方程消去 $\boldsymbol{H}$，得 $\boldsymbol{E}$ 的方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0. \tag{2.2.28}$$

可以证明，在超导体中既无超导电荷也无正常电荷的积累，即 $\rho=0$. 利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$，由(2.2.28)式导致 $\boldsymbol{E}$ 满足下面的方程式：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0. \tag{2.2.29}$$

在双流模型中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_s+\boldsymbol{J}_n$，超导电流 $\boldsymbol{J}_s$ 遵循第一 London 方程(2.2.3)，正常态电流 $\boldsymbol{J}_n$ 遵循 Ohm 定律，将它们代入上式得

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{E}+\mu_0\sigma'\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{2.2.30}$$

这就是电场 $\boldsymbol{E}$ 在超导体中应满足的波动方程式，σ' 和 λ_L 都是温度的函数.

在稳态情况，$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$，(2.2.30)式变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{E}, \tag{2.2.31}$$

此时没有正常态电流，只有超导电流，该方程与 London 理论中 $\boldsymbol{B}$ 满足的方程(2.2.7)相同，会得到同样的解

$$\boldsymbol{E}(z)=E_0\exp(-z/\lambda_L). \tag{2.2.32}$$

在场量随时间以角频率 ω 简谐变化的情况下(2.2.30)式变为 Helmholtz 方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{E} &= \mathrm{j}\omega\mu_0\left(\sigma'-\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\mu_0\lambda_L^2}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\right)\boldsymbol{E} \\ &= \mathrm{j}\omega\mu_0(\sigma_{\text{eff}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\boldsymbol{E}=-\omega^2\mu_0\varepsilon_{\text{eff}}\boldsymbol{E}, \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

这里引入了等效的复介电常数

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\omega\varepsilon}\right). \tag{2.2.34}$$

如果在 Maxwell 方程(2.2.27)的旋度式中消去 $\boldsymbol{E}$,会得到 $\boldsymbol{H}$ 满足与(2.2.30)式相同的波动方程,对于时谐场会导致与(2.2.33)式相同的 Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\text{eff}} \boldsymbol{H} = 0. \tag{2.2.35}$$

6. 平面电磁波和表面阻抗[6,7,8]

由于超导体中电磁波的方程式(2.2.33)和(2.2.35)与正常态的导电介质(特别是良导体)中电磁波的方程式形式上完全相同,电磁波在超导体中传播时也要遭受衰减.

从 $z<0$ 半空间进入超导体所处的 $z>0$ 半空间中的平面电磁波可以写成

$$\boldsymbol{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \boldsymbol{a}_x, \quad \boldsymbol{H} = H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \boldsymbol{a}_y, \tag{2.2.36}$$

现在波数

$$k = \omega\left[\mu_0\left(\varepsilon - \mathrm{j}\,\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \beta - \mathrm{j}\alpha. \tag{2.2.37}$$

对于超导体,良导体条件仍然成立,即有

$$\sigma_{\text{eff}}/\omega\varepsilon \gg 1. \tag{2.2.38}$$

以(2.2.24)式的 σ_{eff} 代入(2.2.37)式并利用(2.2.38)式得

$$k = -\mathrm{j}\,\frac{1}{\lambda_{\mathrm{L}}}\left(1 + \mathrm{j}\tau\omega\,\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{s}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.39}$$

可见,电磁波透入超导体的深度为 λ_{L} 量级;当 $\omega \to 0$ 时透入深度 $\alpha^{-1} = \lambda_{\mathrm{L}}$.

(2.2.39)式表明,当电磁波沿超导体表面传播时会受到衰减.在微波工程中习惯用表面阻抗表示低损耗的导体对电磁波传播的影响,这个量也称为该种材料的本征阻抗,或波阻抗,定义为

$$Z_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{s}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{s}} = \left[\frac{\mu_0}{\varepsilon - \mathrm{j}\sigma_{\text{eff}}/\omega}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.40}$$

可以证明,若在平面导体表面沿与表面相切的电场方向取一单位正方形表面,与电场方向平行的一个(单位长度)边长两端的电位差和流过该正方形面积之下(单位宽度)无穷纵深导体柱的总电流的比值,与 Z_{s} 相等,所以 Z_{s} 等效地表示导体的表面阻抗.以 $\sigma_{\text{eff}} = \sigma' - \mathrm{j}\sigma''$ 代入(2.2.40)式,考虑到条件(2.2.38)式,得

$$Z_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{s}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{s}} = \left(\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{\sigma' - \mathrm{j}\sigma''}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{j}\left(\frac{\omega\mu_0}{\sigma''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \mathrm{j}\,\frac{\sigma'}{\sigma''}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

利用 $\sigma' \ll \sigma''$ 条件对上式右侧第 2 个圆括号作二项式展开,再代入(2.2.24)式,便得

$$Z_s = R_s + jX_s = \frac{1}{2}\sigma_n\left(\frac{n_n}{n}\right)(\omega\mu_0)^2\lambda_L^3 + j\omega\mu_0\lambda_L. \quad (2.2.41)$$

于是，超导体的表面电阻和表面电抗分别为

$$R_s = \frac{1}{2}\sigma_n\left(\frac{n_n}{n}\right)(\omega\mu_0)^2\lambda_L^3, \quad (2.2.42)$$

$$X_s = \omega\mu_0\lambda_L. \quad (2.2.43)$$

(2.2.42)式表明超导体的表面电阻 R_s 随 ω 以平方律增加，由 BCS 理论也可得到这个规律.

需要与正常态的良导体作一比较. 良导体的表面阻抗

$$Z_s = \left[\frac{\mu_0}{\varepsilon - j(\sigma/\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(j\,\frac{\omega\mu_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+j)\left(\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$R_s = X_s = \left(\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.44)$$

正常态良导体的 R_s 随$(\omega)^{\frac{1}{2}}$增加，与超导体的频率依赖规律相当不同.

更重要的在于 R_s 的数值有量级的差别. 因为 λ_L 小于 0.1 μm，即使在频率相当高时超导体的 R_s 也远小于正常态的良导体. 例如，用 Ba—Y—Cu—O 陶瓷高温超导材料制作的微带线，该材料的 $T_c=92.5$ K，$\lambda_L(0)=0.14$ μm，$\sigma_n=0.5$ S/μm，在工作温度 $T=77$ K 和工作频率 10 GHz 时计算得 $\sigma'=0.24$ S/μm，$\sigma''=336$ S/μm，微带线的传输损耗的计算值为 10^{-3} dB/cm. 铝在 77 K 时的 $\sigma=150$ S/μm，同样设计的铝制传输线的损耗高于 1 dB/cm，高了 3 个数量级①.

值得注意的是，由超导体的理论导出的 $R_s \sim \omega^2$ 的规律与实验测量结果有相当差距. 在 1 GHz$<f<$250 GHz 频率范围内的实验测量结果表明，高温超导薄膜的 $R_s \sim \omega^a$，$1.1<a<1.4$，而不是平方律，说明高温超导体的机理研究尚未达到成熟. 例如，Mei 等人已经指出②，完全没有阻尼的超导电流的假定并不满足由因果律导致的 Kramers-Kronig 关系.

① H. Y. Lee and T. Itoh, Phenomenological loss equivalence method for planar quasi-TEM transmission lines with a thin normal conductor or superconductor, *IEEE Trans. MTT*, vol. 37, no. 12, pp. 1904—1909, 1989.

② K. K. Mei and G. C. Liang, Electromagneties of supperconductors, *IEEE Trans. MTT*, vol. 39, no. 9, pp. 1545—1552, 1991.

§2.3　无耗可逆各向异性介质中的平面电磁波

1. 晶体的介电张量

在电介质晶体中由于原子按严格的几何形状排列，使得在不同的方向上介电常数的值不同，呈现各向异性，这时介电常数不再能用标量表示，而是二阶张量，它的一般形式是

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}. \tag{2.3.1}$$

我们仅限于讨论各向异性电介质而不讨论各向异性磁介质，所以磁导率 μ 仍为标量，这时电位移与电场强度，磁感应与磁场强度的关系分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{\kappa}_e\cdot\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{B}&=\mu\boldsymbol{H}.\end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

对于无耗的各向异性电介质，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是实张量，而且结构关系(2.3.2)式仍须遵从更基本的物理规律，例如能量守恒定律，这将使得无耗电介质的介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 必须是对称张量，下面来证明.

重复导出复数 Poynting 定理(1.1.12)式的步骤可得各向异性电介质中下列形式的复数 Poynting 定理

$$-\frac{1}{2}\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\mathrm{j}2\omega\iiint_V\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V. \tag{2.3.3}$$

在无耗电介质单位体积内损耗的平均电功率应为零，因此

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}^*\right]=-\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\omega\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}^*\right]=0.$$

把实常数 $\omega/2$ 提到 Im 之前并且考虑到 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是实张量便有

$$\mathrm{Im}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}^*]=0.$$

设电场只有两个分量 E_x, E_y，由上式得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}^*]&=\mathrm{Im}[\varepsilon_{xx}|E_x|^2+\varepsilon_{yy}|E_y|^2+E_x\varepsilon_{xy}E_y^*+E_y\varepsilon_{yx}E_x^*]\\ &=\mathrm{Im}[E_x\varepsilon_{xy}E_y^*+E_y\varepsilon_{yx}E_x^*]\\ &=\mathrm{Im}[(\varepsilon_{xy}-\varepsilon_{yx})E_xE_y^*]=0.\end{aligned}$$

由于 E_x, E_y 是任意的，这就要求

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}.$$

对于其余非对角线矩阵元也可以导出类似的关系，所以一般有

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \tag{2.3.4}$$

这就证明了无耗各向异性电介质的介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是对称张量.

在介电张量为实对称张量的条件下仍然可以导出(1.4.2)式，从而导出互易定理，所以无耗的各向异性电介质称为可逆各向异性电介质.

从矩阵理论我们知道实对称矩阵具有实本征值，而且相应的本征矢是正交的，所以存在着三个彼此正交的坐标轴，在它们所构成的坐标系中介电张量(2.3.1)式变为对角形张量：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \tag{2.3.5}$$

这个坐标系称为主轴系，主轴系的坐标轴称为主轴.

2. 各向异性电介质中平面电磁波的一般特性[8,9]

现在我们来看各向异性电介质中平面电磁波的一般特性. 由无源区域中的 Maxwell 方程式

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0, \\ \nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.6}$$

可以导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \omega^2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - k_0^2\boldsymbol{\kappa}_e\cdot\boldsymbol{E} = 0, \tag{2.3.7a}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{\kappa}_e^{-1}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}) - k_0^2\boldsymbol{H} = 0, \tag{2.3.7b}$$

其中

$$k_0^2 = \omega^2\mu\varepsilon_0. \tag{2.3.8}$$

以平面波解

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}, \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \end{aligned}\right\} \tag{2.3.9}$$

分别代入方程(2.3.7a,b)，经过矢量运算并消去因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 后得

$$k^2\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0) - k_0^2\boldsymbol{\kappa}_e\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0, \tag{2.3.10a}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\kappa}_e^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0) + k_0^2\boldsymbol{H}_0 = 0, \tag{2.3.10b}$$

这是平面波解(2.3.9)式的复数振幅应当满足的矢量方程式，而每个矢量方程可分解成三个直角坐标分量方程. 矢量波动方程式(2.3.10a)和(2.3.10b)的非零解条件所导致的方程式将用于确定平面波(2.3.9)式的波数 k 作为 ω 的函数，称为色散方程. 可以证明由(2.3.10a)式和(2.3.10b)式分别导出的色散方程是一致的，所以平面波解(2.3.9)式的电场和磁场色散特性相同.

在具体导出并求解色散方程之前我们先来看各向异性电介质中平面电磁波的一般特性. 首先,将平面波解(2.3.9)式代入 Maxwell 方程(2.3.6)的两个散度方程,得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0,\\ &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.3.11}$$

结果表明 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{H}$)均与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直. 再以平面波解(2.3.9)式代入 $\boldsymbol{H}$ 的旋度方程,得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D},\tag{2.3.12}$$

此式进一步说明 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{H}$($\boldsymbol{B}$)和 $\boldsymbol{k}$ 三个矢量是按右手螺旋关系相互垂直的,但由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是张量,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 一般是不平行的. 对(2.2.9)式直接运算得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=k^2\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}}{k^2}\boldsymbol{k}\right)=k^2\boldsymbol{E}_\perp,\tag{2.3.13}$$

这里 $\boldsymbol{E}_\perp$ 是电场垂直于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 方向的分量. (2.3.13)式与(2.3.7a)式比较得

$$\boldsymbol{D}=\frac{k^2}{\omega^2\mu}\boldsymbol{E}_\perp,\tag{2.3.14}$$

因此 $\boldsymbol{E}$ 的垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的分量与矢量 $\boldsymbol{D}$ 平行,$\boldsymbol{E}$ 矢量处于 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 构成的平面内. 各向异性电介质中平面波的电场和电位移矢量方向与波矢量方向之间的关系示于图 2.8.

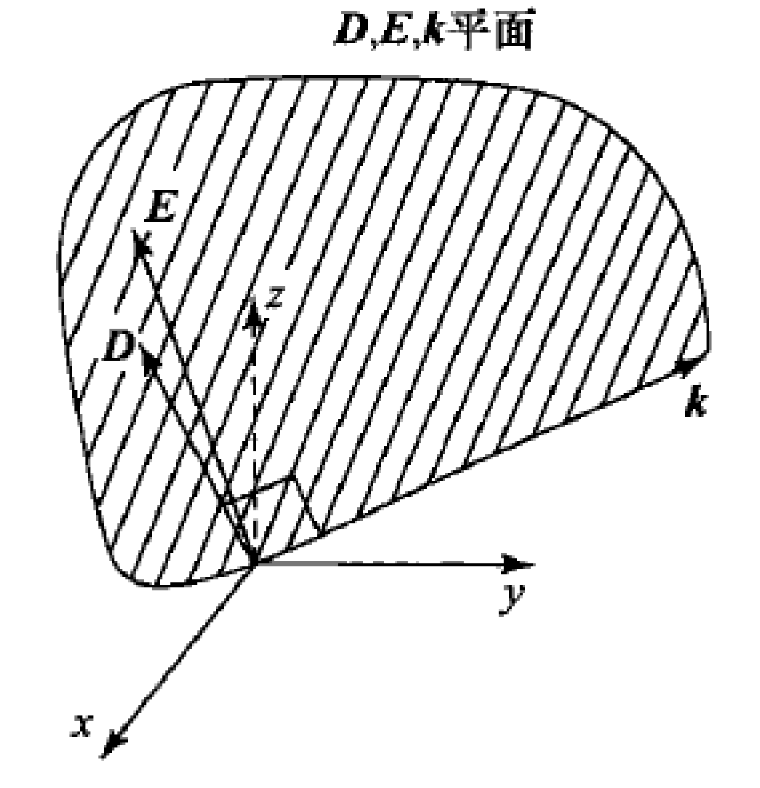


图 2.8 各向异性电介质中平面电磁波的电场和电位移方向与波矢量方向的关系

3. 单轴电介质中的平面电磁波[3,9]

有几类具有轴对称性的晶体,如正方系、六角系和菱面系晶体,在与主对称轴垂直的两个主轴方向上的介电常数值是相等的,当取主对称轴(在光学中称为光轴)为 z 轴时在主轴系中的介电张量可写作

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_\perp & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\perp & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel\end{bmatrix},\tag{2.3.15}$$

这类介质称为单轴介质,典型的物质是石英、方解石等.

将(2.3.15)式代入(2.3.11)式的第一式得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=(1-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp)k_zE_z.\tag{2.3.16}$$

上式代入矢量波动方程(2.3.10a),分解为直角坐标分量方程后可写成下面的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & 0 & -(1-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp)k_xk_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & -(1-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp)k_yk_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_\parallel k_z^2}{\varepsilon_\perp}-\omega^2\mu\varepsilon_\parallel \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}=0. \tag{2.3.17}$$

方程(2.3.17)有非零解的条件

$$\det\begin{bmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & 0 & -(1-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp)k_xk_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & -(1-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp)k_yk_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_\parallel k_z^2}{\varepsilon_\perp}-\omega^2\mu\varepsilon_\parallel \end{bmatrix}=0 \tag{2.3.18}$$

称为色散方程，容易看出它有两个解：

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon_\perp \tag{2.3.19}$$

和

$$k_x^2+k_y^2+\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon_\parallel. \tag{2.3.20}$$

如果设 θ 是波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角，第二个解(2.3.20)式可写成更方便的形式

$$k^2\left(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\cos^2\theta\right)=\omega^2\mu\varepsilon_\parallel. \tag{2.3.20a}$$

解(2.3.19)和(2.3.20a)表示在单轴介质中可能传播的两种平面波，它们具有不同的物理特征，分别称为寻常波(ordinary wave)和非寻常波(extraordinary wave)，下面分别来讨论.

(1) 寻常波

将解(2.3.19)代入矢量波动方程(2.3.17)后可以解出

$$E_z=0, \tag{2.3.21}$$

上式代入(2.3.16)式就得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0. \tag{2.3.22}$$

(2.3.22)式表明波的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 没有平行于波传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量，因此 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 的方向重合. 同时，(2.3.21)式表明 $\boldsymbol{E}$(以及 $\boldsymbol{D}$)与光轴 z 方向垂直，因此 $\boldsymbol{E}$ 以及 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和 z 轴构成的平面. 可见，解(2.3.19)式表示的波是相对于传播方向 $\boldsymbol{k}$ 的横电磁(TEM)波，与各向同性介质中的平面波性质相同，所以称为寻常波. 由(2.3.19)式容易求出寻常波的相速为常数：

$$v_p=(\mu\varepsilon_\perp)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.3.23}$$

(2) 非寻常波

为方便起见我们取光轴 z 和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 构成的平面(称为主截面)为 yz 平面而不会影响讨论的一般性. 在如此选取的坐标系中 $k_x=0$, 将非寻常波解(2.3.20)式代入矢量波动方程(2.3.17)得

$$E_x=0,$$

所以电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 处于 yz 平面内, 由(2.3.14)式电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 也在 yz 平面内. 但现在 $\boldsymbol{E}$ 有沿波传播方向的分量, 而 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 总是垂直的, 所以 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不再保持平行. 波的这种特性是各向同性介质中的 TEM 波所不具有的, 所以称为非寻常波. 由(2.3.20a)式可求出波的相速

$$v_{\mathrm{p}}=\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu\epsilon_{\parallel}}+\frac{\cos^2\theta}{\mu\epsilon_{\perp}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.24}$$

可见波的相速与波传播方向有关, 这是非寻常波与寻常波的另一区别. 寻常波与非寻常波的电磁场矢量与波传播方向的关系分别示于图 2.9(a)和(b).

如果以电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的方向表示波的极化, 我们可以看到寻常波与非寻常波都是线极化波, 但图 2.9 表明这两个波的极化是正交的. 当一极化方向任意的线极化波入射到单轴晶片上时将分解为极化方向垂直于 yz 平面的寻常波和极化在 yz 平面内的非寻常波. 由于两种波的 k 值不同, 折射角不同, 在晶片内这两个波的射线将分离, 这就是双折射现象. 从晶片射出的这两个波用透镜合成后一般是椭圆极化波, 调整晶片厚度及波的入射角便可获得所希望的极化.

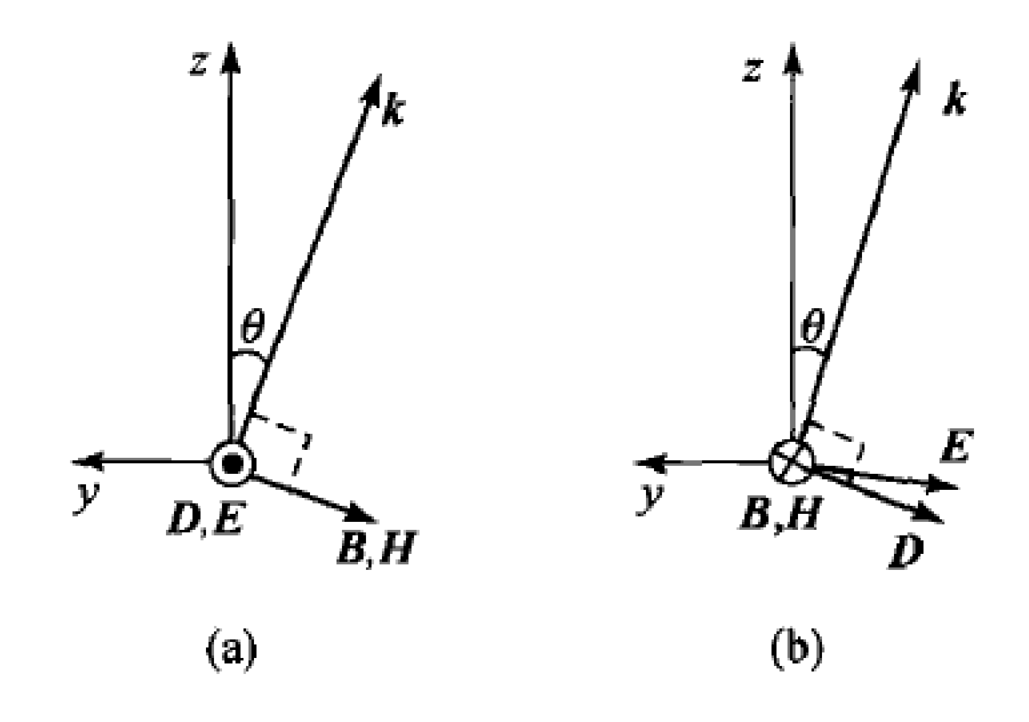


图 2.9 寻常波(a)和非寻常波(b)的电场和磁场方向与波矢量方向的关系

4. 波矢量面与波射线[3,9]

常用一种直观的图形来表示波的传播特性, 这种图形是色散方程

$$f(k_x,k_y,k_z,\omega)=0 \tag{2.3.25}$$

在基矢为 k_x,k_y,k_z 的 $\boldsymbol{k}$ 空间中所表示的曲面, 称为波矢量面. 由(2.3.19)式和(2.3.20)式不难知道单轴晶体中寻常波的波矢量面是半径为 $\omega\sqrt{\mu\epsilon_{\perp}}$ 的球面, 非

寻常波的波矢量面是长、短半轴分别为 $\omega\sqrt{\mu\varepsilon_\perp}$ 和 $\omega\sqrt{\mu\varepsilon_\parallel}$ 的旋转椭球面. 图2.10(a)和(b)分别示出了 $\varepsilon_\parallel > \varepsilon_\perp$ 和 $\varepsilon_\parallel < \varepsilon_\perp$ 两种情况下单轴晶体中寻常波和非寻常波的波矢量面.

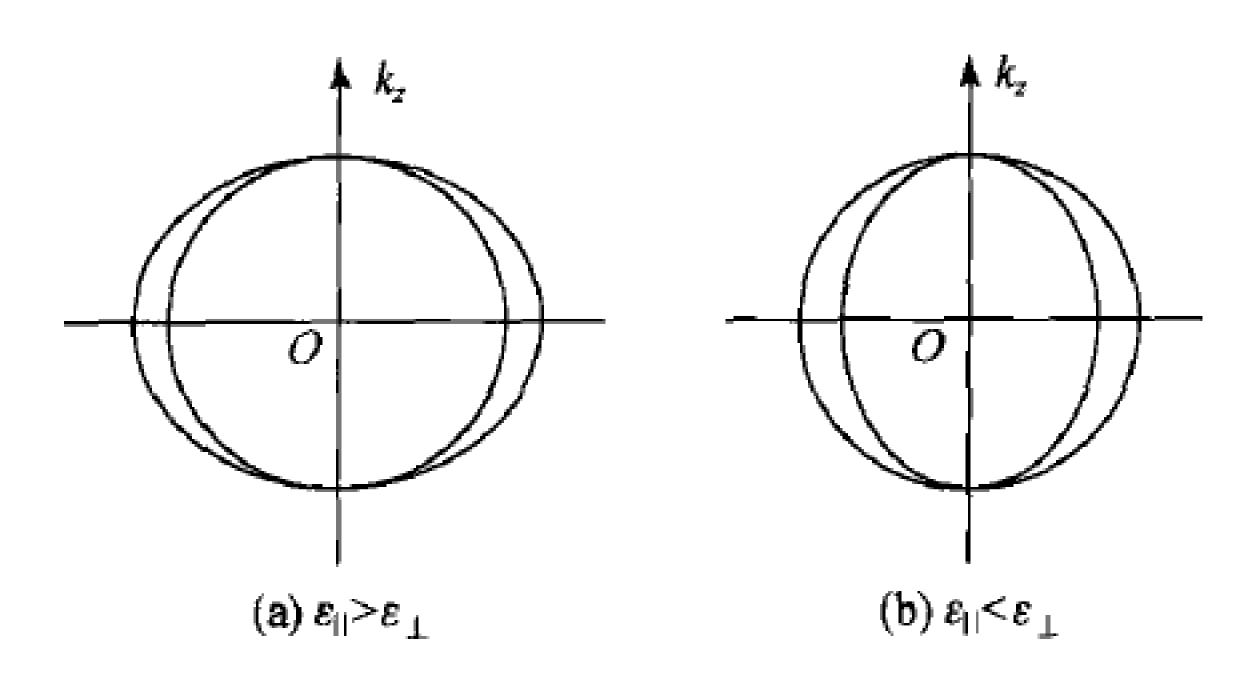


图 2.10　单轴晶体中寻常波和非寻常波的波矢量面

在波矢量面上一确定点的 $\boldsymbol{k}$ 值由从原点引向该点的矢径给出，显然波的相速度 $\boldsymbol{v}_p$ 在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的方向亦由此矢径的方向确定. 另一方面，依照群速度的定义及隐函数求微商的法则可由(2.3.25)式求出群速度的直角坐标分量

$$v_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = -\frac{\partial f/\partial k_i}{\partial f/\partial \omega} \quad (i = x, y, z). \tag{2.3.26}$$

由微分几何我们知道 $\partial f/\partial k_i$ 是曲面(2.3.25)式上相应点的法线的分量，所以群速度 $\boldsymbol{v}_g$ 在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的方向与 $\boldsymbol{k}$ 矢量面上相应点的法线方向一致. 显然，对于寻常波 $\boldsymbol{v}_p$ 与 $\boldsymbol{v}_g$ 的方向是一致的(图 2.11(a))，但对于非寻常波 $\boldsymbol{v}_p$ 与 $\boldsymbol{v}_g$ 的方向一般不同(图 2.11(b))

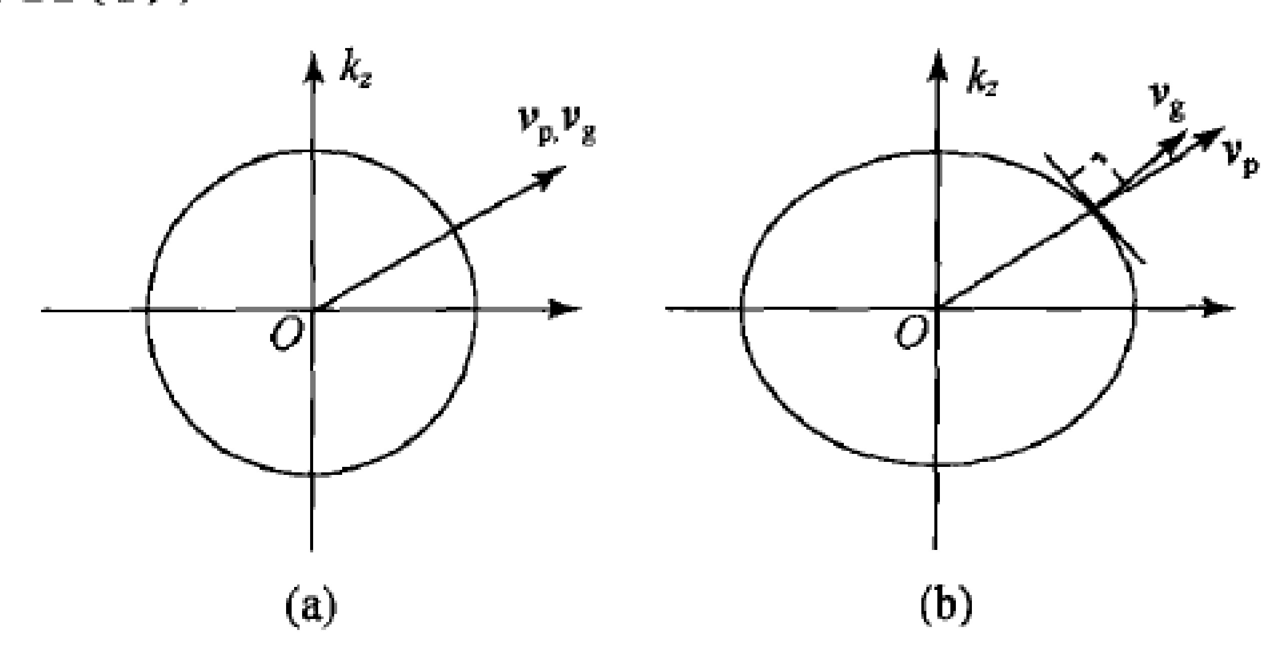


图 2.11　寻常波(a)和非寻常波(b)的相速度和群速度在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的方向

当光在介质中传播时它的时间平均 Poynting 矢量的方向 $\boldsymbol{s}$ 是实际观察到的光射线的方向，$\boldsymbol{s}$ 称为光的射线矢量，而波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向则表示波的等相面运动的方向. 在无耗的各向异性介质中光的射线矢量 $\boldsymbol{s}$ 的方向与群速度 $\boldsymbol{v}_g$ 的方向是一致的. 为证明这点我们将平面波解(2.3.9)式代入 Maxwell 方程组(2.3.6)

式的两个旋度方程,得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B},\tag{2.3.27a}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D}.\tag{2.3.27b}$$

对(2.3.27a)及(2.3.27b)式的复共轭式在频率不变的条件下取微分得

$$\delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{E}=\omega\delta\boldsymbol{B},$$

$$\delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{k}\times\delta\boldsymbol{H}^*=-\omega\delta\boldsymbol{D}^*,$$

再以 $\boldsymbol{H}^*$ 点乘上面的第一式,以 $\boldsymbol{E}$ 点乘第二式,所得的两式相减得

$$2\delta\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*)+\delta\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*)-\delta\boldsymbol{H}^*\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}).$$

上式右方的 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}^*$ 分别用(2.3.27a)式及(2.3.27b)式代入后得

$$2\delta\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\delta\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}^*-\delta\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*).\tag{2.3.28}$$

在介质无耗的情况下 μ 是实数,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是实对称张量,(2.3.28)式右方化为零,便有

$$\delta\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=0.$$

当 ω 不变时 $\delta\boldsymbol{k}$ 是与波矢量面相切的矢量,而且是实矢量,所以上式可改写为

$$\delta\boldsymbol{k}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=0.\tag{2.3.29}$$

(2.3.29)式表明波的射线矢量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于波矢量面,因此与波的群速 $\boldsymbol{v}_g$ 的方向一致.

§2.4　回旋介质中的平面电磁波

1. 磁化等离子体的介电张量

本节要讨论的另一类各向异性介质称为回旋(gyrotropic)介质,磁化等离子体及铁氧体是这类介质的典型代表,为了作较为具体的讨论我们将以磁化等离子体为例.当气体处于完全电离状态时气体原子中的束缚电子完全脱离原子而处于热运动状态,它们与失去电子的裸原子核形成的电中性混合体称为等离子体.处于外加直流磁场中的等离子体则称为磁化等离子体.实际上等离子体是个较为广泛的概念,不仅适用于气态物质,而且也适用于呈宏观电中性的液态或固态正负离子的集合体.

通常当考虑电磁波在气态等离子体中的传播问题时,电磁波的频率远高于正离子的自然谐振频率,仅电子的运动可以被电磁波激发并产生响应,而正离子则被看作是不运动的本底起着静态中和作用.这样的等离子体常称为电子等离子体.在稀薄的电子等离子体(例如地球电离层或外层宇宙空间中的等离子体)中电子之间的碰撞通常可以忽略,在这样的简化模型之下电子在波的交变电磁

场和直流磁场联合作用下的运动方程可以写作

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}_0, \tag{2.4.1}$$

这里 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{j\omega t}$ 是波的电场，$\boldsymbol{B}_0$ 是外加直流磁场. 通常认为直流磁场是均匀的，而且波的交变磁场振幅通常总是小于直流磁场的振幅，所以在(2.4.1)式中已将波的磁场作用力略去. 取 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向为直角坐标系的 z 轴方向，在这个坐标系中运动方程(2.4.1)的直角坐标分量式为

$$\left.\begin{aligned} j\omega v_x &= \frac{e}{m}E_x + \frac{e}{m}B_0 v_y, \\ j\omega v_y &= \frac{e}{m}E_y - \frac{e}{m}B_0 v_x, \\ j\omega v_z &= \frac{e}{m}E_z. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.1a}$$

由(2.4.1a)的前两式可解出

$$\left.\begin{aligned} (\omega_c^2 - \omega^2)v_x &= j\omega \frac{e}{m}E_x - \omega_c \frac{e}{m}E_y, \\ (\omega_c^2 - \omega^2)v_y &= \omega_c \frac{e}{m}E_x + j\omega \frac{e}{m}E_y, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.2}$$

这里

$$\omega_c = \frac{|e|}{m}B_0 \tag{2.4.3}$$

是电子在直流磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中的回旋频率.

考虑到电子运动形成的宏观电流，Maxwell 方程组的磁场旋度方程现在可写为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} = j\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + Ne\boldsymbol{v}, \tag{2.4.4}$$

这里 N 是单位体积中的电子数. 将(2.4.2)式和(2.4.1a)第三式给出的 $\boldsymbol{v}$ 的直角坐标分量代入(2.4.4)式得

$$\left.\begin{aligned} (\nabla \times \boldsymbol{H})_x &= j\omega\varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right]E_x + \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}E_y, \\ (\nabla \times \boldsymbol{H})_y &= -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}E_x + j\omega\varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right]E_y, \\ (\nabla \times \boldsymbol{H})_z &= j\omega\varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]E_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.5}$$

其中

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}, \tag{2.4.6}$$

ω_p 称为电子等离子体频率. 这个量我们在 § 2.1 中讨论电介质的电子极化问题时已遇到过.

由(2.4.5)式不难看出,如果引入张量介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}$,磁场的旋度方程(2.4.4)可以写成

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \tag{2.4.4a}$$

的简单形式,其中的张量介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 具有下面的形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\mathrm{j}\varepsilon_2 & 0 \\ \mathrm{j}\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \tag{2.4.7}$$

矩阵元

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right), \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.4.8}$$

张量介电率 $\boldsymbol{\kappa}_e$ 相应地可写作

$$\boldsymbol{\kappa}_e = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} g_1 & -\mathrm{j}g_2 & 0 \\ \mathrm{j}g_2 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix}. \tag{2.4.7a}$$

现在张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$(或 $\boldsymbol{\kappa}_e$)为一复张量,而且它的非对角线矩阵元有下面的关系:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^* \quad (i \neq j). \tag{2.4.9}$$

具有关系(2.4.9)的矩阵称为 Hermite 型矩阵,相应的张量则称为 Hermite 型张量. 磁化等离子体的介电张量为 Hermite 张量是由介质无耗的假定决定的,重复§2.3 中证明介电张量的对称性(2.3.4)式时的同样步骤可由无耗条件导出(2.4.9)式. 由矩阵代数的知识我们知道 Hermite 型矩阵可通过幺正变换对角化,这个使张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 取对角形的新坐标系是个复螺旋坐标系. 对于较复杂的波传播问题,如磁化方向任意的回旋介质波导或回旋介质填充的金属管波导,在这个复螺旋坐标系中来讨论将使数学处理大为简化[10].

2. 波方程

磁化等离子体中的平面电磁波具有§2.3 第二小节中所指出的各向异性电介质中平面电磁波的一般特性,这里不再重复. 取直角坐标系的 z 轴正向沿直流磁场方向,在该直角坐标系中电场复数振幅所满足的矢量波动方程(2.3.10a)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} k^2-k_x^2-k_0^2g_1 & -k_xk_y+\mathrm{j}k_0^2g_2 & -k_xk_z \\ -k_xk_y-\mathrm{j}k_0^2g_2 & k^2-k_y^2-k_0^2g_1 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k^2-k_z^2-k_0^2g_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}=0,$$

(2.4.10)

相应的色散方程为

$$\det\begin{bmatrix} k^2-k_x^2-k_0^2g_1 & -k_xk_y+\mathrm{j}k_0^2g_2 & -k_xk_z \\ -k_xk_y-\mathrm{j}k_0^2g_2 & k^2-k_y^2-k_0^2g_1 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k^2-k_z^2-k_0^2g_3 \end{bmatrix}=0. \quad (2.4.11)$$

波动方程(2.4.10)的一般求解非常复杂，下面将针对两种具体的情况求解.

3. 平行于外磁场方向传播的波[2,9,11]

这时 $k_x=k_y=0$，$k_z=k$，由色散方程(2.4.11)解出

$$k=\pm k_0(g_1\pm g_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4.12)$$

k_0 前面的±号相应于沿±z 方向传播的波. 我们只讨论沿+z 方向传播的波，以相应的 k 代回波动方程(2.4.10)可以解出

$$E_{0z}=0,\quad E_{0y}/E_{0x}=\pm\mathrm{j}, \quad (2.4.13)$$

式中 j 前面的±号与(2.4.12)式括号内的±号对应. 因此，波的电场可写作

$$\boldsymbol{E}=E_{0x}(\boldsymbol{a}_x\pm\mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}, \quad (2.4.14)$$

或写成实数形式

$$\boldsymbol{E}=E_{0x}[\boldsymbol{a}_x\cos(\omega t-kz)+\boldsymbol{a}_y\cos(\omega t-kz\pm\pi/2)]. \quad (2.4.14\text{a})$$

当沿波传播的+z 方向看去时，+$\pi/2$ 的波电矢量沿逆时针方向旋转，为左旋(−)圆极化波；−$\pi/2$ 的波电矢量沿顺时针方向旋转，为右旋(+)圆极化波.

为求波的磁场需先求出电位移矢量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_0&=\varepsilon_0\boldsymbol{\kappa}_e\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{a}_x\varepsilon_0E_{0x}(g_1\pm g_2)\pm\mathrm{j}\boldsymbol{a}_y\varepsilon_0E_{0x}(g_1\pm g_2)\\&=\varepsilon_0(g_1\pm g_2)(\boldsymbol{a}_x\pm\mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)E_{0x}\\&=\varepsilon_0(g_1\pm g_2)\boldsymbol{E}_0^{\mp},\end{aligned} \quad (2.4.15)$$

这里

$$\boldsymbol{E}_0^{\mp}=(\boldsymbol{a}_x\pm\mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)E_{0x} \quad (2.4.14\text{b})$$

分别表示左旋(−)及右旋(+)圆极化波的电场振幅. (2.4.15)式代入(2.3.12)式后即可求出磁场振幅

$$\left.\begin{aligned}H_{0x}&=-(\omega/k)D_{0y}=\mp\mathrm{j}(\omega/k)\varepsilon_0(g_1\pm g_2)E_{0x},\\H_{0y}&=(\omega/k)D_{0x}=(\omega/k)\varepsilon_0(g_1\pm g_2)E_{0x},\end{aligned}\right\} \quad (2.4.16)$$

横向磁场振幅之比仍然有

$$B_{0y}/B_{0x}=H_{0y}/H_{0x}=\pm\mathrm{j}, \quad (2.4.17)$$

可见磁场也为相应的左旋或右旋圆极化波.

以上的讨论说明,当波的传播方向平行于外磁场方向时,波动方程的两个特解是旋转方向相反的两个圆极化波,它们均只有与波传播方向 $\boldsymbol{k}$ 垂直的电磁场分量,在这个意义上说仍是 TEM 波. 正是因为波电场没有纵向分量,现在电位移 $\boldsymbol{D}^{\mp}$ 与电场 $\boldsymbol{E}^{\mp}$ 之间彼此平行,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的张量关系现在变成简单的比例关系. 由于在复螺旋坐标系中介电张量是对角化的,这两个圆极化波正是对角化的张量波方程的本征矢,或称为特征波. 因为圆极化特征波的极化矢量是旋转的,所以这种介质被称为回旋介质.

值得注意的是,两种圆极化波的等效介电常数 $\varepsilon_{\text{eff}}^{\mp}=g_1\pm g_2$ 作为频率的函数是不同的,所以这两个圆极化波的色散特性不同. 在图 2.12 中对于典型的电离层电子浓度和磁场强度值($f_{\text{p}}=2.8\,\text{MHz}$, $f_{\text{c}}=1.4\,\text{MHz}$)绘出了 $\varepsilon_{\text{eff}}^{\mp}$ 作为归一化频率 f/f_{c} 的函数曲线. 由图可见这两个波的色散特性显著不同,左旋波 $\varepsilon_{\text{eff}}^{-}$ 随 f/f_{c} 的变化是连续而缓慢的,而右旋波的色散曲线当 $f\to f_{\text{c}}$ 时断裂,分成了两支. 右旋波色散曲线的断裂是由于右旋波与在磁场中作回旋运动的电子之间发生的共振相互作用造成的. 在 $+z$ 方向的外加直流磁场中电子在 xy 平面内的回旋运动是右旋的,当 $f\to f_{\text{c}}$ 时电子的旋转可以和右旋波的旋转同步而强烈地吸收波的能量,但作右旋运动的电子却不能与左旋波之间发生这样的共振相互作用. 图中 $\varepsilon_{\text{eff}}^{\mp}=0$ 的点对应于波的截止频率,左旋波在截止频率以下不能传播,但右旋波存在着一个趋近于 $f=0$ 的低通频带,在极低频也可传播,这可以用来解释哨声(whistlers)在电离层中的传播[2].

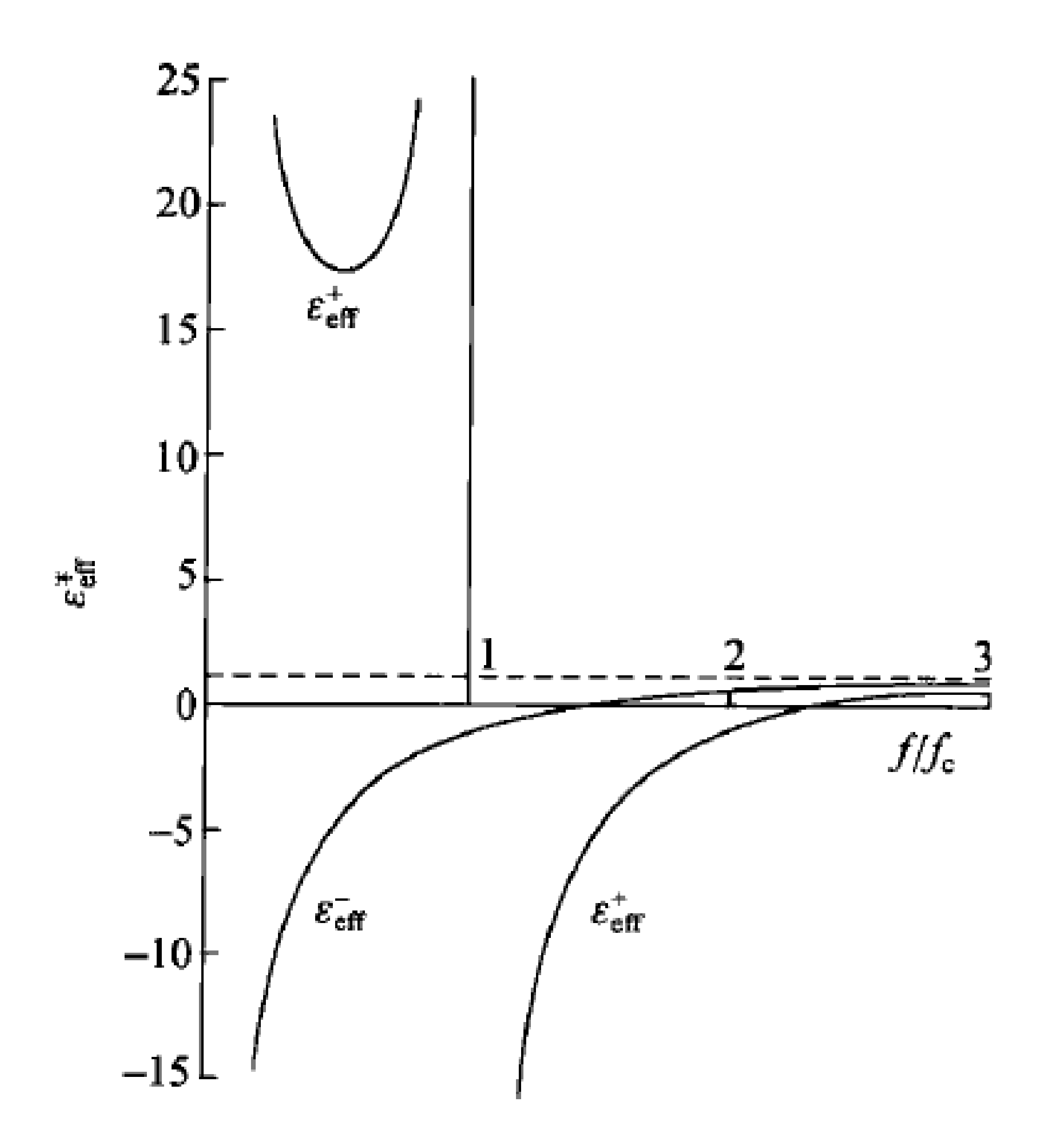


图 2.12　平行于外磁场方向传播时电离层中左旋和右旋圆极化波的色散曲线

当一线极化平面波沿外磁场方向射入磁化等离子体时,线极化波将分解为

左旋及右旋圆极化波，若波的频率高于这两者的截止频率时它们都可以传播. 但这两个圆极化波的相速不同，图 2.12 表明右旋波的相速较高，因此它的电矢量的旋转速度也较快. 当波向前传播一段距离后右旋波电矢量转过的角度较左旋波大，这两个圆极化波所合成的线极化波的极化方向将相对于入射波的极化方向向右旋转，这种现象称为 Faraday 旋转. 当波在等离子体的边界被反射回来并沿着与外磁场相反的方向传播时，相对于外磁场方向作左旋和右旋的圆极化分量的旋转速度不变，还是右旋波的旋转速度快，故合成线极化波后，极化方向仍是相对于外磁场方向继续向右旋转. 因此 Faraday 旋转效应是一种不可逆效应，回旋介质是不可逆介质，(1.4.6)式形式的互易定理不再成立.

在地球同步轨道卫星与地面站的通信过程中电磁波束要穿过电离层，由于地磁场的存在会发生 Faraday 旋转. 如果使用线极化波，由于 Faraday 旋转产生的极化方向旋转会给电磁波的有效接收带来一定的困难，故在 C 波段(4/6 GHz)的卫星通信系统中多使用圆极化波以克服 Faraday 旋转效应产生的不利影响. 另一方面 Faraday 旋转效应在微波技术中得到了有效地应用，用微波铁氧体及钇铁石榴石(YIG)制作的不可逆微波元件在现代微波技术中有着重要的应用.

4. 垂直于外磁场方向传播的波[9,11]

外磁场方向仍取为 z 轴方向，可以取波传播方向为 x 轴方向，这时有 $k_x=k$，$k_y=k_z=0$，代入色散方程(2.4.11)后可得到两个解：

$$k = k_0[g_3]^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.18}$$

和

$$k = k_0\left[\frac{g_1^2-g_2^2}{g_1}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.19}$$

这两个解分别相应于寻常波和非寻常波. 下面分别予以讨论.

(1) 寻常波

色散方程的解(2.4.18)为寻常波，这不难从它的电磁场分量看出. 将(2.4.18)式代入波动方程(2.4.10)即可知它的电场仅有 z 分量：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_z E_{0z} e^{j(\omega t - kx)}, \tag{2.4.20}$$

电位移也仅有 z 分量：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 g_3 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_z \varepsilon_0 g_3 E_{0z} e^{j(\omega t - kx)}, \tag{2.4.21}$$

仅有的磁场分量则为 y 分量

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y H_y = -\boldsymbol{a}_y \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\ \sqrt{g_3} E_z. \tag{2.4.22}$$

因此，相对于波的传播方向 x 这个波是线极化的 TEM 波，波的极化方向与外磁

场方向平行(图 2.13). 这个波的特性与 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0 g_3$ 的各向同性介质中的线极化平面波完全相同,所以是寻常波.

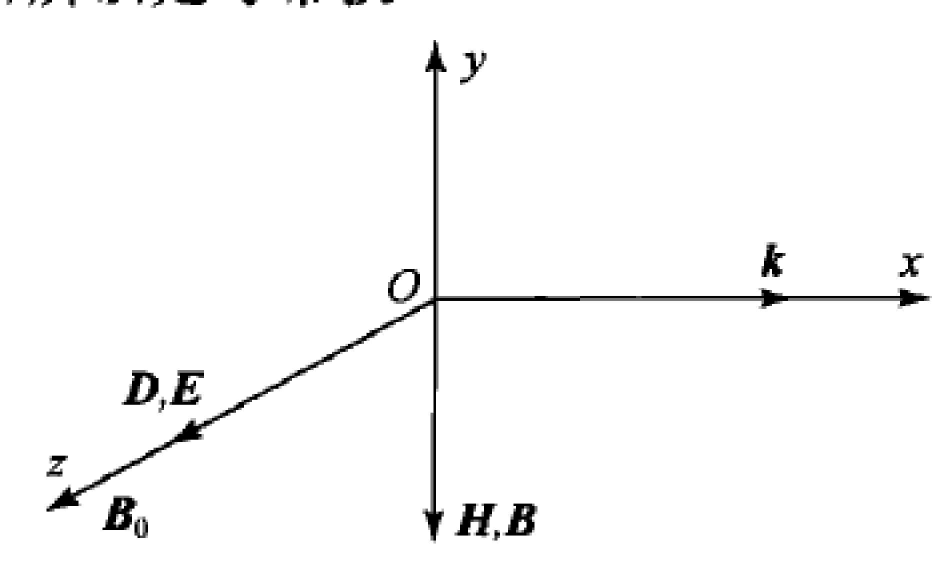


图 2.13 垂直于外磁场方向传播时的寻常波

(2) 非寻常波

以解(2.4.19)代入波动方程(2.4.10)可解出电场有两个分量 E_x 及 E_y,而且这两个分量振幅之比为纯虚数:

$$E_{0x}/E_{0y}=\mathrm{j}g_2/g_1, \tag{2.4.23}$$

因此,电场是 xy 平面内的椭圆极化波,而且存在着沿波传播方向的电场分量. $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$(以及 $\boldsymbol{B}$)没有沿波传播方向的分量,只有横向分量:

$$D_y=\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}}E_y, \tag{2.4.24}$$

$$H_z=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}E_y, \tag{2.4.25}$$

这里

$$\varepsilon_{\text{eff}}=\frac{g_1^2-g_2^2}{g_1}=\frac{f^2-f_c^2-2f_p^2+(f_p^2/f)^2}{f^2-f_c^2-f_p^2}. \tag{2.4.26}$$

波的电磁场与传播方向之间的关系示于图 2.14,不难看出这是非寻常波.

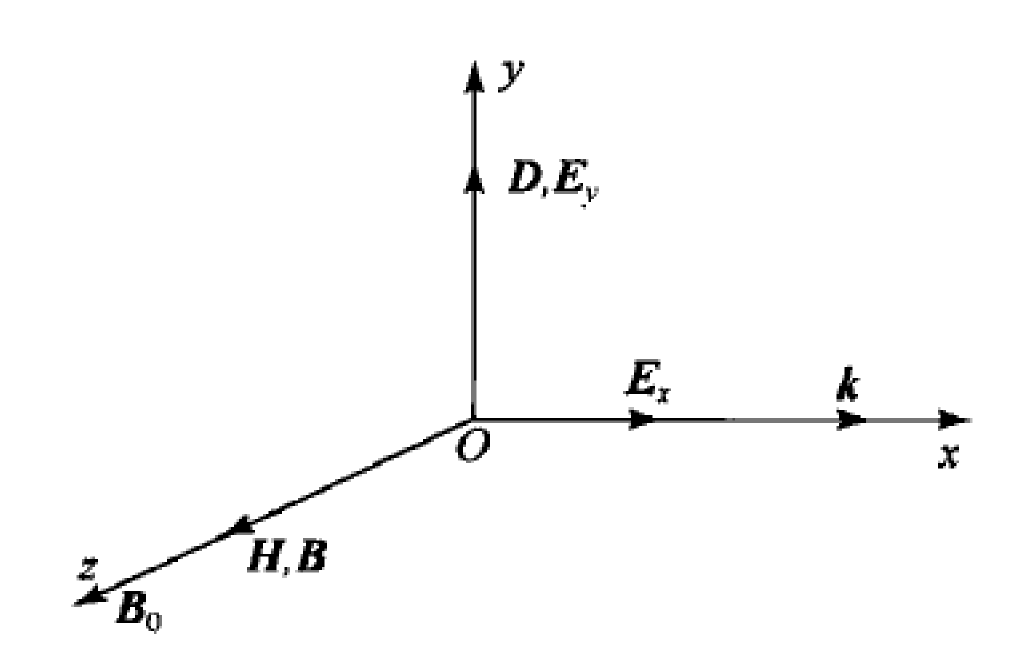


图 2.14 垂直于外磁场方向传播时的非寻常波

波的色散特性由函数(2.4.26)式确定,对于与图 2.12 相同的典型电离层参量,非寻常波的色散曲线示于图 2.15. 可以看到 ε_{eff} 作为 f/f_c 的函数曲线分裂成了两支. 图中的极点位于

$$f_0=(f_c^2+f_p^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}f_c, \tag{2.4.27}$$

两个零点分别位于

$$f_{1,2}=\frac{f_c}{2}\left\{\pm 1+\left[1+\left(\frac{2f_p}{f_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=(1.56,\ 2.56)f_c. \qquad (2.4.28)$$

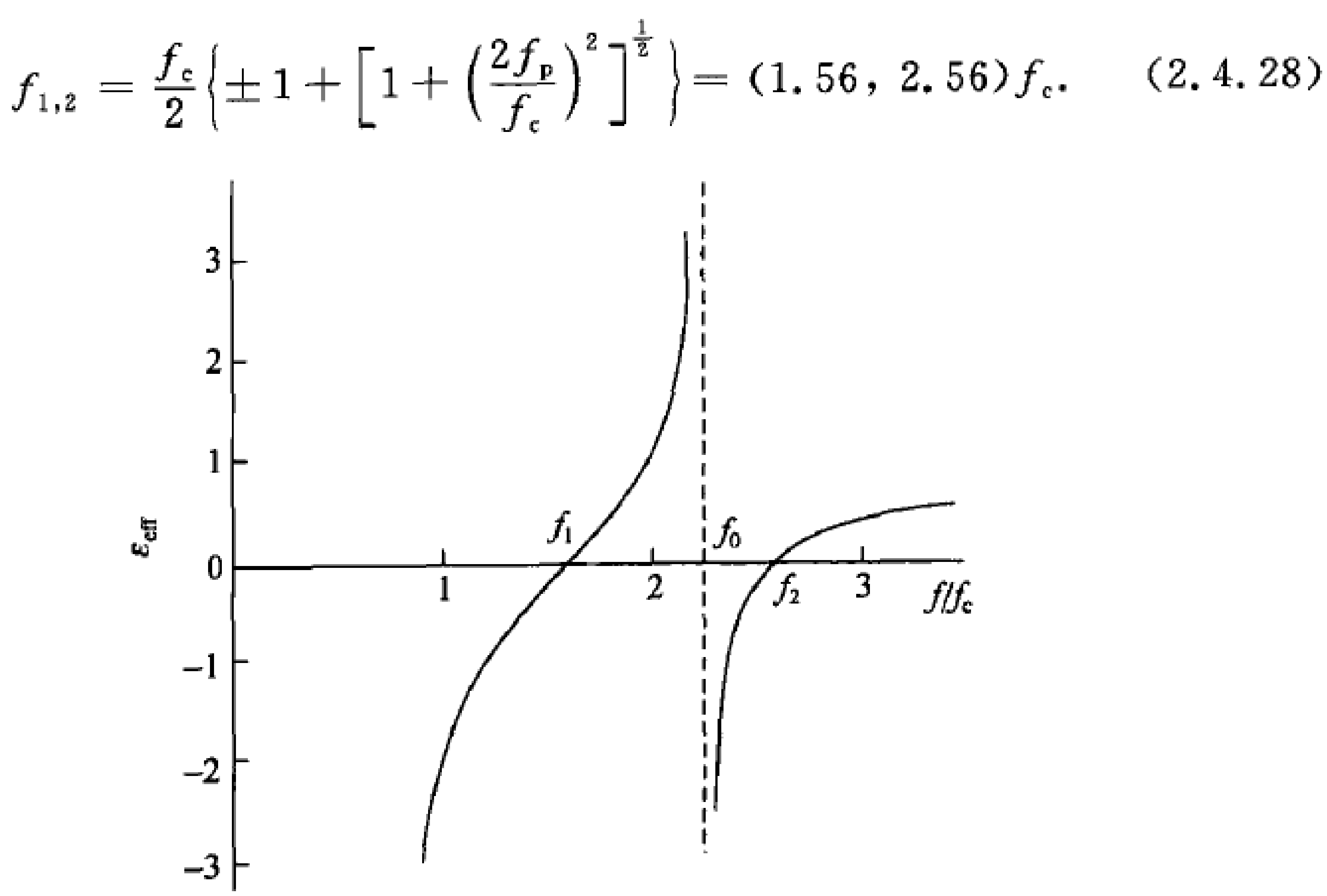


图 2.15　垂直于外磁场方向传播时电离层中非寻常波的色散曲线

在 f_1 与 f_0 之间为一低通频带，$f>f_2$ 为高通频带，因此磁化等离子体对于非寻常波的传播相当于带通滤波器.

§2.5　手征介质中的平面电磁波

1. 自然旋光性与手征性微结构

早在 19 世纪初当人类掌握了获得线偏振光的技术之后，D. F. Arago (1811)和 J. B. Biot (1812)先后在实验中发现当线偏振光在石英晶体中传播时，其偏振面会发生旋转. 随后，A. Fresnel (1822)发现当线偏振光沿石英的晶轴传播时，分解为两条旋转方向相反且具有不同相速的圆偏振射线. 当这两条圆偏振射线离开石英片又合成为线偏振波时，由于两者转过了不同的角度，合成后的波偏振方向相对于入射波发生偏转. 这种现象被称为自然旋光性(natural optical activity). 这是一种与 Faraday 旋转(见上节)不同的偏振面旋转现象，因为它是可逆的. 如果在石英片的下端将透射出的线偏振波反射回来，经过在石英中反方向传播后再合成的波，其偏振方向又回到原先的入射波偏振方向. 在磁化等离子体中的波，由于直流磁场的加入破坏了空间的对称性，Faraday 旋转是不可逆的，它可以被称为磁旋光性(magnetic optical activity).

法国化学家和生物学家 L. Pasteur(巴斯德)对自然旋光性的机理提出了如下

推测(1848)：发生自然旋光性的物质的分子具有空间不对称性，即手征性. 手征性为一几何学概念，若一几何体不能通过平移或旋转与其镜像(对映体)重合，则称其具有手征性. 几何学中著名的 Möbius 带即具有手征性，其他如不规则四面体等也是，而最典型的是手，左手是右手的镜像，右手不可能通过平移或旋转与左手重叠，反之亦然. 手征性的英语词 chirality 正是来源于希腊字的手(chiro). 自然界中最多的手征性结构为螺旋，分为左手螺旋和右手螺旋，互为镜像. 具有手征性的物质其分子的几何结构分为左手性的和右手性的. Pasteur 对具有自然旋光性的酒石酸溶液的研究发现，当溶液中两种手性的晶体比例相同时不发生自然旋光性，而当某一种手性的晶体占优势时会发生自然旋光性. 在 20 世纪初年，以 M. Born(1915)为代表的近现代物理学家用空间分布的耦合振子为分子模型对自然旋光性作了理论研究，使自然旋光性的机理建立在现代物理的坚实基础之上.

虽然已不属于电磁学的范畴，但在此有必要指出，自然界中大量的手征性微结构存在于有机体和生物体中，特别是在生命的基本组成中，例如左手型的 L-氨基酸，右手型的 D-糖，以及更重要的 DNA 双螺旋结构. 可以说自然旋光性是多样的生物世界的一致特征.

由于光频比微波频率高 5 个数量级以上，分子结构尺度过小，观察不易. 芬兰学者 K. F. Lindman 运用缩尺原理首先在微波频段对手征性结构对电磁波传播的影响进行了实验观察. 他用厘米尺度的铜制微螺旋结构制作手征性宏观介质，在 1～3 GHz的微波频率范围实验观察到电磁波极化方向的旋转. 到了 20 世纪 90 年代前后，人工制作的手征性电磁介质的特性及工程应用前景引起了微波工程领域的研究兴趣，Lindman 于 1920 年发表的上述实验研究成为第一项有关电磁手征性的研究.

2. 手征性电磁介质的结构关系

为研究手征性电磁介质的电磁性质，首先需要建立它的结构关系. 在 C. H. Papas 指导下的一项研究首先提出了由一匝平面螺旋和与其垂直相连的上、下两段直导线构成的左旋和右旋手征性微结构，作为手征介质分子的简化模型，见图 2.16[①]. 当外电磁波作用于手征性电磁介质时，外电场在直导线上会感应电流，产生电偶极矩；直导线电流导致平面螺旋匝上的环形电流，从而产生磁矩. 同样，外磁场会在平面螺旋匝上感应电流而产生磁矩，延伸至直导线段的

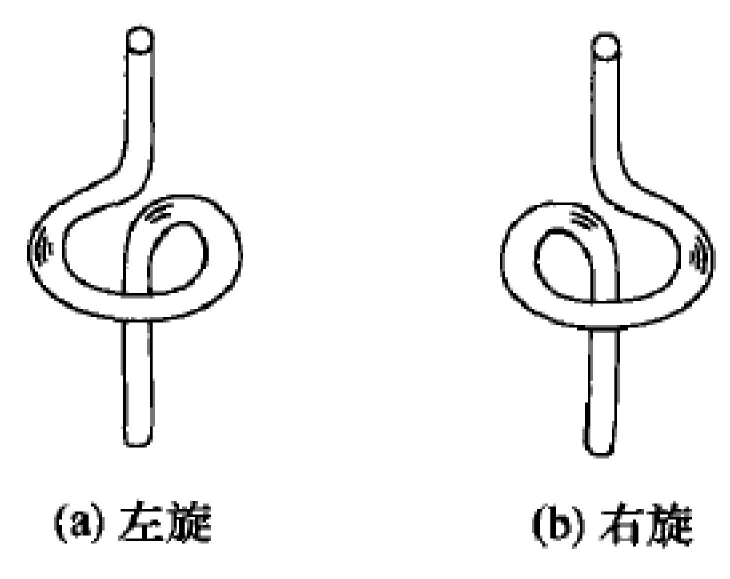


图 2.16 由平面螺旋和直导线构成的手征介质“分子”

① D. L. Jaggard, A. R. Michelson and C. H. Papas, On electromagnetic waves in chiral media, *Applied Physics*, vol. 18, pp. 211—216, 1979.

电流会产生电偶极矩. 由大量均匀分布和无规取向的同种手性微结构构成的宏观介质,每单位体积的平均电偶极矩和磁矩与外电磁场之间有关系:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} + \gamma_e \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{M} &= -\gamma_m \boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}\chi_m \boldsymbol{B}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.1}$$

现在,电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 不仅由电场产生,也由磁场产生;同样,磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 不仅由磁场产生,也由电场产生. 这里,交叉项的系数 γ_e 和 γ_m 具有导纳的量纲,称为手征导纳,是手征性电磁介质的重要参量.

由电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的定义

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H}, \tag{2.5.2}$$

可得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + \gamma_e \boldsymbol{B}, \tag{2.5.3}$$

$$\boldsymbol{H} = \gamma_m \boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}, \tag{2.5.4}$$

这里 $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$, $\mu = \mu_0/(1-\chi_m)$. 一般而言,对于损耗介质,$\varepsilon, \mu, \gamma_e, \gamma_m$ 是复数.

将(2.5.3)和(2.5.4)式代入复数 Poynting 定理(1.1.12),由无耗条件得 $\gamma_e = -\gamma_m^*$,而且 ε 和 μ 须为实数. 自然旋光性是可逆的,这就要求 γ_e 和 γ_m 为纯虚数①. 因此,无耗的手征介质的手征导纳

$$\gamma_e = \gamma_m = -\gamma, \tag{2.5.5}$$

这里 γ 为实数,可正可负. 对于无损耗的手征介质,我们使用下面的结构关系:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} - \mathrm{j}\gamma \boldsymbol{B}. \tag{2.5.6}$$

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\gamma \boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}. \tag{2.5.7}$$

熟悉相对论的读者知道,相对于静止参照系运动的各向同性介质,其介电常数和磁导率都变为张量,而且电场和磁场之间发生交叉响应,结构关系变为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \tag{2.5.8}$$

式中 **P**,**L**,**M** 和 **Q** 为二阶张量,这样的介质称为双各向异性介质. 将手征介质的结构关系(2.5.6)和(2.5.7)式与(2.5.8)式比较,相当于 **P**,**L**,**M** 和 **Q** 四个二阶张量现在都变成标量,具有(2.5.6)和(2.5.7)式类型结构关系的介质称为双各向同性介质,手征介质是其中的一种.

---

① 见[9], § 5.5, p. 403.

可以将手征介质的结构关系写成另外的形式.将(2.5.6)和(2.5.7)式分别改写为

$$\boldsymbol{D}=(\varepsilon+\gamma^2\mu)\boldsymbol{E}-\mathrm{j}\gamma\mu\boldsymbol{H}, \tag{2.5.9}$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{j}\gamma\mu\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H}. \tag{2.5.10}$$

对于时谐场,在(2.5.9)式中利用 Faraday 电磁感应定律$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$ 消去 $\boldsymbol{H}$;在(2.5.10)式中运用 Ampère-Maxwell 定理$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$ 消去 $\boldsymbol{E}$ 后分别得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_1[\boldsymbol{E}+\beta(\nabla\times\boldsymbol{E})], \tag{2.5.11}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_1[\boldsymbol{H}+\beta(\nabla\times\boldsymbol{H})], \tag{2.5.12}$$

式中 $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\mu_1=\mu\varepsilon/(\varepsilon+\gamma^2\mu)$, $\beta=\gamma/(\omega\varepsilon)$. 这两个新的结构关系表示式说明手征介质中某空间点的 $\boldsymbol{D}$ 不仅与该点的 $\boldsymbol{E}$ 有关,而且与该点周围各点的 $\boldsymbol{E}$ 有关,因为要求出$\nabla\times\boldsymbol{E}$ 须知道 $\boldsymbol{E}$ 在该点邻域的变化. $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 有同样的关系. 这种类型的介质被称为具有空间色散,以类比于介质常数与频率有关被称为频率色散. 由于有机体均具有自然旋光性,可见有机体(更进一步,生物体)的电磁特性也的确反映了机体组织之间的更紧密联系.

3. 手征性电磁介质中的平面电磁波

先来导出波动方程. 将结构关系(2.5.6)和(2.5.7)式中的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别代入 Ampère-Maxwell 方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$,得

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}-\mathrm{j}\gamma\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\omega\gamma\boldsymbol{B}.$$

对 Faraday 电磁感应定律$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$ 取旋度后代入上式左侧的$\nabla\times\boldsymbol{B}$,再次利用$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$ 将上式右侧的 $\boldsymbol{B}$ 换成$\nabla\times\boldsymbol{E}$,便得 $\boldsymbol{E}$ 满足的波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-2\omega\gamma\mu\boldsymbol{E}-\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0. \tag{2.5.13}$$

类似地,可以导出 $\boldsymbol{H}$ 满足完全相同的波动方程. 利用矢量等式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$ 并考虑到$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,波动方程(2.5.13)便化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+2\omega\gamma\mu\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0, \tag{2.5.14}$$

式中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$.

在均匀的手征介质中沿 z 轴传播的平面电磁波设为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}hz}=(E_{0x}\boldsymbol{a}_x+E_{0y}\boldsymbol{a}_y+E_{0z}\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}hz}, \tag{2.5.15}$$

由于$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 可证 $E_{0z}=0$,平面波仍然保持各向同性介质中的横波特性. (2.5.15)式代入(2.5.14)式得

$$\left.\begin{aligned}(k^2-h^2)E_{0x}+\mathrm{j}h2\omega\gamma\mu E_{0y}&=0,\\-\mathrm{j}h2\omega\gamma\mu E_{0x}+(k^2-h^2)E_{0y}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.5.16}$$

场振幅的非零解条件导致

$$(k^2 - h^2) - \omega^2 \gamma^2 \mu^2 h^2 = 0,$$

其解给出平面波的两个传播常数

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \omega\gamma\mu + [(\omega\gamma\mu)^2 + k^2]^{\frac{1}{2}}, \\ h_2 &= -\omega\gamma\mu + [(\omega\gamma\mu)^2 + k^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5.17}$$

这两个传播常数代表着可以在手征性电磁介质中传播的两个本征模式.

将 h_1 代入(2.5.16)的第一式，得

$$(k^2 - h_1^2)E_{0x} + \mathrm{j}h_1 2\omega\gamma\mu E_{0y} = 0,$$

经简单代数运算后得

$$E_{0x} = \mathrm{j}E_{0y}. \tag{2.5.18}$$

因此，第一个解

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{01}(\boldsymbol{a}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}h_1 z}, \tag{2.5.19}$$

这是右旋圆极化波. 将(2.5.19)式代入结构关系

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\gamma\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} = -\mathrm{j}\gamma\boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{2.5.20}$$

求出 h_1 波的磁场

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon/\mu}\,E_{01}(\boldsymbol{a}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}h_1 z}, \tag{2.5.21}$$

仍为右旋圆极化波. 电场与磁场幅度之比，即波阻抗，为

$$Z = \frac{E_{0x}}{H_{0y}} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon/\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1 + (\mu/\varepsilon)\gamma^2}}. \tag{2.5.22}$$

如果将(2.5.17)式的 h_2 代入(2.5.16)式，将得

$$E_{0x} = -\mathrm{j}E_{0y}, \tag{2.5.23}$$

将它代入(2.5.15)式得到第二个解

$$\boldsymbol{E}_2 = E_{02}(\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}\,\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}h_2 z},$$

这是左旋圆极化波，其波阻抗仍为(2.5.22)式.

若 $\gamma > 0$，$h_1 > k > h_2$，右旋圆极化波相速低于左旋圆极化波；反之，若 $\gamma < 0$，$h_1 < k < h_2$，右旋圆极化波的相速较高. 当一线极化波射入手征性介质后，它将分解为左旋和右旋圆极化波. 由于相速不同，传播一定距离后再重新合成为线极化波，极化方向便相对入射波线极化方向发生偏转.

当电磁波在手征介质表面反射或透入时，辐射源从手征介质中辐射，以及电磁波在手征介质上的散射等都具有新的特征. 对这些新特征加以应用是制作和研究电磁手征介质的目的所在，是目前仍在继续研究的课题.

§2.6 负电磁常数人工媒质

1. 人工仿真电介质；Lorentz 理论[12]

上节介绍的人工手征性介质并非仅有的人工电磁介质.早在20世纪40年代后期已开始了微波频率人工仿真电介质的研究,用以制作微波透镜天线,因为原来用自然的电磁波透明材料制作的微波透镜天线体积大,导致重量过大.所研制的人工仿真电介质由大量相同的导体结构按与晶格类似的等间距三维规则点阵排放构成,阵点由轻质介质支撑,或在其间填充泡沫塑料形成支撑.在外电场作用下导体微结构上的电荷重新分布,形成的感应场分布与外电场分布抵消时达到平衡态.每一个微结构是电中性的,但由于电荷重新分布而呈现电偶极矩,相当于电介质的一个极性分子.当微结构的间距小于 $0.1\lambda_0$(λ_0 为人工介质的工作波长)而且微结构的尺度小于其间距时,可以认为微结构之间只有偶极互作用.这是原来 Lorentz 研究自然界电介质时所使用的模型,称为 Lorentz 模型或 Lorentz 局部场理论.

设想人工介质点阵为矩形,将其中心阵元放置在坐标原点,阵元沿坐标轴 x,y 和 z 三个方向的间距设为 a,b,c,并假设点阵在三个坐标轴的正负两个方向上都是无限延伸的.为简单起见,设外加电场 E_0 沿 y 轴方向.由于对称性,作用于原点的微结构的有效电场(外加电场与所有其他微结构的感应场之和)也只有 y 分量,用 E_{ey} 表示.原点微结构的电偶极矩 p 与 E_{ey} 成正比：

$$p = \alpha_e \varepsilon_0 E_{ey}, \tag{2.6.1}$$

这里 α_e 为分子极化率,具有体积的量纲(参见附录 C).由于假定点阵为矩形,α_e 在不同的坐标轴方向取值不同,现在 α_e 表示 y 方向的分子极化率.人工介质的宏观电极化强度,即每单位体积中的电偶极矩

$$P = N\alpha_e \varepsilon_0 E_{ey}, \tag{2.6.2}$$

这里 N 为单位体积中的微结构数,具有体积倒数的量纲.

在 Lorentz 模型下,$E_{ey}=E_0+E_{iy}$,E_{iy} 为所有其他电偶极子在原点产生的场,可以写作

$$E_{iy} = \frac{I}{\varepsilon_0} p, \tag{2.6.3}$$

式中的 I 称为互作用常数,具有体积倒数的量纲.由(2.6.1)式有

$$p = \alpha_e \varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{I}{\varepsilon_0} p\right) = \alpha_e \varepsilon_0 E_0 + \alpha_e I p. \tag{2.6.4}$$

由上式可解出

$$p = \alpha_e \varepsilon_0 E_0/(1-\alpha_e I), \tag{2.6.5}$$

便有

$$P = N\alpha_e \varepsilon_0 E_0/(1-\alpha_e I). \tag{2.6.6}$$

由电位移矢量的定义 $D=\varepsilon_0 E+P$，现在介质中 y 方向的平均电位移为

$$D_{ay} = \varepsilon_0 E_{ay} + P = \kappa\varepsilon_0 E_{ay}, \tag{2.6.7}$$

E_{ay}为介质中 y 方向的平均电场，即外场与所有其他偶极子平均场之和，$E_{ay}=E_0+E_{pay}$，E_{pay}为所有其他偶极子的平均场的 y 分量，κ 为 y 方向的相对介电常数. 由(2.6.7)式解出

$$\kappa = 1+\frac{P}{\varepsilon_0 E_{ay}} = 1+\frac{P}{\varepsilon_0(E_0+E_{pay})}. \tag{2.6.8}$$

如果导体微结构对于通过其中心的坐标平面具有对称性(通常，人工介质的微结构作如此设计)，所有感生偶极子的场的平均值为零，$E_{pay}=0$，再将(2.6.6)式的 P 代入(2.6.8)式便得人工介质 y 方向的相对介电常数

$$\kappa = 1+N\alpha_e/(1-\alpha_e I), \tag{2.6.9}$$

只要知道分子极化率 α_e 和互作用常数 I 便可求出 κ. (2.6.9)式在形式上与(2.1.9b)式感应极化分子电介质的相对介电常数表达式相似，为 Clausius-Mossotti 类型的表达式.

分子极化率 α_e 与导体微结构的形状有关，它的值可由静电学解求得. [12]的表 12.1 给出了球和旋转椭球的 α_e 值，例如球的 $\alpha_e=4\pi r^3$，r 为球半径. 但互作用常数 I 的计算涉及相当冗繁的数学过程，可参考[12]的 §12.3. 对于立方晶格，$a=b=c$，Lorentz 给出的互作用常数为 $I=(3b^3)^{-1}$，代入(2.6.9)式得

$$\kappa = 1+\frac{N\alpha_e}{1-\alpha_e/(3b^3)}. \tag{2.6.9a}$$

由于导体微结构是放置在它的支撑介质中，(2.6.9a)式所给出的 κ 应理解为相对于其支撑介质的相对介电常数.

2. 混合公式[13]

另一种制作人工介质的方法是使用介质微结构. 对浸没于均匀背景介质中的稀疏球形介质微结构，可以在静电近似下求出它的介电常数. 设球形介质微结构的半径为 a，介电常数为 ε_1，分布于介电常数为 ε 的背景介质中，微结构之间的间距 b 远小于波长，a 远小于间距 b. 通过下面的静电问题的解可近似求出所构造的人工介质的介电常数.

在该人工介质中划出半径为 r_0 的球形区域，要求球内含有足够多的微结构介质球，其总数设为 n，设球外区域没有微结构. 取球心为原点，球坐标系的极轴 z 与外加均匀场 $\boldsymbol{E}_0$ 平行，求球外 $r\gg r_0$ 处的静电势分布 $\psi(\boldsymbol{r})$.

首先,使用对微结构电偶极矩的势求和的方法来求解.略去感生电偶极矩之间的相互作用,球外的静电势可以写作

$$\psi = -E_0 r\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} = -E_0 r\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\cos\theta_i}{r_i^2}.$$

在距球面 r_0 足够远处,$p_i=p$,$r_i=r$, $\theta_i=\theta(i=1,2,\cdots,n)$.一个微结构介质球的电偶极矩与 E_0 和 a^3 成正比,可以写作

$$p = 4\pi\varepsilon E_0 a^3\chi, \tag{2.6.10}$$

现在,χ 为无量纲的分子极化率.这样的 n 个微结构介质球的感生电偶极矩在球外远处电势的叠加便简单地写作

$$\psi = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 n a^3}{r^2}\chi\cos\theta. \tag{2.6.11}$$

另一方面,若视半径 r_0 的球为具有等效介电常数 ε_e 的连续介质,在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中极化后,其在球外区域产生的静电势为

$$\psi = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_e-\varepsilon}{\varepsilon_e+2\varepsilon}\frac{E_0 r_0^3}{r^2}\cos\theta. \tag{2.6.12}$$

令(2.6.11)和(2.6.12)式的静电势相等,便有

$$\frac{\varepsilon_e-\varepsilon}{\varepsilon_e+2\varepsilon} = \frac{na^3}{r_0^3}\chi = f\chi. \tag{2.6.13}$$

式中的 $f=na^3/r_0^3$,表示微结构介质球占有的总体积与球 r_0 的体积之比,即微结构的填充率.由(2.6.13)式解出等效电介常数

$$\varepsilon_e = \varepsilon\frac{1+2f\chi}{1-f\chi}. \tag{2.6.14}$$

根据静电学的解(也可参考本书(5.2.44)式),由(2.6.10)式求出

$$\chi = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon_1+2\varepsilon}. \tag{2.6.15}$$

式(2.6.14)称为 Maxwell-Garnett 混合公式①,可以看出它也是 Clausius-Mossotti 类型的关系式.

3. 人工等离子体

等离子体(例如地球的电离层和含有自由电子气的电中性金属)的磁导率 $\mu=\mu_0$,但它的介电常数在自然界的物质中具有特殊性.在§2.1和§2.4中我们已经指出,没有外加磁场时电离层和金属的介电常数的实部均可以写作

① J. G. Maxwell-Garnett, Colours in metal glasses and metal films, *Philosophical Transactions A, Royal Society of London*, vol. 205, pp. 237—288, 1906.

$$\varepsilon' = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right), \tag{2.6.16}$$

式中 ω_p 为等离子体(振荡)频率，γ 为碰撞频率. 电离层的 ω_p 为 10 MHz 量级，金属的 ω_p 在高于可见光频的紫外光频率范围. 等离子体介电常数的奇特之处在于当 $\omega > \omega_p$ 时，相对介电常数的实部 $\kappa' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} < 1$；当 $\omega < \omega_p$ 时，κ' 取负值. 因此，电离层对于微波是透明的，金属对紫外以上频率的光波也是透明的；但在等离子体频率以下，电离层反射短波及其以下频率的无线电波，而金属则反射可见光和无线电波. 对电磁波的这两种不同作用是以 ω_p 作为分界.

电离层与电磁波的互作用问题涉及很多实际上很重要但又十分复杂的情况，例如高速飞行器的等离子体壳层对通信的影响，火箭尾气产生的雷达反射问题等，它们难于以理论求解的方法研究，主要依靠实验模拟的方法. 但是由于等离子体介电常数的上述特征，在自然界中不存在可以模拟等离子体介电性的介质. 在实验室中对等离子体的模拟是用人工仿真介质实现的，一种早期的方案使用细圆柱形导体线栅构成二维或三维晶格①，其等离子体频率 ω_p 对应于电磁波在此线栅晶格中传播的截止频率 ω_c. 在当时的实验中已感到，当仿真等离子体的工作频率达到微波频率范围，若使用正方形晶格而且要求线栅间距与工作波长之比 $b/\lambda_0 = 0.2$，则所要求的线栅导体丝的半径之小已难于制作.

另一方面，金属中自由电子密度的集体振荡(即等离子体振荡)对于金属表面的光散射有重要影响，是固态物理学家长期研究的课题. 20 世纪末，在一项试图将金属的等离子体(振荡)频率降低到红外甚至微波频率的研究中，英国固态物理学家 J. B. Pendry 领导的研究组成功地将 ω_p 降到 10 GHz 左右，较金属的 ω_p 降低约 6 个数量级②. 他们使用半径为 $a = 1\ \mu$m 的铝丝制作间距 $b = 5$ mm 的立方晶格线栅.

对于电场方向与铝丝轴线平行的电磁波，这种结构的仿真介质的等离子体(振荡)频率应写作

$$\omega_p^2 = \frac{N_{\text{eff}} e^2}{\varepsilon_0 m_{\text{eff}}}, \tag{2.6.17}$$

式中的 N_{eff} 和 m_{eff} 分别为自由电子的等效密度和等效质量. 现在，因为电子的运动被约束于导体细丝内，导致两方面的效应：自由电子的等效密度 N_{eff} 较(2.1.12)式中单位体积导体中的自由电子数 N 降低，同时自由电子的等效质量

---

① W. Rotman, Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media, *IRE Trans.*, vol. AP-10, no. 1, pp. 82—95. Jan, 1962.

② J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures, *Phys. Rev Lett.*, vol. 76, no. 25, pp. 4773—4776, June 1996.

m_{eff}较电子的质量 m 增加.

由一个晶格单元可计算出等效电子密度

$$N_{\text{eff}} = N\frac{\pi a^2}{b^2}, \tag{2.6.18}$$

N 为铝丝中的自由电子密度,在每个晶格单元的截面积 b^2 内只有铝丝的截面积 πa^2 上有自由电子,故 N_{eff}降低.沿铝丝轴向流动的电流会产生轴对称磁场,在磁场中运动的电子会获得附加动量 $e\boldsymbol{A}$①,$\boldsymbol{A}$ 为磁矢势,这部分动量远超过电子的机械动量.每单位长度铝线中电子沿轴向的动量为

$$\pi a^2 eNA(a) = \frac{\mu_0\pi^2 a^4 e^2 N^2 v}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = m_{\text{eff}}\pi a^2 Nv,$$

$A(a)$为铝丝表面(半径 a 处)的矢势,v 为电子的运动速度.电子的等效质量

$$m_{\text{eff}} = \frac{\mu_0\pi a^2 e^2 N}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{2.6.19}$$

将铝丝半径,晶格常数及常温下铝的自由电子密度代入上式,所得 m_{eff}约为质子质量的 15 倍,大约相当于氮原子的质量,增加了 4 个数量级.将(2.6.18)和(2.6.19)式代入(2.6.17)式,得等离子体频率

$$\omega_{\text{p}}^2 = \frac{N_{\text{eff}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\text{eff}}} = \frac{2\pi}{\varepsilon_0\mu_0 b^2\ln(b/a)}, \tag{2.6.20}$$

计算得 $\omega_{\text{p}}=8.2\,\text{GHz}$.实验测量证实了这个结果.

4. 负磁导率人工媒质

与电介质不同,自然界中基本不存在具有负磁导率的磁介质,只有某些各向异性反铁磁质的磁导率可以取负值.即使以人工仿真介质的方式来构造负磁导率媒质也无例可循,因为不存在与自由电荷对应的磁单极.这个难题的最终攻克依然靠使用导体微结构,这种特殊设计的导体微结构称为裂缝环谐振器(split-ring resonators, SRRs)②,见图 2.17.

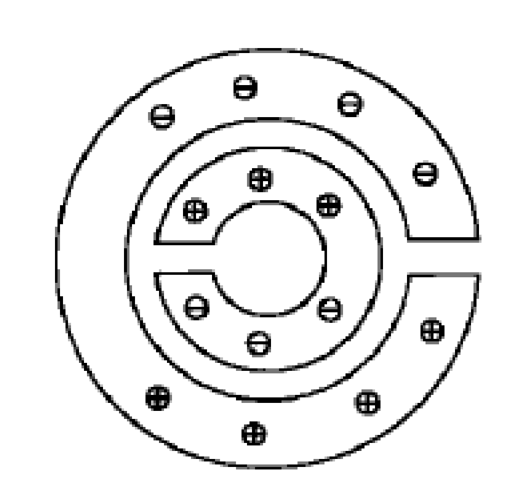


图 2.17 裂缝环谐振器

裂缝环谐振器由两个共平面的同心圆环形导体薄片组成,两个环在相反的位置开有彼此平行的窄裂缝,用印刷电路技术印制在低介电常数的介质平板上.在介质平板的每一个正方形格点位置印制裂缝环谐振器,便形成二维平面阵.将多张平面阵对齐叠放便构成裂缝环谐振器的三维阵.

---

① 见,例如,[2],§12.1.

② J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. Stewart, Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena, *IEEE Trans.*, vol. MTT-47, no. 11, pp. 2075—2084, 1999.

当入射平面电磁波的磁场与环平面垂直，穿过环孔的交变磁场在两个环上会感应出电流. 如果平面波的电场平行于环平面且与环的裂缝垂直，在环的裂缝两侧和两环间的隙缝两侧会积聚符号相反的电荷. 因此，这种由非磁性导体制作的微结构对于特定极化和传播方向的入射电磁波会产生磁响应. 定性地说，环的自感再加上两环之间的电容构成谐振器，当电磁波的频率跨过此谐振频率时，等效磁导率将改变符号，在谐振频率附近的一段频率范围内等效磁导率取负值.

对于三维阵，运用人工仿真介质的 Lorentz 理论，只考虑阵元之间的偶极相互作用，在一个单元的空间内求出平均磁感应强度 B_a 和平均磁场强度 H_a，便可计算出等效磁导率

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{B_a}{H_a} = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - \mathrm{j}\omega\Gamma}, \tag{2.6.21}$$

式中 $\omega_0/2\pi = f_0$ 是裂缝环谐振器的谐振频率；F 是裂缝环内孔的面积在晶格单元截面积中占有的比例，由它可控制负磁导率发生的带宽；Γ 是耗散因子，由制作微结构的导体损耗决定. 在所引用的论文中，Pendry 等人给出的一例有如下几何参数：阵单元在介质基片上的间距 1 cm，内、外环的径向宽度1 mm，内外环间的隙缝宽 0.1 mm，内环内半径 2 mm，叠放的环平面间距 2 mm. 由这些参数计算出的 μ_{eff}的实部 μ_{real}和虚部 μ_{imag}与频率的关系示于图 2.18. 由图可见，谐振频率 $f_0 = 13.5$ GHz. 在 13.5 GHz$<f<$14.5 GHz 的频率范围内 μ_{eff}的实部取负值.

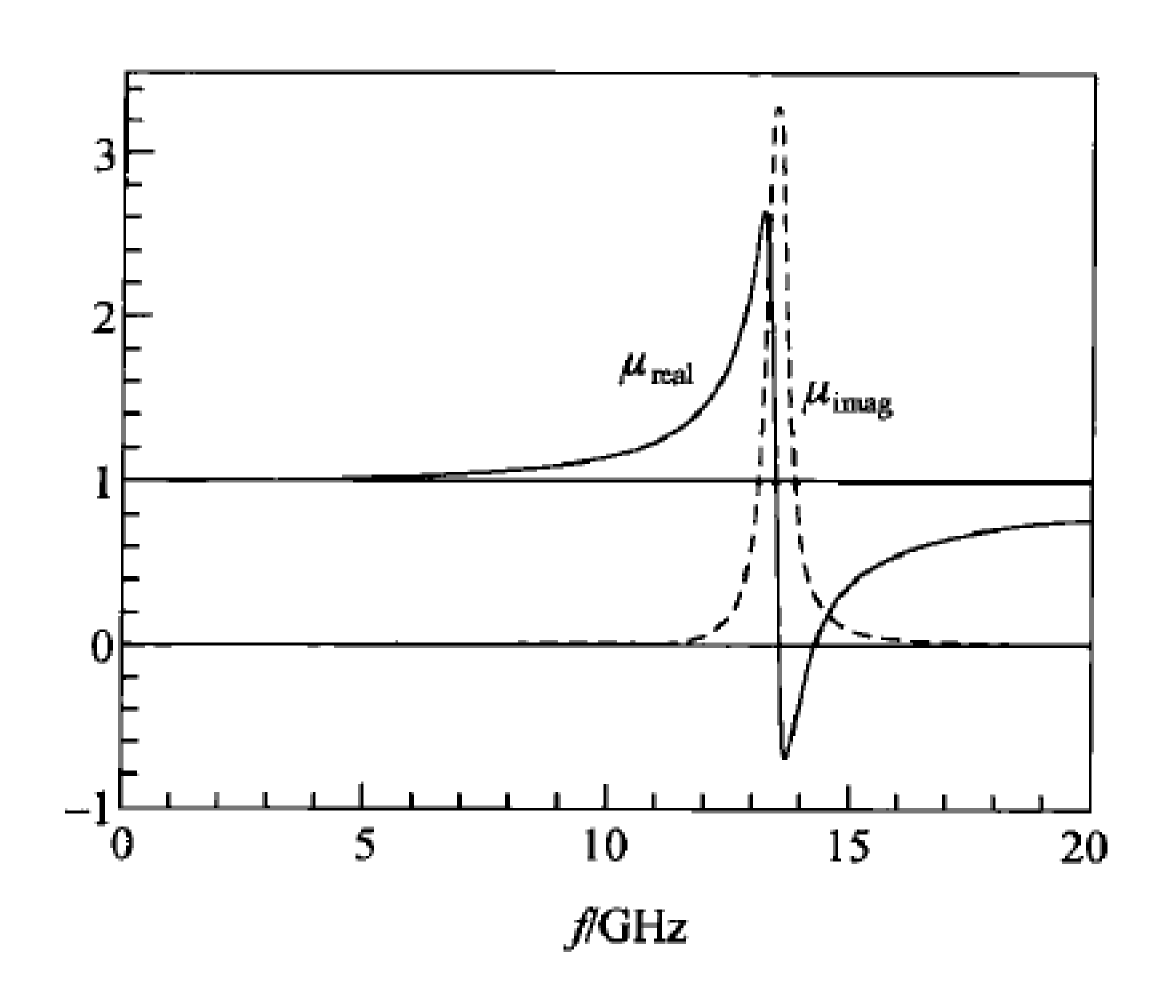


图 2.18　裂缝环谐振器的等效磁导率与频率的关系

因此，由裂缝环谐振器的三维阵构成的人工仿真介质是一种具有负磁导率的各向异性磁介质，对沿平行于环裂缝传播的平面电磁波，若它的电场平行于环平面且与环裂缝边缘垂直，同时磁场垂直于环平面，在高于谐振频率的一段频率范围内，这种特定极化和传播方向的平面电磁波不能传播.

5. 双负电磁常数人工媒质

至此,我们已经给出了 ϵ_{eff} 或 μ_{eff} 取负值的人工仿真介质的例子,特定极化和传播方向的电磁波在相应的频率范围内不能传播. 但由 Maxwell 方程组我们知道,如果 ϵ_{eff} 和 μ_{eff} 同时取负值时,电磁波可以传播(见本节的第 6 小节),美国物理学家 D. R. Smith 领导的研究组在 Pendry 等关于负 μ_{eff} 仿真介质的研究结果发表后不久,便首次从实验上证实了这一推理①.

在此项实验中,他们制作了二维裂缝环平面阵,裂缝环谐振器尺度为: 内环及外环的径向宽 0.8 mm,内外环间的隙缝宽 0.2 mm,内环内半径 1.5 mm,谐振频率 $\omega_0=4.845$ GHz. 在晶格常数为 8 mm 的正方二维阵平面上加上微波,其磁场垂直于阵平面而电场平行于阵平面且垂直于裂缝边缘,透过功率的频谱如图 2.19 的细实线所示. 由图可见,在 4.7～5.2 GHz 的频带内,入射波的衰减达 35 dB 以上,表明 μ_{eff} 在此频带内取负值,波遭受反射不能透过. 他们还制作了具有同样晶格常数的正方格点平行细导线平面阵,其等离子体频率 $\omega_p=12$ GHz. 对于电场与导线轴平行的线极化波,在 ω_p 以下的频段 $\epsilon_{eff}<0$,波不能传输通过. 实验表明,在图 2.19 所示的 4.5～7 GHz 频带内,传输透过的功率在 −50 dB 以下. 将正方形格点裂缝环谐振器平面插入到正方格点平行细导线平面阵的中间,即在每两行相邻的平行细导体柱的中间平面插入一行裂缝环谐振器,细导体柱

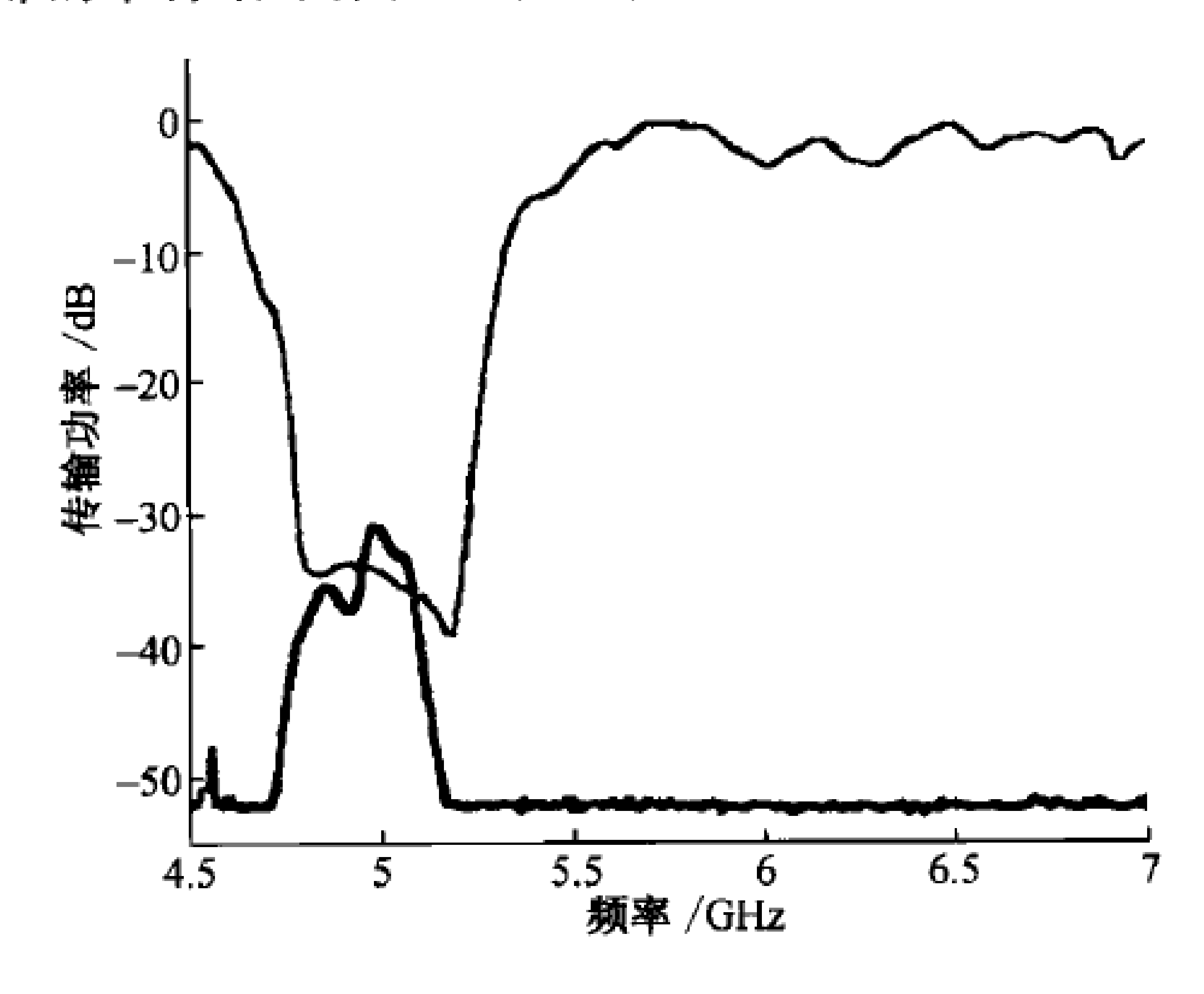


图 2.19　线极化平面电磁波传输通过双负电磁常数人工媒质的实验证实

① D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, Composite medium with simultaneously negative permeabillity and permittivity, *Phys. Rew. Lett.*, vol. 84, no. 18, pp. 4184—4187, May, 2000.

与环平面平行且与环裂缝边缘垂直，便构成 μ_{eff} 和 ε_{eff} 两者皆取负值的人工仿真介质，其一个单元的几何结构示于图 2.20. 传输实验表明，对于电场平行于导体柱轴线、磁场垂直于环平面而传播方向与环裂缝边缘平行的平面电磁波，在 4.7～5.2 GHz 频率范围内出现传输窗口，传输带宽达500 MHz，见图2.19中的粗实线.

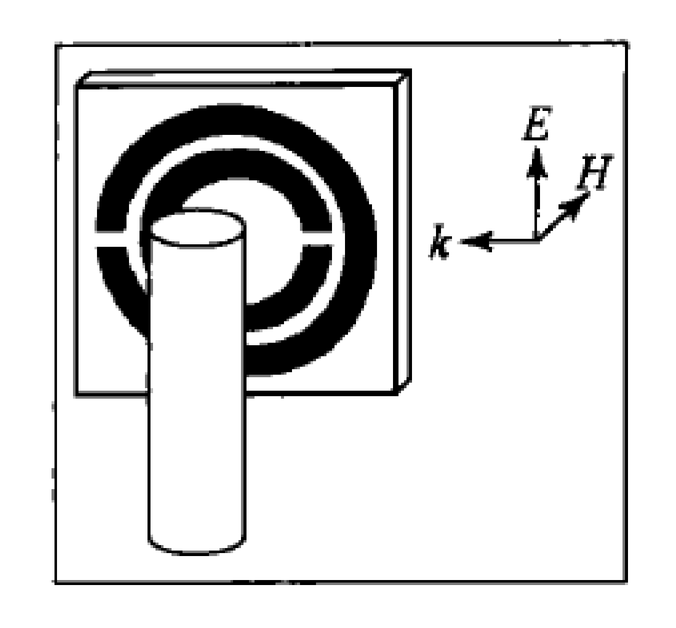


图 2.20　二维双负电磁常数人工媒质的一个单元

Smith 等人的这个实验证实了电磁介质常数两者同时取负值的人工介质可以传输特定极化和传输方向的电磁波，裂缝环谐振器和细导体柱复合结构人工仿真介质则成为具有双负介质常数的第一例人工仿真介质.

6. 双负电磁常数媒质中的平面电磁波

早在 1967 年，苏联学者 V. G. Veselago 就发表了关于 ε 和 μ 两者同时为负的媒质中平面电磁波传播问题的理论研究论文①，他是主要研究固态物理的学者，虽然当时还没有发现自然界中存在这样的物质，但他似乎感到某些特殊的固体可能会具有这种性质，例如纯铁磁金属和某些半导体.

在双负介质常数媒质中，Maxwell 方程组

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J},\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\qquad\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.6.22}$$

和结构关系

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\tag{2.6.23}$$

仍然成立，但现在 $\varepsilon<0$，$\mu<0$.

对于在无源区域中传播的平面电磁波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},\tag{2.6.24}$$

现在 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 仍然为实数，可以传播. 由 Maxwell 方程组的散度方程仍然有

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{k}\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=-|\varepsilon|\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\\ &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}\cdot\mu\boldsymbol{H}=-|\mu|\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.6.25}$$

也就是说，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 仍然与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直. 但由两个旋度方程现在有

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}=-\omega\,|\mu|\,\boldsymbol{H},\\ &\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D}=\omega\,|\varepsilon|\,\boldsymbol{E}.\end{aligned}\right\}\tag{2.6.26}$$

---

① V. G. Veselago, The electromagnetics of substances with simultaneously negative value of ε and μ. 原文见 *Usp. Fiz. Nauk*, vol. 92, pp. 517—526, July, 1967; 英译文, *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509—514, Jan.-Feb., 1968.

$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{k}$ 方向的关系现在反了过来，形成 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{k}$ 的左手正交系，平面电磁波现在已不是右手波，而是左手波，因此 Veselago 称 $\epsilon<0$ 且 $\mu<0$ 的媒质为左手媒质，而将正常的自然媒质称为右手媒质. 左手波的能流密度仍由

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{Re}\boldsymbol{E} \times \mathrm{Re}\boldsymbol{H} \tag{2.6.27}$$

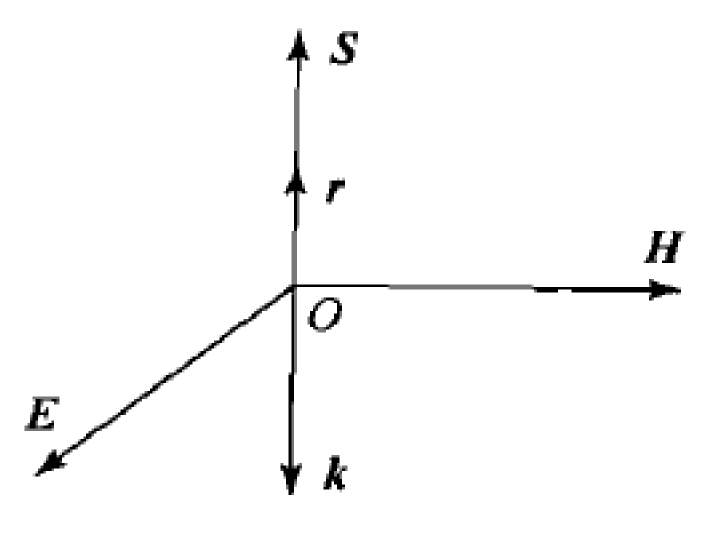


图 2.21　左手波的相速度和群速度方向

决定，即左手波的群速度仍在按右手法则确定的方向，而决定相速方向的 $\boldsymbol{k}$ 在反方向(见图 2.21). 相速与群速反方向的波称为返波，此前曾在光波的反常色散区中见到. 如果波是由点源发出的，群速度指向离开源的方向，而相速度则指向发射它的源，波传播的许多新特征皆由此决定.

我们定义 $\boldsymbol{r}$ 为沿波群速度方向的位移，如图 2.21所示，波的电(磁)场应写作

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{H}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{H}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-nk_0 r)},$$

式中 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. 现在波的相速方向指向波源，因此，上式中折射率 n 应定义为

$$n=-\sqrt{\kappa_e\kappa_m}<0, \tag{2.6.28}$$

平面波应写作

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{H}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+|n|k_0 r)}. \tag{2.6.29}$$

当波在左手媒质与自然(右手)媒质的平面分界面上折射时，由于入射波的波矢量 k_i 指向波源方向，透射波将折向入射波相对于法线的同一侧，如图 2.22 所示. 相对于入射波波矢方向，如果定义在法线异侧的折射角为正，图 2.22 所示的折射角则为负角. 因为左手媒质的折射率 n_1 取负值，折射定律(Snell 定律)仍成立：

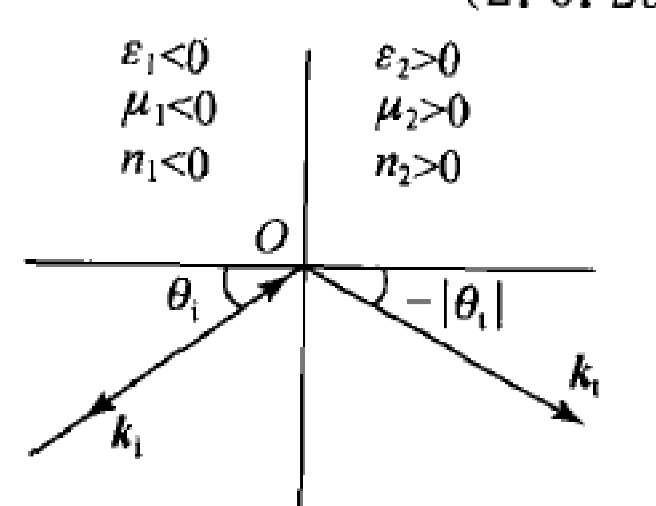


图 2.22　左手波在电介质平面分界面上的折射

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_i}{\sin(-|\theta_t|)} = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}, \tag{2.6.30}$$

这已为实验证实①. 由此，左手媒质便产生许多与右手媒质相反的物理现象，例如：凹透镜使光会聚，但凸透镜使光发散；具有平行平面表面的均匀左手媒质片会使由点源发出的光聚焦等.

---

① R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Experimental verification of a negative index of refraction, *Science*, vol. 292, pp. 77—79, 6 Apr., 2001; A. A. Hock, J. B. Brock, and J. L. Chuang, Experimantal observations of a left-handed material that obeys Snell's Law, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, no. 13, pp. 137401-1—137401-4, Apr. 2003.

同样，左手媒质中的 Doppler 频移与右手媒质中的相反，向观察者运动的源其辐射频率将向低频移动. 带电粒子当其运动速度大于媒质中的光速时会产生 Церенков(Cherenkov)辐射，在右手媒质中 Церенков 辐射方向与粒子运动方向的夹角为锐角，辐射波阵面形成与粒子同方向运动的锐角锥. 但在左手媒质中 Церенков 辐射方向与粒子运动方向的夹角为钝角，辐射锥朝向粒子运动的反方向.

人工双负电磁常数媒质研究所取得的进展引起了很多微波领域的研究人员的兴趣，希望在于有可能研制出具有全新性能的微波器件和元件，目前已经获得一定成果. 在这方面，用等效传输线实现的双负电磁媒质传输特性为其微波应用提供了更方便的实现形式.

7. 双负电磁常数媒质微波传输的传输线等效

TEM 型导波沿传输线(例如平行双导线或同轴线)的传播与平面电磁波在均匀媒质中的传播相似，因此可以用传输线模拟平面波的传播. 图 2.23 示出了传输线的集总元件等效电路表示，用 z 表示传输的正向，图中示出了传输线的一段微元 $\mathrm{d}z$，L 为每单位长传输线的串联电感(H/m)，C 为每单位长传输线的并联电容(F/m). 由电路关系，沿传输线的电压和电流变化分别为

$$\frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = -(L\mathrm{d}z)\frac{\partial I}{\partial t},\quad \frac{\partial I}{\partial z}\mathrm{d}z = -(C\mathrm{d}z)\frac{\partial V}{\partial t}.$$

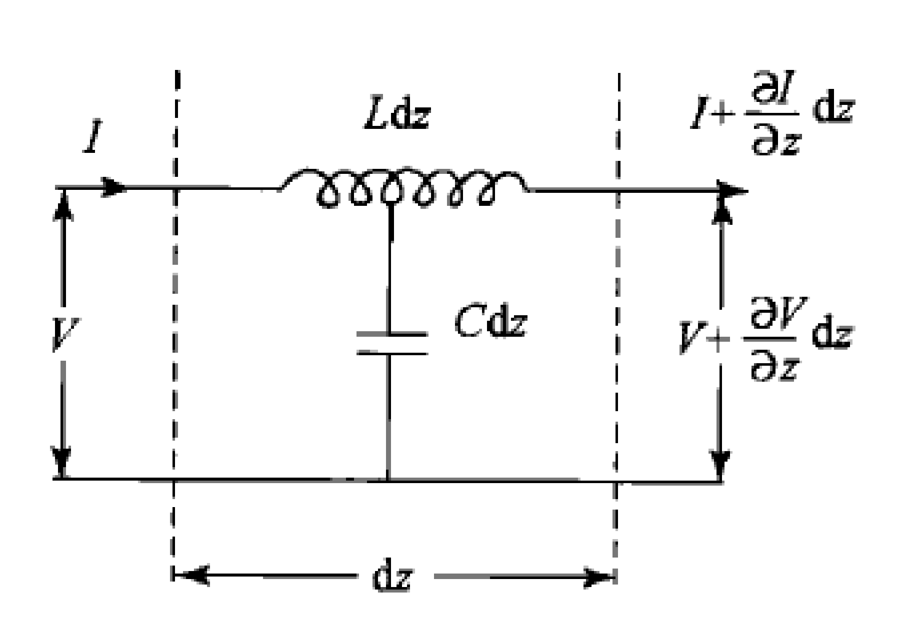


图 2.23 TEM 型波传输线的集总元件等效电路

在上式中消去 $\mathrm{d}z$，得传输线方程(亦称为电报方程)

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega LI = -ZI,\quad \frac{\partial I}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega CV = -YV, \tag{2.6.31}$$

式中 $Z=\mathrm{j}\omega L$，$Y=\mathrm{j}\omega C$ 分别为传输线每单位长度的串联阻抗和并联导纳. 在(2.6.31)的两个方程中消去 I 或 V，得 V 或 I 的二阶偏微分方程，即波动方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = YZV,\quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = YZI. \tag{2.6.32}$$

以沿传输线传播的电压(电流)波

$$V(I) = V_0(I_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}$$

代入上式，得波的传播常数

$$\beta = -\mathrm{j}\sqrt{YZ} = \omega\sqrt{LC}. \tag{2.6.33}$$

对于沿 z 方向传播的平面电磁波，由 Maxwell 方程的旋度式有

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{eff}}H_y,\quad \frac{\partial H_y}{\partial z}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{eff}}E_x. \tag{2.6.34}$$

与传输线方程(2.6.31)比较,如果 E_x 对应于电压 V 则 H_y 对应于沿 z 方向的电流 I,等效介质常数与等效电路参数的对应关系分别为

$$\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{eff}}=Z,\quad \mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{eff}}=Y. \tag{2.6.35}$$

由(2.6.33)式求出沿传输线传播的波的相速和群速分别为

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad v_{\mathrm{g}}=\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{2.6.36}$$

这两个速度均沿 z 轴正向,而且相等. 因此,图 2.23 所示 LC 串-并联分布负载传输线可模拟自然媒质(右手媒质)中传播的平面电磁波.

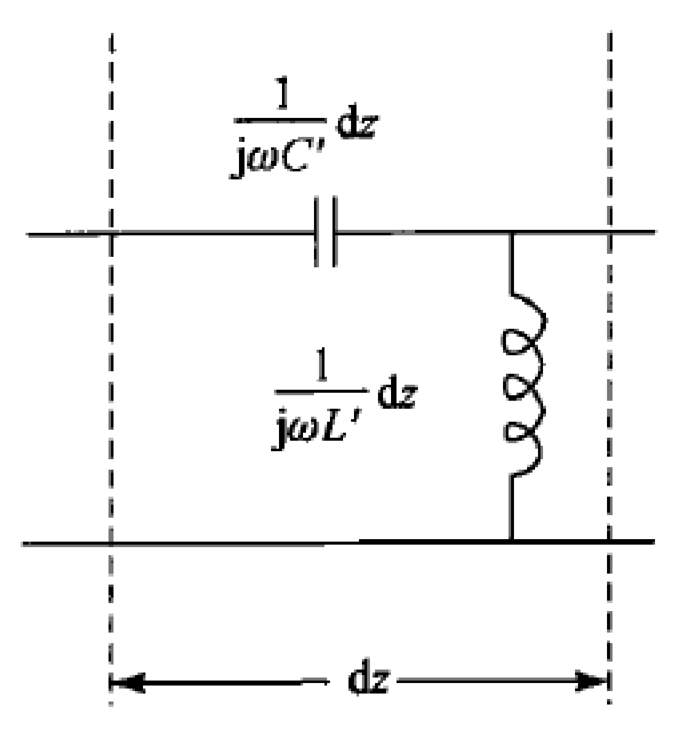


图 2.24 支持返波传播的传输线的集总元件等效电路

如果传输线的等效电路是图 2.23 所示电路的对偶,即串联电容和并联电感,如图 2.24 所示,图中的 C'和 L'分别为每米传输线的分布串联电容(F·m)和并联电感(H·m). 此时 $Z=1/\mathrm{j}\omega C'$,$Y=1/\mathrm{j}\omega L'$,

$$\beta=-\mathrm{j}\sqrt{YZ}=-\omega\frac{1}{\sqrt{L'C'}}. \tag{2.6.37}$$

由(2.6.34)式可求出

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{\omega^2L'},\quad \mu_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{\omega^2C'}. \tag{2.6.38}$$

沿传输线传播的波的相速和群速分别为

$$v_{\mathrm{p}}=-\omega^2\sqrt{L'C'},\quad v_{\mathrm{g}}=\omega^2\sqrt{L'C'}. \tag{2.6.39}$$

相速度与群速度的值虽然相同,但方向相反. 群速度沿 z 的正向,但由于等效电路的 C-L 结构,波的相位沿能量传播方向变得更负,形成负相速,这种波便是返波. 在传输线理论中对于支持返波传播的传输线结构已有详细研究①.

由 Eleftheriades 领导的研究组发现,裂缝环谐振器/直导体柱结构人工左手媒质对平面波传播的等效电路与图 2.24 的支持返波传播的等效传输线电路是相似的. 他们进而认为如果使用传输线等效,裂缝环的谐振性质并不是必要的,使用裂缝环旨在获得谐振频率附近频带内的负磁导率,但使用传输线的等效

① 见,例如,S. Ramo, J. R. Whinnery and T. Van Duzer, Fields and Waves in Communication Electronics, 2nd ed., §5.13, Wiley, 1984.

电路可在宽得多的频率范围获得负折射率，对此也已获得实验证明①. 传输线等效电路可以使用集总元件实现，不但结构紧凑，如果使用变容二极管取代固定电容，还可通可电调调整电容实现负折射率频带的电调. 而且，传输线等效电路可以制作成二维网络形式，以实现在平面上的二维左手波传播和控制. 因此，对于在微波电路中的应用，传输线等效电路模型具有更多的优越性.

§2.7　平面电磁波在非均匀介质中的传播

1. 非均匀介质中的电磁波方程[14,15,16]

电磁波在非均匀各向同性介质中的传播问题是某些重要的研究领域的基本问题，例如大气层中或地壳层中电磁波的传播问题. 为简单起见，我们假定仅介质的介电常数是不均匀的，而磁导率是均匀的且等于 μ_0，即

$$\varepsilon = \varepsilon(x,y,z), \quad \mu = \mu_0, \tag{2.7.1}$$

这样的假定基本上适合于上面列举的实际问题. 在这样的介质中无源的 Maxwell 方程式为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}, \\ &\nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon(x,y,z)\boldsymbol{E}, \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot[\varepsilon(x,y,z)\boldsymbol{E}] = 0, \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.2}$$

由两个旋度方程式可导出电场满足的波动方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \omega^2\mu_0\varepsilon(x,y,z)\boldsymbol{E} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) = 0. \tag{2.7.3}$$

由电场的散度方程可求出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon(x,y,z)}\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon(x,y,z). \tag{2.7.4}$$

上式代入(2.7.3)式后化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \omega^2\mu_0\varepsilon(x,y,z)\boldsymbol{E} + \nabla\left[\frac{1}{\varepsilon(x,y,z)}\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon(x,y,z)\right] = 0, \tag{2.7.5}$$

由于存在最后一项，方程式(2.7.5)的解析求解是不可能的，我们只能在适当简化的情况下来求解. 如果 $\varepsilon(x,y,z)$ 的空间变化非常缓慢以致(2.7.5)式的最后

① G. V. Eleftheriades, O. Siddiqui, and A. K. Iyer, Transmission line models for negative refractive index media and associated implementations without excess resonators, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 2, pp. 51—53, Feb. 2003; A. Grbic and G. V. Eleftheriades, Experimental verification of backward-wave radiation from a negative refractive index metamaterial, *JAP*, vol. 92, no. 10, pp. 5930—5935, Nov. 2002.

一项可以忽略,那么电场矢量就满足变系数的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2(x,y,z)\boldsymbol{E} = 0, \tag{2.7.6}$$

这里

$$k^2(x,y,z) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(x,y,z) \tag{2.7.7}$$

是空间坐标的缓慢变化函数.

2. 平面分层介质中的波方程[14,15,16]

如果对于介质的不均匀性作出进一步的简化,则可得到更简单的波方程.对于实际的非均匀介质中的波传播问题,例如电磁波在大气层、海洋以及地层中的传播问题,平面分层介质是一种良好的近似模型.在这个模型中假定在与某一直线垂直的平面上介质是均匀的,介质常数只是一维坐标的函数.如果将这一维坐标取为 z 则 $\varepsilon=\varepsilon(z)$,它可以是 z 的连续函数或间断函数.在讨论平面波的传播问题时,总可以这样选择 y 轴的方向使场不随 y 变化,这样问题便简化成为二维的.具体地导出波方程则需要区分电磁波的两种不同极化情况.

(1) 垂直极化波

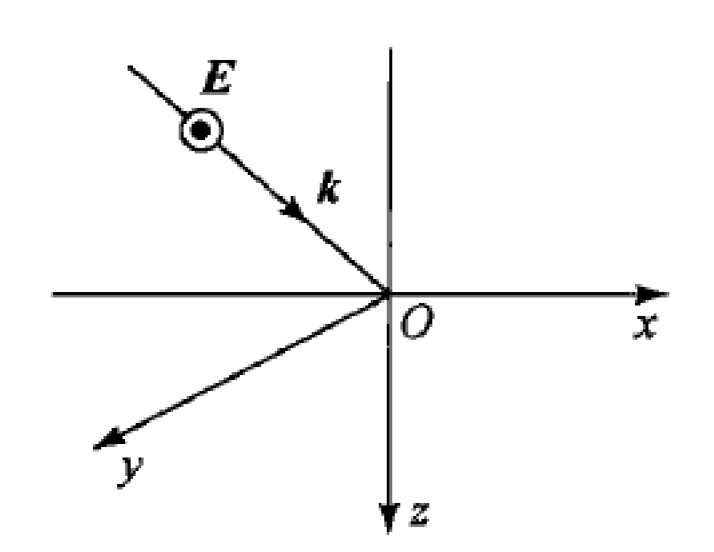


图 2.25 垂直极化波入射于电介质平面

如果以波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 z 轴构成的平面作为参考面,电矢量垂直于参考面的波称为垂直极化波(图 2.25),这时有

$$E_y = E, \quad E_x = E_z = 0$$

和

$$\boldsymbol{k}(z) = \boldsymbol{a}_x k_x(z) + \boldsymbol{a}_z k_z(z). \tag{2.7.8}$$

对于随 z 的连续变化,函数 $\varepsilon(z)$ 可以用阶梯函数来逼近,这相当于将介质分割成 z 方向厚度为无穷小的平行均匀薄层,在薄层之间的分界面上可应用边界条件.场的切线分量连续条件要求 $k_x(z)$ 是与 z 无关的常数,所以(2.7.8)式应改写作

$$\boldsymbol{k}(z) = \boldsymbol{a}_x k_{x0} + \boldsymbol{a}_z k_z(z), \tag{2.7.8a}$$

这里 k_{x0} 是与 z 无关的常数.考虑到 $\partial/\partial y=0$,Maxwell 方程式(2.7.2)的旋度方程只有三个直角坐标分量式:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\omega\mu_0 H_x &= \partial E_y/\partial z, \\ \mathrm{j}\omega\mu_0 H_z &= \mathrm{j}k_{x0} E_y, \\ \mathrm{j}\omega\varepsilon(z) E_y &= \mathrm{j}k_{x0} H_z + \partial H_x/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.9}$$

从第三个方程式中消去 H_x 和 H_z 即可得电场的波动方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}z^2} + [\omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) - k_{x0}^2] E_y = 0, \tag{2.7.10}$$

或简写成

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}E_y + k_z^2(z)E_y = 0, \tag{2.7.10a}$$

这里

$$k_z^2(z) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) - k_{x0}^2. \tag{2.7.11}$$

应当强调指出，垂直极化波的电场严格地满足标量 Helmholtz 方程，与(2.7.6)式不同，在导出(2.7.10)式时没有作任何近似.

(2) 平行极化波

这时电矢量 $\boldsymbol{E}$ 在 xz 平面内而磁场与 xz 平面垂直(图 2.26)，所以

$$E_y = 0, \quad H_y = H.$$

波矢量 $\boldsymbol{k}$ 仍由(2.7.8a)式表示. 同样，由于 $\partial/\partial y=0$，Maxwell 方程的旋度方程只有下面三个不为零的直角坐标分量式：

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{j}\omega\mu_0 H_y &= \partial E_x/\partial z + \mathrm{j}k_{x0}E_z, \\ \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)E_x &= -\partial H_y/\partial z, \\ \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)E_z &= -\mathrm{j}k_{x0}H_y. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.12}$$

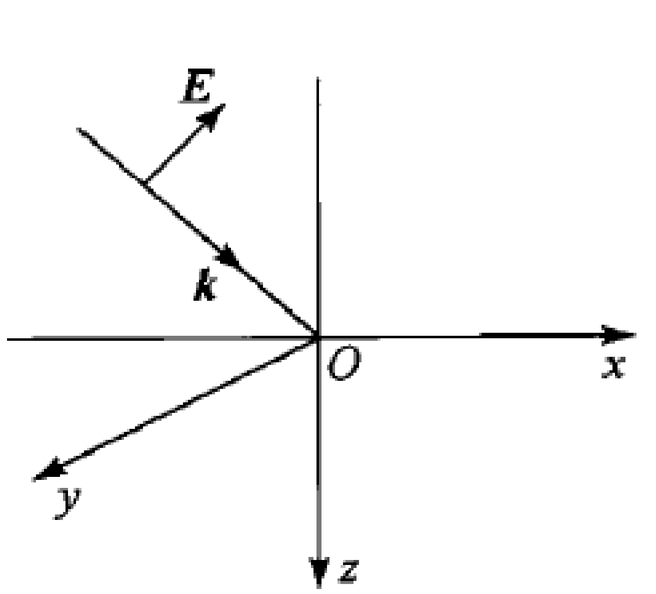


图 2.26　平行极化波入射于电介质平面

从(2.7.12)式的第一个方程式中消去 E_x, E_z 后就得到 H_y 的波动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_y}{\mathrm{d}z^2} + [\omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) - k_{x0}^2]H_y + \varepsilon(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}z} = 0, \tag{2.7.13}$$

或改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_y}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2(z)H_y - \frac{1}{k^2(z)}\frac{\mathrm{d}k_z^2(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}z} = 0, \tag{2.7.13a}$$

这里 $k_z(z)$ 仍由(2.7.11)式给出.

与(2.7.10)式比较(2.7.13)式多了最后的一项，仅当这一项可以略去时 H_y 才满足 Helmholtz 方程式. 最后这一项可略去的条件，除了要求 $\varepsilon(z)$ 是 z 的缓慢变化函数外，还要求波的传播方向接近于与 z 轴平行，否则当波的传播方向接近于与 x 轴平行时

$$k_z^2(z) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) - k_{x0}^2$$

为小量，这时该项就变得很重要. 平行极化波与垂直极化波在传播特性上的这个重要差别的原因，不难用这两种极化波在大入射角情况下反射系数(Fresnel 公式)的差别来解释.

3. 波在平面分层介质表面的反射. 等效网络表示[16]

现在我们来讨论电磁波在平面分层介质表面的反射问题. 分层介质结构及所使用的坐标系示于图 2.27. 图中从 $z=z_{m-1}$ 到 $z=z_m$ 为第 m 层，介电常数为

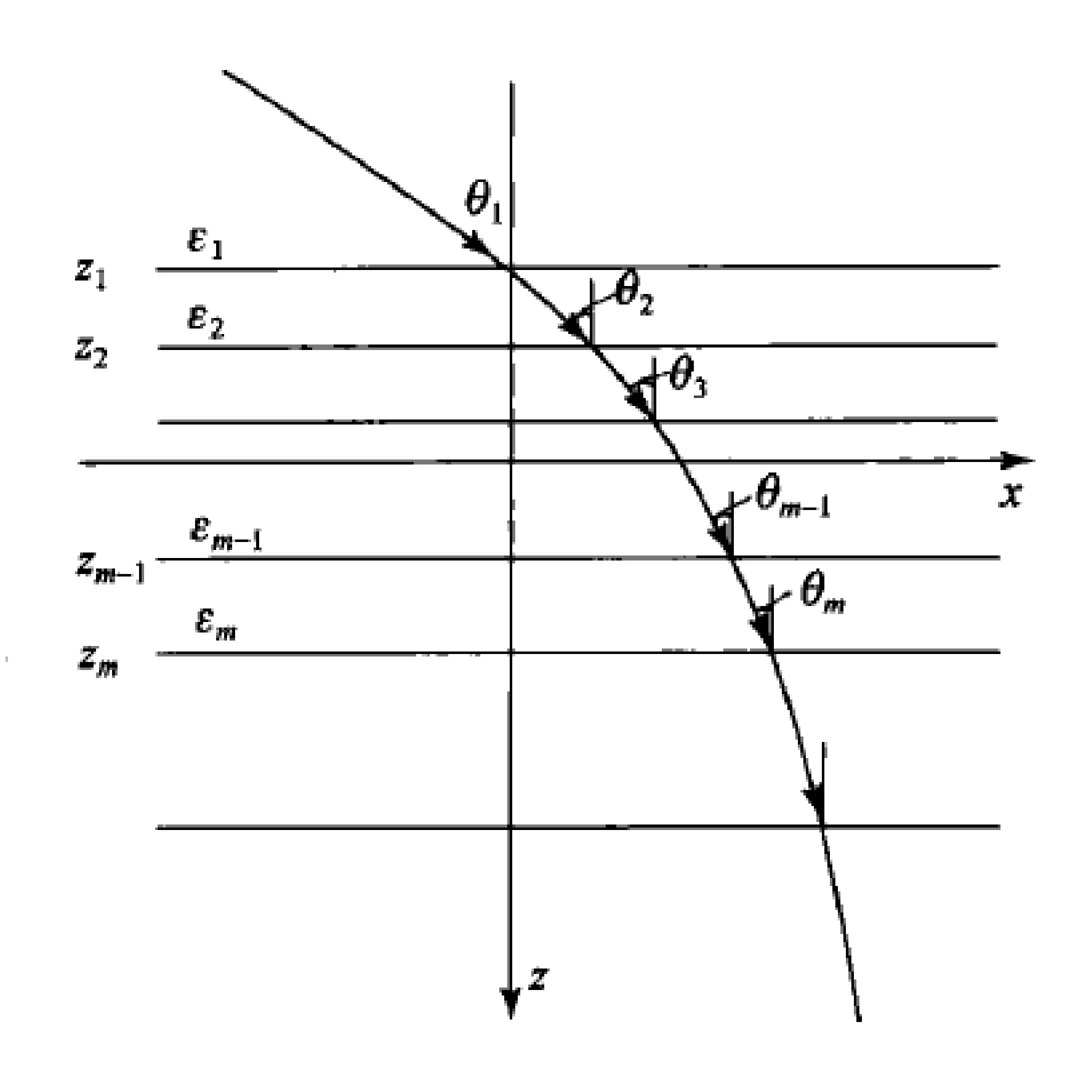


图 2.27　垂直极化波透射入多层平面分层电介质

ε_m. 为简单起见设入射波为垂直极化波，在第 m 层中标量 Helmholtz 方程(2.7.10)的解可设为

$$E_y = \{A_m \exp[-jk_m(z-z_m)\cos\theta_m] + B_m \exp[jk_m(z-z_m)\cos\theta_m]\}\exp(-jk_m x\sin\theta_m), \tag{2.7.14}$$

这里

$$k_m^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_m. \tag{2.7.15}$$

由(2.7.9)第一式可求出第 m 层中的横向磁场

$$H_x = -\frac{k_m\cos\theta_m}{\omega\mu_0}\{A_m \exp[-jk_m(z-z_m)\cos\theta_m] - B_m \exp[jk_m(z-z_m)\cos\theta_m]\}\exp(-jk_m x\sin\theta_m). \tag{2.7.16}$$

在层间的边界面上场的切线分量连续条件要求对于任意 m 有

$$k_m\sin\theta_m = k_1\sin\theta_1 = k_{x0}. \tag{2.7.17}$$

对于小入射角入射，在 $z=z_m$ 面上的电磁场值若用符号表示为

$$E_y = E_m, \quad H_x = H_m, \tag{2.7.18}$$

则由(2.7.14)式和(2.7.16)式有

$$E_m = A_m + B_m, \quad H_m = (B_m - A_m)/\eta_m, \tag{2.7.19}$$

这里

$$\eta_m = \omega\mu_0/k_m\cos\theta_m. \tag{2.7.20}$$

利用 E_y 和 H_x 在边界面上连续的条件可求出它们在 $z=z_{m-1}$ 面上的值：

$$\left.\begin{aligned} E_{m-1} &= E_m\cos\zeta_m - j\eta_m H_m\sin\zeta_m, \\ H_{m-1} &= H_m\cos\zeta_m - (j/\eta_m)E_m\sin\zeta_m, \end{aligned}\right\} \tag{2.7.21}$$

其中

$$\zeta_m = k_m(z_m - z_{m-1})\cos\theta_m. \qquad (2.7.22)$$

若引入矩阵

$$\boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} E_m \\ H_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \cos\zeta_m & -\mathrm{j}\eta_m\sin\zeta_m \\ -(\mathrm{j}/\eta_m)\sin\zeta_m & \cos\zeta_m \end{bmatrix}, \qquad (2.7.23)$$

则关系式(2.7.21)可以很方便地表示为

$$\boldsymbol{e}_{m-1} = \mathbf{K}_m \cdot \boldsymbol{e}_m. \qquad (2.7.24)$$

(2.7.24)式所表示的第 m 层的上、下表面上电磁场的切线分量值的这种关系相似于用电压-电流传输矩阵表示的四端网络两端口之间的电压-电流关系①.

在每一层的上下两个面之间应用(2.7.24)式就可得第 1 层下界面与第 m 层下界面上切线分量场的关系

$$\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_3 \cdots \mathbf{K}_m \cdot \boldsymbol{e}_m = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{e}_m, \qquad (2.7.25)$$

这里矩阵 $\mathbf{K}$ 表示 $\mathbf{K}_2$ 到 $\mathbf{K}_m$ 诸矩阵的乘积,可写作

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \qquad (2.7.26)$$

由于 $\det \mathbf{K}_m = 1$,所以有 $\det \mathbf{K} = 1$,这样 $\mathbf{K}$ 的逆矩阵很容易求得为

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix}, \qquad (2.7.26\text{a})$$

这使得利用(2.7.25)式作运算时相当方便.

定义 $z=z_m$ 面上的反射系数 R_m 和表面阻抗 Z_m 分别为

$$R_m = B_m/A_m, \quad Z_m = -E_m/H_m, \qquad (2.7.27)$$

由(2.7.19)式容易证明这两者之间有下面的关系:

$$Z_m = \frac{(1+R_m)\eta_m}{1-R_m}, \quad R_m = \frac{Z_m - \eta_m}{Z_m + \eta_m}. \qquad (2.7.28)$$

由(2.7.25)式及 Z_m 的定义(2.7.27)式容易求出第 1 层下边界的表面阻抗

$$Z_1 = \frac{k_{11}Z_m - k_{12}}{k_{22} - k_{21}Z_m}, \qquad (2.7.29)$$

再代入(2.7.28)式就可求出反射系数 R_1.

这里所给出的关于表面阻抗和反射系数的表示式是足够普遍的,许多实际重要的情况都可由此得出,如果将第 m 层的下界面 z_m 取在无穷远处,则有 $B_m=0$, $R_m=0$ 及 $Z_m=\eta_m$,然后取 $m=2$ 就成为波在两个半无界介质的平面分界面上的反射问题;当取 $m=3$ 而且设第 1 层及第 3 层介质为真空,就得到一层薄介质片的反射问题,如取 $m=5$ 则为三层介质片的反射问题.

① 见,例如,R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, §4.9, McGraw-Hill, 1966.

4. 波在缓变分层介质中的传播. WKB 近似解[14,15]

在本节第 2 小节中我们看到,当波沿 z 轴方向在平面分层介质中传播时,如果介质的变化是足够缓慢的,那么两种极化波的传播问题都归结为求如下形式的标量波动方程的解:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2(z)\psi(z)=0, \tag{2.7.30}$$

这里

$$k^2(z)=\omega^2\mu_0\varepsilon_0(z). \tag{2.7.31}$$

当 $k(z)$ 是 z 的变化得足够缓慢的函数时,容易得到变系数的二阶常微分方程(2.7.30)的近似解,称为 WKB 近似解.

将 $\psi(z)$ 写成下面形式的试探解

$$\psi(z)=\Psi(z)\exp[-\mathrm{j}\phi(z)], \tag{2.7.32}$$

代入方程(2.7.30)后得

$$\Psi''-2\mathrm{j}\phi'\Psi'-\mathrm{j}\phi''\Psi+[k^2(z)-(\phi')^2]\Psi=0, \tag{2.7.33}$$

"$'$"表示对于 z 求微商. 设函数 $\Psi(z)$ 和 $\phi'(z)$ 发生显著变化的距离为 l,缓慢变化条件相当于要求 $l\gg\lambda$ 或 $kl\gg1$. (2.7.33)式中的微商可近似求出为

$$\Psi'\sim\Psi/l$$
$$\Psi''\sim\Psi/l^2,$$
$$\phi''\sim\phi'/l.$$

由于 Ψ'' 项为二级小量,可以从方程(2.7.33)中略去,方程式中余下的各项的虚数部分和实数部分在数量级上也有差别,必须分别为零,于是得到两个方程:

$$k^2(z)-\phi'^2=0 \tag{2.7.34}$$

和

$$2\phi'\Psi'+\phi''\Psi=0. \tag{2.7.35}$$

(2.7.34) 式的解为

$$\phi'(z)=\pm k(z) \tag{2.7.36}$$

或

$$\phi(z)=\pm\int_{z_0}^{z}k(z)\mathrm{d}z. \tag{2.7.36a}$$

以解(2.7.36)式代入(2.7.35)式得

$$\frac{\Psi'}{\Psi}=-\frac{\phi''}{2\phi'}=-\frac{k'}{2k}, \tag{2.7.37}$$

这个方程的解容易求出为

$$\Psi(z)=C[k(z)]^{-\frac{1}{2}}\quad (C\text{ 为常数}). \tag{2.7.38}$$

将(2.7.36a)式和(2.7.38)式代入试解(2.7.32)式，于是就得到方程式(2.7.30)在缓变条件下的下列近似解：

$$\psi(z)=\frac{1}{\sqrt{k(z)}}\left[A_0 e^{-j\int_{z_0}^{z}k(z)dz}+B_0 e^{j\int_{z_0}^{z}k(z)dz}\right],\tag{2.7.39}$$

这里 A_0，B_0 和 z_0 为常数. 量子物理学家 Wentzel，Kramers 和 Brillouin 在求解量子力学中的类似方程时首先得到了(2.7.39)形式的近似解，因此被称为 WKB 近似解.

WKB 解的物理意义很清楚. 当 $k(z)$ 是实数时积分 $\int_{z_0}^{z}k(z)dz$ 表示从 z_0 点到 z 点波所经历的相位变化，$\pm$j 指数项分别相应于沿 $\pm z$ 方向传播的波，而振幅 $k(z)^{-\frac{1}{2}}$ 是为满足能量守恒所必需的. 例如，若 ψ 表示 E_y，则 $H_x\sim\partial\psi/\partial z\sim k(z)\psi$，这里求微商时略去了振幅随 z 变化引起的高级小量，因此波的时间平均能流密度 $\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_yH_x^*)$ 是与 z 无关的常数.

5. 波在缓变分层介质中的传播. 几何光学近似[14]

为了对于 WKB 近似解的物理实质有进一步的了解，我们现在用更具有物理直观的方法来导出 WKB 近似解. 我们考虑垂直极化波从 $z<0$ 的均匀介质区域射入 $z>0$ 的缓变分层介质区域后的传播过程. 为求出非均匀介质区中的电磁场，我们将 $z>0$ 空间的连续变化分层介质分割成不连续变化的平面分层介质，认为每一薄层中的介质是均匀的，如图 2.28所示. 然后，我们在忽略层间分界面上的反射波的近似下，来讨论波的传播问题. 只要介质的变化足够缓慢而且介质层分得足够薄这样的近似处理就是合理的.

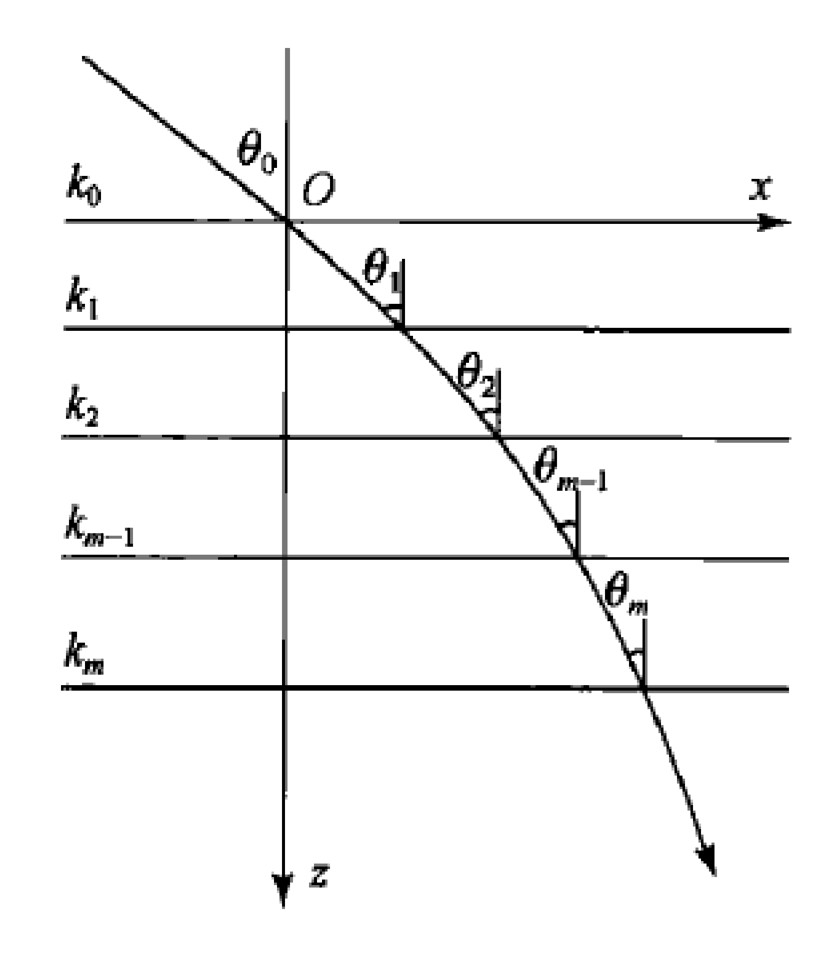


图 2.28　垂直极化波透射入缓变连续变化分层电介质

垂直极化波在两种半无界介质的平面分界面上的反射系数和透射系数，不难应用本节第 3 小节中的普遍等效网络表示式求出. 取 $m=2$ 并且令 $B_2=R_2=0$，由(2.7.28)式即可求出 $Z_2=\eta_2$. 将 Z_2 的这个值代入(2.7.29)式并应用(2.7.23)式可求出

$$Z_1=\frac{k_{11}\eta_2-k_{12}}{k_{22}-k_{21}\eta_2}=\eta_2.\tag{2.7.40}$$

上式再代入(2.7.28)式就可求得反射系数

$$R_1=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}. \tag{2.7.41}$$

若定义透射系数为

$$T_1=A_2/A_1, \tag{2.7.42}$$

则由电场切线分量连续条件可得 T_1 与 R_1 之间有下面的关系：

$$T_1=1+R_1, \tag{2.7.43}$$

将(2.7.41)式代入上式就得到两种半无界介质分界面上的透射系数

$$T_1=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}. \tag{2.7.44}$$

在所假设的介电常数缓变条件下，η_2 和 η_1 的值十分接近，这时将(2.7.44)式改写为下面的形式是方便的：

$$T_1=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\eta_2+\eta_1}{\eta_2+\eta_1}+\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=1+\frac{\Delta\eta_1}{2\eta_1}, \tag{2.7.44a}$$

这里 $\Delta\eta_1=\eta_2-\eta_1$ 可看作是无穷小量.

当反射波可忽略时界面两侧电场之比就等于透射系数：

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{A_2}{A_1}=T_1. \tag{2.7.45}$$

应用(2.7.45)式和(2.7.44a)式于任一分界面，我们有

$$E_m=E_{m-1}\left(1+\frac{\Delta\eta_{m-1}}{2\eta_{m-1}}\right), \tag{2.7.46}$$

于是第 m 层介质中的电场 E_m 与入射波电场 E_0 有下面的关系：

$$\begin{aligned}E_m&=E_0\left(1+\frac{\Delta\eta_0}{2\eta_0}\right)\left(1+\frac{\Delta\eta_1}{2\eta_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\Delta\eta_{m-1}}{2\eta_{m-1}}\right)\\&=E_0\exp\left[\sum_{p=0}^{m-1}\ln\left(1+\frac{\Delta\eta_p}{2\Delta\eta_p}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.7.47}$$

上式求和号中的对数函数展开成级数并且只保留首项可简化为

$$\ln\left(1+\frac{\Delta\eta_p}{2\eta_p}\right)=\frac{\Delta\eta_p}{2\eta_p}, \tag{2.7.48}$$

再将求和号变为积分便过渡到连续分层介质的情况：

$$E_m=E_0\exp\left[\int_{p=0}^{p=m-1}\frac{\mathrm{d}\eta_p}{2\eta_p}\right]=E_0\exp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\eta_{m-1}}{\eta_0}\right]=E_0\left[\frac{\eta_{m-1}}{\eta_0}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

上式用连续函数表示成

$$E_0(z)=E_0(0)\left[\frac{\eta(z)}{\eta(0)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

再以

$$\eta(z)=\omega\mu_0/k(z)\cos\theta(z)$$

代入，最后就得到介质中电场振幅的表示式

$$E_0(z) = E_0(0)\left[\frac{k_0\cos\theta_0}{k(z)\cos\theta(z)}\right]^{\frac{1}{2}} = E_0(0)\frac{C'}{\sqrt{k_z(z)}}, \qquad (2.7.49)$$

其中 $C'=(k_0\cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}$ 为常数，而

$$k_z(z) = k(z)\cos\theta(z) = [\omega^2\mu_0\varepsilon(z) - k_{x0}^2]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.7.11a)$$

当波从 $x=z=0$ 点传播到(x,z)点时波所经历的总相移是

$$\phi(x,z) = \int_0^z k_z(z)\mathrm{d}z + k_0 x\sin\theta_0 = \int_0^x k_z(z)\mathrm{d}z + xk_{x0}. \qquad (2.7.50)$$

由(2.7.49)式和(2.7.50)式，介质中(x,z)点垂直极化波的电场可表示为

$$E_y(z) = \frac{A_0}{\sqrt{k_z(z)}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\int_0^z k_z(z)\mathrm{d}z - \mathrm{j}xk_{x0}}, \qquad (2.7.51)$$

其中 A_0 为常数，这正是 WKB 近似解.

从上面导出 WKB 近似解(2.7.51)式的过程不难看出，如果略去反射波而且在近似计算中只保留一级小量就得到 WKB 近似解，当 $\varepsilon(z)$是 z 的变化得足够缓慢的函数时这样的近似在物理上是合理的. 实际上有着一些改进 WKB 近似解的精度的有效方法，例如在所谓广义 WKB 近似方法(参见[15]，ch. 16)中 WKB 近似解(2.7.39)式中的 A_0 及 B_0 不再取作常数而看作是 z 的函数，它们可展开为小参量 ε 的幂级数：

$$\left.\begin{aligned} A(z) &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots, \\ B(z) &= B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7.52)$$

除 A_0 和 B_0 外的各项相应于层间分界面上的多次反射波.

另一方面，当略去反射波时波在介质内的传播射线成为一条连续射线，这种近似在光学上正是几何光学(或射线光学)近似. 几何光学近似相当于在级数展开式(2.7.52)中只保留第一项. 电磁波传播问题的几何光学近似是我们下一节要讨论的问题.

§2.8　电磁波传播问题的射线光学近似

1. 程函方程[6,7,8,9]

几何光学的概念是在讨论光波(或电磁波)离源足够远处的传播问题时形成的，在远离源的区域中由任何源产生的波可看作平面波. 在光学中习惯地将均匀介质中的平面电磁波写作

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 nr}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 nr}, \qquad (2.8.1)$$

这里 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$n=\sqrt{\kappa_e\kappa_m}$为介质的折射率，$r$ 为沿波矢量方向的位移. 推广到非均匀介质的情况，可以假设波的电磁场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})},\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})}. \tag{2.8.2}$$

在(2.8.2)式中场的振幅已写作空间坐标的函数，而 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$称为光程函数，简称为程函(eikonal)，它是折射率分布 $n(\boldsymbol{r})$及光线路径的函数.

以平面波(2.8.2)式作为试解代入 Maxwell 方程组中电场的旋度和散度方程可以得到

$$[\nabla\times\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}k_0\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})},$$

$$[\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\varepsilon(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}k_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})}=0;$$

(2.8.2)式代入磁场的旋度和散度方程后可得两个类似的方程. 所得的这四个方程式中的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}(\boldsymbol{r})}$ 可以消去，然后将 k_0 除到分母中去便得到下面的四个方程式：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\times\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})+\frac{\omega\mu}{k_0}\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\frac{1}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}),\\
&\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\times\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})-\frac{\omega\varepsilon}{k_0}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\frac{1}{k_0}\nabla\times\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}),\\
&\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mathrm{j}k_0}[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\ln\varepsilon(\boldsymbol{r})+\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})],\\
&\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mathrm{j}k_0}[\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\ln\mu(\boldsymbol{r})+\nabla\cdot\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})].
\end{aligned}\right\} \tag{2.8.3}$$

(2.8.3)的四个方程式右侧分子均取有限值而分母中都有 k_0，在真空中的波长 $\lambda_0\to0$ 的极限条件下，$k_0=2\pi/\lambda_0\to\infty$，因此方程式的右侧可取作零而化为

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\times\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=-\frac{\omega\mu}{k_0}\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.4a}$$

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\times\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=\frac{\omega\varepsilon}{k_0}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.4b}$$

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=0, \tag{2.8.4c}$$

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=0. \tag{2.8.4d}$$

(2.8.4)式的后两个方程式可以通过前两个方程式分别点乘以$\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$得出，因此和 Maxwell 方程组的两个散度方程式一样也不是独立的方程式.

从(2.8.4a)式和(2.8.4b)式中消去 $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$可得

$$n^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})+[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})]\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})-[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]^2\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})=0. \tag{2.8.5}$$

(2.8.5)式的第二项由于(2.8.4c)式而为零，于是从(2.8.5)式给出 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$为非零解的条件，我们有

$$[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]^2=n^2(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.6}$$

或者

$$\left[\frac{\partial \mathscr{L}(\boldsymbol{r})}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial \mathscr{L}(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial \mathscr{L}(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right]^2=n^2(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.6a}$$

这里

$$n^2(\boldsymbol{r})=\frac{\omega^2\mu(\boldsymbol{r})\varepsilon(\boldsymbol{r})}{k_0^2}=\kappa_e(\boldsymbol{r})\kappa_m(\boldsymbol{r}). \tag{2.8.7}$$

光程函数 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$的微分方程式(2.8.6)或(2.8.6a)式称为程函方程,它是几何光学的基本方程式.在几何光学中通常是由 Fermat 原理导出程函方程,而在这里我们是在 $\lambda_0\to 0$ 的极限条件下作为一级近似从 Maxwell 方程式导出它的,从而明确了几何光学方法作为 Maxwell 理论的高频极限可以应用的条件及所含有的近似.

2. 射线的微分方程式[6,7,8,9]

用几何光学方法研究电磁波的传播问题时首先要给出波射线的踪迹,波射线的踪迹将由射线的微分方程的解给出,而射线的微分方程可从程函方程导出.

我们知道,物理上观察到的光的射线方向是它的时间平均能流密度的方向,写出平面波(2.8.2)式的时间平均能流密度

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(\mathscr{L}-\mathscr{L}^*)},$$

以(2.8.4a)式代入上式右方的 $\boldsymbol{H}_0^*$,然后展开三重矢量积,考虑到(2.8.4c)式后得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_0\times\left(-\frac{k_0}{\omega\mu^*}\boldsymbol{E}_0^*\times\nabla\mathscr{L}^*\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(\mathscr{L}-\mathscr{L}^*)}\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{k_0}{\omega\mu^*}(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\nabla\mathscr{L}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(\mathscr{L}-\mathscr{L}^*)}\right].\end{aligned} \tag{2.8.8}$$

在无耗介质中 $\mu(\boldsymbol{r})$和 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$都是实量(虚部为零),因此(2.8.8)式可简化为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{k_0}{\omega\mu}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\right]\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.8a}$$

这表明光的射线方向是由$\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$的方向确定的.

由程函方程(2.8.6)可定义一单位矢量

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{n(\boldsymbol{r})}\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r}), \tag{2.8.9}$$

因为$\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$的方向确定射线的方向,所以 $\boldsymbol{s}$ 是射线的单位矢量.现在设 $P(\boldsymbol{r})$为射线上一任意点,其位置矢量为 $\boldsymbol{r}$,s 为 P 点沿射线移动时走过的射线弧长,则由几何关系有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{s}. \tag{2.8.10}$$

将(2.8.9)式代入(2.8.10)式得

$$n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r}),\tag{2.8.11}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 表示射线上移动点 P 的空间坐标，所以(2.8.11)式是确定射线轨迹的方程，称为射线方程. 由(2.8.2)式，等 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$ 面是波的等相面，等相面族由方程式

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{r})=\text{const.}$$

给出，在几何光学中称它们为几何波前面. 由梯度的定义可知波射线是与几何波前曲面族正交的曲线族. 另一方面，由(2.8.4c)式和(2.8.4d)式我们知道在射线上的每一点电磁场矢量 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ 均与射线正交，所以电磁场矢量与几何波前曲面相切.

通常在实际问题中程函 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$ 不是个直观的函数，(2.8.11)式形式的射线方程不便于实际使用，现在我们利用程函方程来将它改写为便于实际使用的形式. (2.8.11)式两侧对 s 求微商得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})],$$

再将右方对 s 的求微商按下式改换成对空间坐标求微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla\tag{2.8.12}$$

便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})].\tag{2.8.13}$$

以射线方程(2.8.11)代入(2.8.13)式右方的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\frac{1}{n(\boldsymbol{r})}\nabla[\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]\cdot\nabla[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]=\frac{1}{2n(\boldsymbol{r})}\nabla[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]^2,$$

再以程函方程(2.8.6)将 $[\nabla\mathscr{L}(\boldsymbol{r})]^2$ 改换成 $[n(\boldsymbol{r})]^2$ 最后便得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\nabla[n(\boldsymbol{r})].\tag{2.8.14}$$

(2.8.14)式形式的射线方程是便于实际使用的，因为方程式中仅出现函数 $n(\boldsymbol{r})$，而在实际问题中 $n(\boldsymbol{r})$ 通常是事先给定的.

从射线方程式(2.8.14)容易求出射线的曲率，为此我们将(2.8.14)式左侧的微商写作两项，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right]=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}+n\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\nabla n.\tag{2.8.14a}$$

由图 2.29 中所示的两个相似三角形可得到下面的关系

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{n}_\rho}{\rho},$$

这里 ρ 是射线在 $P(\boldsymbol{r})$ 点的曲率半径，$\boldsymbol{n}_p$ 是指向射线的曲率中心的单位法线. 因此，射线在 $P(\boldsymbol{r})$ 点的曲率矢量

$$\boldsymbol{K}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{n}_p}{\rho}. \qquad (2.8.15)$$

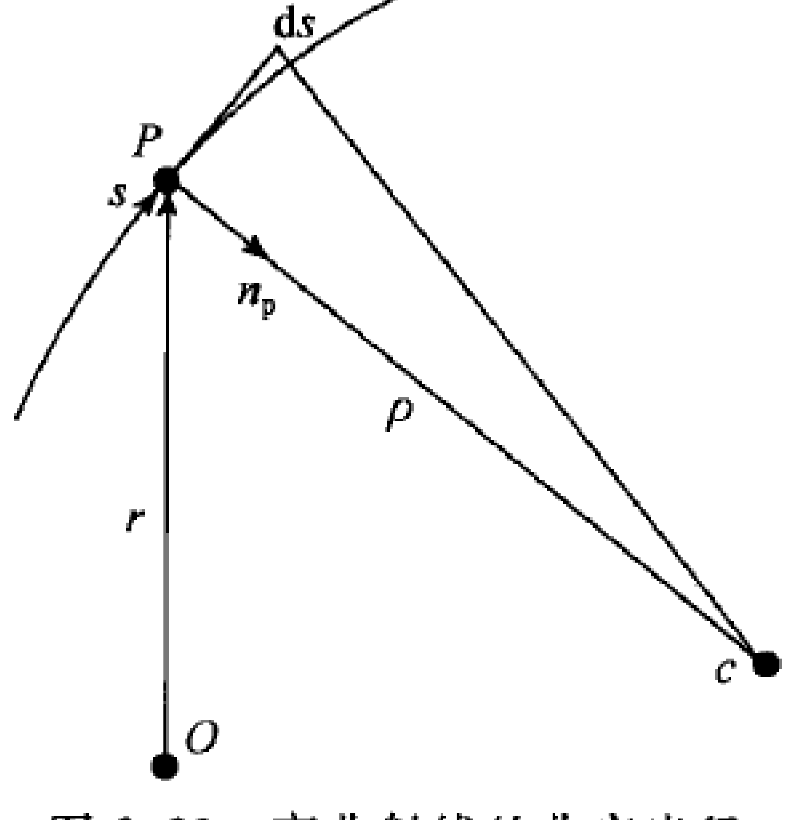


图 2.29　弯曲射线的曲率半径

(2.8.15)式代入(2.8.14a)式得

$$n\boldsymbol{K}=\nabla n-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{s},$$

再用 $\boldsymbol{K}$ 点乘上式的两侧，考虑到 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}=0$ 便有

$$|\boldsymbol{K}|^2=\boldsymbol{K}\cdot\frac{\nabla n}{n},$$

然后以(2.8.15)式代入上式右侧就得到射线在 $P(\boldsymbol{r})$ 点的曲率

$$|\boldsymbol{K}|=\frac{1}{\rho}=\boldsymbol{n}_p\cdot\nabla\ln n(\boldsymbol{r}). \qquad (2.8.16)$$

(2.8.16)式表明，在均匀介质中射线是直线，因为这时 $|\boldsymbol{K}|=0$，或 $\rho\to\infty$；而在非均匀介质中射线是弯曲的，射线总是向折射率高的方向弯曲.

3. 能量及场振幅的传播[7,8]

当用射线方法来描述波的传播过程时，可以根据能量关系来确定波的振幅在传播过程中的变化. 在无耗介质中 μ，ε 是实数，复数 Poynting 定理(1.1.12)式的微分形式为

$$\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*)-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}(\varepsilon\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\mu\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*)=0.$$

以(2.8.4a)和(2.8.4b)分别代入上式后一个圆括弧中的 $\boldsymbol{E}_0^*$ 及 $\boldsymbol{H}_0$，考虑到 $\mathscr{L}$ 为实数即可证明上式的后一个圆括弧为零，因此有

$$\nabla\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*)=0. \qquad (2.8.17)$$

在光学中光的强度 I 是由 Poynting 矢量

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\boldsymbol{H} \qquad (2.8.18)$$

的时间平均值确定的：

$$I=|\langle\boldsymbol{P}\rangle|. \qquad (2.8.19)$$

由于射线矢量 $\boldsymbol{s}$ 的方向与 $\langle\boldsymbol{P}\rangle$ 方向一致，$\langle\cdot\rangle$ 表示其内的量取时间平均值，所以有

$$\langle\boldsymbol{P}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=I\boldsymbol{s}, \qquad (2.8.20)$$

这样，能量关系式(2.8.17)就可用光强及射线矢量表示为

$$\nabla\cdot(I\boldsymbol{s})=0. \qquad (2.8.21)$$

(2.8.21)式表明 $I\boldsymbol{s}$ 为管量场,射线 $\boldsymbol{s}$ 将形成管状分布.

设想在几何波前面 $\mathscr{L}_1$ 上取一微分面元 $\mathrm{d}S_1$,由 $\mathrm{d}S_1$ 面元上发出的所有射线构成的射线管将与另一波前面 $\mathscr{L}_2$ 交出一个微分面元 $\mathrm{d}S_2$(图 2.30). 对于由面 $\mathrm{d}S_1$, $\mathrm{d}S_2$ 及射线管的外侧面构成的闭合曲面积分(2.8.21)式,由于侧面的法线与射线 $\boldsymbol{s}$ 垂直,侧面上的积分为零,因此有

$$I_1\mathrm{d}S_1 = I_2\mathrm{d}S_2, \tag{2.8.22}$$

也就是说沿任一个射线管 $I\mathrm{d}S$ 值保持不变,这称为几何光学的强度定理. 这样,在射线光学近似的精度内,由射线方程(2.8.14)求解出射线轨迹,用所需的若干条射线作出射线管后,场振幅的变化可以根据几何光学强度定理(2.8.22)式求出.

图 2.30 射线管的一段

另一方面,也可以从 Maxwell 方程式出发,在几何光学近似下直接导出场振幅所满足的输运方程(transport equation),场振幅在传播过程中的变化规律可由输运方程求出. 让我们从电场的旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

出发,两侧取旋度得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\times(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}) = -\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{H} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{H}\times\nabla\mu,$$

展开左侧的三重矢量积,再将右侧的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{H}$ 通过 Maxwell 方程换成 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}$,得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = n^2k_0^2\boldsymbol{E} + \frac{\nabla\mu}{\mu}\times\nabla\times\boldsymbol{E},$$

或

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) + n^2k_0^2\boldsymbol{E} + \nabla\ln\mu\times\nabla\times\boldsymbol{E} = 0. \tag{2.8.23}$$

将平面波解(2.8.2)式代入波动方程(2.8.23)中的各项,分别计算得

$$\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{E} &= \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{E} \\
&= \{-\mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}\cdot[-\mathrm{j}k_0(\nabla\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0 + \nabla\boldsymbol{E}_0] - \mathrm{j}k_0(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0 \\
&\quad - \mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\boldsymbol{E}_0 + \nabla^2\boldsymbol{E}_0\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}}, \\
\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) &= \{-\mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}[-\mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}\cdot\boldsymbol{E}_0 + \nabla\cdot\boldsymbol{E}_0] \\
&\quad - \mathrm{j}k_0\,\nabla(\nabla\mathscr{L}\cdot\boldsymbol{E}_0) + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}} \\
&= \{-\mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0) + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}}, \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= \{\nabla\times\boldsymbol{E}_0 - \mathrm{j}k_0\,\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{E}_0\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}},
\end{aligned}$$

得到 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$ 的第二个等式时应用了(2.8.4c)式. 以上各式代入(2.8.23)式,消去 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}}$,再除以 $(\mathrm{j}k_0)^2$ 后得到振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 的下列方程式

$$\begin{aligned}&[(\nabla\mathscr{L})^2-n^2]\boldsymbol{E}_0\\&+\frac{1}{(\mathrm{j}k_0)}[(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\mu-\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0-2(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0\\&-(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\ln\mu)\nabla\mathscr{L}+(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\nabla\mathscr{L}]\\&+\frac{1}{(\mathrm{j}k_0)^2}[\nabla^2\boldsymbol{E}_0+\nabla\ln\mu\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)]=0.\end{aligned}\quad(2.8.24)$$

当 k_0 很大时(2.8.24)式的第三项可略去,第一项由于程函方程(2.8.6)而为零,这样便可简化为

$$(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\mu-\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0-2(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0-(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\ln\mu)\nabla\mathscr{L}+(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\nabla\mathscr{L}=0.\quad(2.8.24a)$$

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=0$ 可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0=-(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\ln\varepsilon),$$

而且

$$\nabla\ln\mu+\nabla\ln\varepsilon=\nabla\ln n^2=2\nabla\ln n,$$

于是(2.8.24a)式可改写为

$$(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0+(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\ln n)\nabla\mathscr{L}-\frac{1}{2}(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\mu)\boldsymbol{E}_0=0,\quad(2.8.25)$$

这是平面波(2.8.2)式的电场振幅在几何光学近似的精度内所满足的输运方程. 磁场的振幅则满足类似的输运方程:

$$(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_0+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{H}_0+(\boldsymbol{H}_0\cdot\nabla\ln n)\nabla\mathscr{L}-\frac{1}{2}(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\varepsilon)\boldsymbol{H}_0=0.\quad(2.8.26)$$

由场振幅的输运方程式可求出,当波在非均匀介质中传播时几何光学场振幅的变化规律. 用 $\boldsymbol{E}_0^*$ 点乘(2.8.25)式,考虑到(2.8.4c)式得

$$\boldsymbol{E}_0^*\cdot[(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0]+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{E}_0-\frac{1}{2}(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\mu)\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{E}_0=0,$$

此式再与它的复共轭式相加后得到

$$(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)+(\nabla^2\mathscr{L}-\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\ln\mu)(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)=0.\quad(2.8.27)$$

因为

$$\mu\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu}\nabla\mathscr{L}\right)=\nabla^2\mathscr{L}+(\nabla\mathscr{L})\cdot\mu\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)=\nabla^2\mathscr{L}-(\nabla\mathscr{L})\cdot\nabla\ln\mu,$$

$$\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla=n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},$$

所以方程(2.8.27)化为

$$n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)+\mu\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu}\nabla\mathscr{L}\right)(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)=0. \tag{2.8.28}$$

当沿某一射线积分(2.8.28)式时可得到这条射线上的两点 1 和 2 的电场振幅之比为

$$\frac{(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)_2}{(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)_1}=\exp\left[-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\kappa_m}{\kappa_e}}\nabla\cdot\left(\frac{1}{\kappa_m}\nabla\mathscr{L}\right)\mathrm{d}s\right]; \tag{2.8.29}$$

同样,由磁场振幅的输运方程(2.5.26)可求出

$$\frac{(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*)_2}{(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*)_1}=\exp\left[-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\kappa_e}{\kappa_m}}\nabla\cdot\left(\frac{1}{\kappa_e}\nabla\mathscr{L}\right)\mathrm{d}s\right]. \tag{2.8.30}$$

对于波在均匀介质中传播的简单情况,电场振幅的输运方程(2.8.25)化为

$$n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0=0, \tag{2.8.31}$$

沿射线积分后可求出

$$\boldsymbol{E}_0(s_2)=\boldsymbol{E}_0(s_1)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{n}\nabla^2\mathscr{L}(s)\mathrm{d}s\right], \tag{2.8.32}$$

式中的程函 $\mathscr{L}(s)$则可由程函方程

$$\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla\mathscr{L}=n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}=n^2$$

的解给出,上式化为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}s}=n, \tag{2.8.33}$$

积分后即可得

$$\mathscr{L}(s)=\mathscr{L}(s_1)+\int_{s_1}^{s}n\mathrm{d}s=\mathscr{L}(s_1)+n(s-s_1). \tag{2.8.34}$$

可见,几何光学或射线光学已形成为一套完整的方法,作为一种近似方法它对于高频或极短波长极限下的电磁波传播问题的求解是很有效的. Debye 和 Sommerfeld 首先从标量波动方程出发导出了程函方程. 从 Maxwell 方程式出发以矢量形式导出几何光学方程式的工作主要是由 Luneberg 和 Fock 等人完成的. 关于几何光学近似的更为详细的讨论,包括高阶近似、各向异性介质问题以及若干应用问题可以参考 Kline 和 Kay 的专著[18].

4. 平方律介质的聚焦性质[19]

作为射线光学方法应用的例子,我们来讨论一种重要的非均匀介质问题,这时介质的折射率随一维坐标按下面的规律变化:

$$n(x)=n_1\left[1-\Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \tag{2.8.35}$$

这里 n_1,Δ 和 a 是常数,而且 $\Delta(x/a)^2\ll1$. 这种介质称为平方律介质(square-law

media)，在圆柱形非均匀光纤或平面型集成光路中常使用这种介质，介质镜波导系统中的镜介质也属于这一类型. 为了简单起见，(2.8.35)式所给出的是平面型的非均匀介质，但是圆柱型的非均匀介质也完全可用类似的方法分析. 由于 $\Delta(x/a)^2 \ll 1$，(2.8.35)式也可写作

$$n^2(x) = n_1^2\left[1 - 2\Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]. \tag{2.8.35a}$$

我们来求(2.8.35)式所表示的平方律介质中 xz 平面内的平面射线的轨迹. 射线方程(2.8.14)的 x 和 z 分量分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right] = \frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{2.8.36a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[n(x)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right] = 0. \tag{2.8.36b}$$

由(2.8.36b)式可求出

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = A\frac{1}{n(x)},$$

其中的常数 A 可由射线的初始条件定出. 设射线起始于 $(x_0,0)$ 点，在起始点射线与 z 轴的夹角为 θ_0，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right|_{(x_0,0)} = A\frac{1}{n(x_0)} = \cos\theta_0.$$

由此可得

$$A = n(x_0)\cos\theta_0, \tag{2.8.37}$$

而常数

$$k_0 A = k_0 n(x_0)\cos\theta_0 = k_z(x_0,0) = k_z(x,z) = \beta \tag{2.8.38}$$

为 z 方向的波数. 这样，(2.8.36b)式的解最终可写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\beta}{k_0 n(x)}. \tag{2.8.39}$$

由于

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1, \tag{2.8.40}$$

所以无需直接求解(2.8.36a)式，将解(2.8.39)式代入(2.8.40)式即可求出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 - \left(\frac{\beta}{k_0 n(x)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8.41}$$

由(2.8.39)式和(2.8.41)式可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\beta}{[k_0^2 n^2(x) - \beta^2]^{\frac{1}{2}}},$$

再以(2.8.35a)式代入上式即得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{a\beta}{[u^2-v^2(x/a)^2]^{\frac{1}{2}}},\tag{2.8.42}$$

其中

$$u^2=a^2(k_0^2n_1^2-\beta^2),\ v^2=a^2k_0^2 2\Delta n_1^2.$$

(2.8.42)式的积分即给出射线的轨迹

$$\frac{v}{a^2\beta}z=\arcsin\left(\frac{vx}{ua}\right)-\arcsin\left(\frac{vx_0}{ua}\right).$$

注意到

$$a\beta\tan\theta_0=[u^2-v^2(x_0/a)^2]^{\frac{1}{2}},$$

上式可改写为

$$x=x_0\cos\left(\frac{v}{a^2\beta}z\right)=\frac{a^2\beta}{v}\tan\theta_0\sin\left(\frac{v}{a^2\beta}z\right).\tag{2.8.43}$$

(2.8.43)式表明射线的横向位移是轴向位移的周期函数,而且周期与射线的初始横向位移 x_0 无关.

对于傍轴射线,$\theta_0\approx0$, $\beta\approx k_0n_1$,$v/a^2\beta=(2\Delta)^{\frac{1}{2}}/a$,(2.8.43)式化为

$$x\approx x_0\cos\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}}\frac{z}{a}\right]+\frac{a\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}\sin\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}}\frac{z}{a}\right],\tag{2.8.44}$$

射线轨迹的周期为 $2\pi a/(2\Delta)^{\frac{1}{2}}$. 射线轨迹的周期性说明平方律介质具有聚焦的性质,像将以周期 $2\pi a/(2\Delta)^{\frac{1}{2}}$ 重复出现. 图 2.31 示出了一块轴向有限长的平方律介质的成像作用. 当一条平行于 z 轴的射线在 $z=0$ 平面离轴 x_0 处射入平方律介质块后,由(2.8.44)式可求出当此射线在 $z=L$ 处离开介质时射线与 z 轴的距离 x 及斜率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$ 分别为

$$x=x_0\cos\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}}\frac{L}{a}\right],\tag{2.8.45a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{(2\Delta)^{\frac{1}{2}}}{a}x_0\sin\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}}\frac{L}{a}\right]\approx\theta_i,\tag{2.8.45b}$$

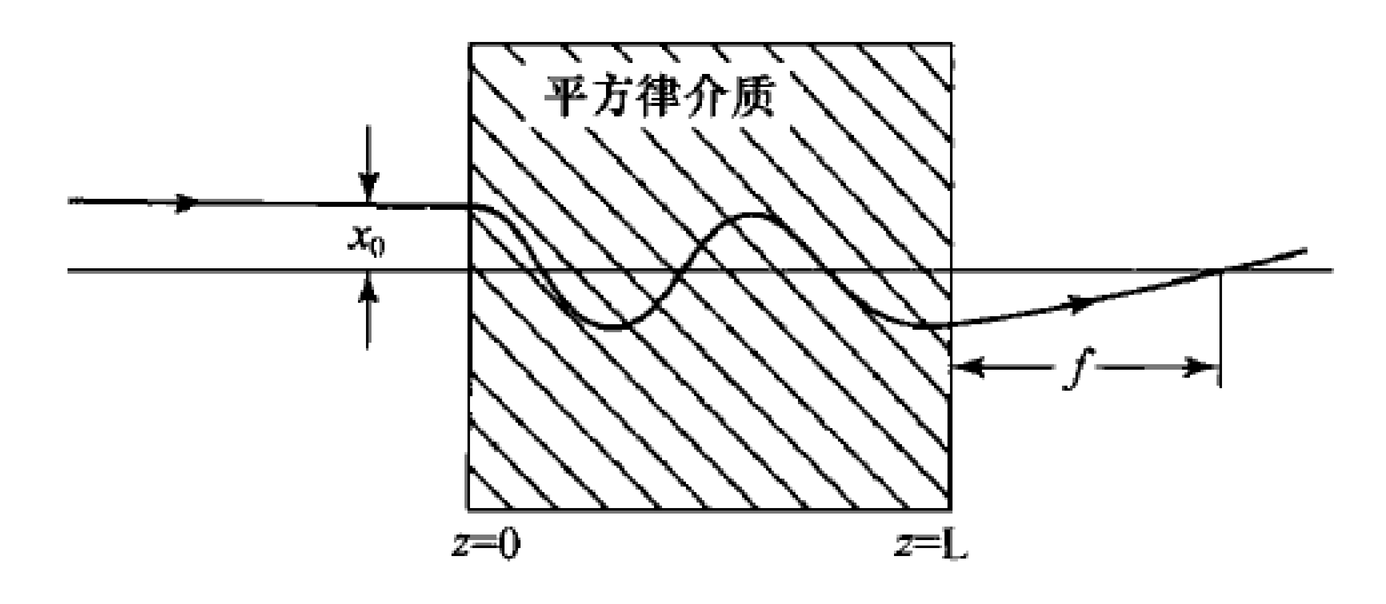


图 2.31 平方律电介质对傍轴射线的聚焦作用

θ_i 为射线与 $z=L$ 平面的法线之间的夹角. 设平方律介质外的均匀介质折射率为 n_0，根据折射定律可求出射线出射到均匀介质表面时与 z 轴形成的夹角

$$\theta \approx -\frac{n_1(2\Delta)^{\frac{1}{2}}}{n_0 a} x_0 \sin\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}} \frac{L}{a}\right], \tag{2.8.46}$$

应用折射定律时已将射线出射点的平方律介质的折射率取作 n_1，对于傍轴射线这是良好的近似. 从平方律介质边界 $z=L$ 到射线与 z 轴的交点的距离就是透镜的焦距 f，由(2.8.45)式和(2.8.46)式可得

$$f \approx \left|\frac{x}{\theta}\right| \approx \frac{n_0 a}{n_1(2\Delta)^{\frac{1}{2}}} \cot\left[(2\Delta)^{\frac{1}{2}} \frac{L}{a}\right]. \tag{2.8.47}$$

可见，在傍轴近似下(2.8.47)式给出的焦长与射线射入时离轴的距离无关，所有的傍轴射线均会聚于焦点，一段长度有限的平方律介质就与实际透镜的作用一样.

现代的实验技术已可制作折射率的横向分布接近于平方律分布的极细光纤，这种光纤可使在它前端的细小物体成像并通过光纤传输，已在医学中用于窥视人体腹腔中的病变.

5. 射线追迹

实际的非均匀介质问题是复杂的，一般说来不能像平方律介质的情况那样可求出射线轨迹的解析表达式. 对于任何情况均有效的求射线轨迹的方法，仍然是可以在计算机上执行的数值方法.

设射线上一已知点 P_0 的射线弧长值为 s_0，在 P_0 附近将 $\boldsymbol{r}$ 展开为弧长 s 的 Taylor 级数得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} \Delta s + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} (\Delta s)^2 + \cdots, \tag{2.8.48}$$

其中 $\Delta s = s - s_0$. $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 也可同样地展开为

$$\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} + \left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=s_0} \Delta s + \cdots = \boldsymbol{s}(s_0) + \boldsymbol{K}(s_0)\Delta s + \cdots, \tag{2.8.49}$$

这里 $\boldsymbol{K}$ 为(2.8.15)式定义的曲率矢量. 由关系式

$$n\boldsymbol{K} = \nabla n - \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{s}$$

并考虑到 $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{s} \cdot \nabla n$ 可得

$$\boldsymbol{K} = \frac{[\nabla n - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s} \cdot \nabla n)]}{n}. \tag{2.8.50}$$

利用这些关系就可以从 P_0 点出发计算并描绘出射线的轨迹. 首先由给定的 P_0 点的空间坐标 $\boldsymbol{r}_0$ 和射线方向 $\boldsymbol{s}$ 从(2.8.50)式计算出 P_0 点的 $\boldsymbol{K}$,然后利用(2.8.48)式和(2.8.49)式就可求出 P_0 点的一个邻近点的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{s}$. 重复以上步骤就可求得下一个邻近点的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{s}$. 如此重复下去就可描绘出整个射线的轨迹,只要 Δs 取得足够小就可得到足够好的精度. 上面的计算及绘图工作均可在计算机上进行.

参考文献

[1] Reitz J R, Milford F J, Christy R W. Foundations of electomagnetic theory. 3nd ed. Addison Wesley, 1979: ch. 19.

[2] Jackson J D. Classical electrodynamics. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1975: ch. 7. [中译本:经典电动力学. 朱培豫译. 北京:人民教育出版社,1978.]

[3] Landau L D, Lifshitz E M. Electrodynamics of continuous media. 2nd ed. Pergamon Press, 1984: ch. 9, ch. 11. [中译本:连续媒质电动力学. 周奇译. 北京:人民教育出版社,1963.]

[4] Panofsky W K H, Phillips M. Classical electricity and magnetism. 2nd ed. Addison Wesly, 1962: ch. 22.

[5] Kittel C. Introduction to solid state physics. 4th ed. Wiley, 1971: ch. 12.

[6] Zhou S A. Electromagnetic theory of superconductors. Peregrinus, London, 1991: ch. 2.

[7] Zhi-Yuan Shen. High-temperature superconducting microwave circuits. Artech, Boston, 1994: ch. 2. [中译本:高温超导微波电路. 盛克敏等译. 北京:国防工业出版社,2000.]

[8] Lancaster M J. Passive microwave devices applications of high-temperature superconductors, Cambridge Univ. Press, 1997: ch. 1.

[9] Kong J A. Electromagnetic wave theory, John Wiley & Sons, 1986: ch. 2.

[10] Halwiczka P. Gyrotropic waveguides, Academic Press, 1981: ch. 1.

[11] Stincon D C. Intermediate mathematics of electromagnetics. Prentice-Hall, 1976: ch. 6. [中译本:电磁场中的数学. 王昌耀,刘天惠译. 北京:国防工业出版社,1982.]

[12] Collin R E. Field theory of guided waves. 2nd ed. IEEE Press, 1990: ch. 12.

[13] Wait J R. Electromagnetic wave theory. Harper & Row, 1985: ch. 2.

[14] Brekhovskikh L M. Waves in layered media, Academic Press, 1960: ch. 3. [中译本:分层介质中的波. 杨训仁译. 北京:科学出版社,1960.]

[15] Wait J R. (Lectures on) Wave propagation theory. Pergamon Press, 1981: ch. 15, ch. 16.

[16] Jones D S. The theory of electromagnetism. Pergamon Press, 1964: ch. 6.
[17] Born M, Wolf E. Principles of optics. 6th ed. Pergamon Press, 1980: ch. 3. [中译本：光学原理. 杨葭荪等译. 北京：科学出版社,1978.]
[18] Kline M, Kay I W. Electromagnetic theory and geometrical optics. Interscience, 1965.
[19] Marcuse D. Light transmission optics. 2nd ed. Van Nostrand, 1982: ch. 3, ch. 7.

第三章　导行电磁波

§3.1　金属管波导

1. 导波的基本方程式[1]

在上一章中我们所讨论的波传播问题基本上只涉及平面电磁波在无限大(即无边界)的均匀媒质中的传播，这是一个被理想化了的波传播模型，其目的主要在于突出波在赖以传播的该种媒质中应有的特性.实际的电磁波传播过程大多不能离开介质或导体边界的影响.电磁波实际应用的主要目的，大多是要求一定频率范围的电磁波携带能量或信息沿着一定的传输路径传输至需要的地方，即要求电磁波定向传输.微波频率电磁波的定向传输，除了在自由空间中以辐射波束的方式传输外，主要是依靠导体或介质结构实现的.这些结构至少由两种不同物质(例如导体和电介质，或两种不同的电介质)构成，其分界面大多为柱形，波的电磁场被束缚于界面包围的区域中或束缚于分界面附近，使波的电磁能量沿平行于界面的方向传播，也就是说，电磁波被界面导引着传播.可以导引电磁波传播的物质结构称为导波结构或导波系统，例如波导、光纤、传输线和慢波结构等.沿着导波结构传输的电磁波称为导行电磁波或被导电磁波，简称为导波.

在讨论具体的导波问题之前我们先来导出导波的基本方程式.对沿均匀的柱面系统传播的导波，取柱面的轴线为 z 轴(纵向)，波的传播因子可写作 $\exp(\mathrm{j}\omega t-\gamma z)$.一般情况下 γ 是复常数，其实部 $\mathrm{Re}\gamma>0$ 为波的衰减常数，其虚部 $\mathrm{Im}\gamma$ 为波的相位常数.沿均匀系统传播的导波的电磁场可写为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{3.1.1}$$

如果将场矢量的横向分量和纵向分量分离，上式可写成

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{E}_t(x,y)+\boldsymbol{a}_zE_z(x,y)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t-\gamma z}, \tag{3.1.2a}$$

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_t(x,y)+\boldsymbol{a}_zH_z(x,y)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t-\gamma z}. \tag{3.1.2b}$$

将(3.1.2a)和(3.1.2b)代入 Maxwell 方程组的旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E},$$

而且进一步将矢量微分算符 ∇ 也写成横向和纵向两部分之和

$$\nabla=\nabla_t+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}=\nabla_t-\gamma\boldsymbol{a}_z, \tag{3.1.3}$$

消去 $\exp(\mathrm{j}\omega t-\gamma z)$ 因子后得

$$(\nabla_t - \gamma \boldsymbol{a}_z) \times (\boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{a}_z E_z) = -j\omega\mu(\boldsymbol{H}_t + \boldsymbol{a}_z H_z), \tag{3.1.4a}$$

$$(\nabla_t - \gamma \boldsymbol{a}_z) \times (\boldsymbol{H}_t + \boldsymbol{a}_z H_z) = j\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{a}_z E_z). \tag{3.1.4b}$$

分离(3.1.4a,b)式的纵向和横向分量，得四个方程

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = -j\omega\mu H_z \boldsymbol{a}_z, \tag{3.1.5a}$$

$$\nabla_t \times \boldsymbol{H}_t = j\omega\varepsilon E_z \boldsymbol{a}_z, \tag{3.1.5b}$$

$$-\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z - \gamma \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_t, \tag{3.1.5c}$$

$$-\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z - \gamma \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{H}_t = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_t. \tag{3.1.5d}$$

在(3.1.5c)和(3.1.5d)式中分别消去 $\boldsymbol{E}_t$ 或 $\boldsymbol{H}_t$ 得

$$(\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2)\boldsymbol{E}_t = j\omega\mu \boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z,$$

$$(\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2)\boldsymbol{H}_t = -j\omega\varepsilon \boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z - \gamma \nabla_t H_z.$$

令

$$k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2 = k^2 + \gamma^2, \tag{3.1.6}$$

上面的两式便可写成

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{1}{k_c^2}[-\gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu \boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z], \tag{3.1.7a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{1}{k_c^2}[-\gamma \nabla_t H_z - j\omega\varepsilon \boldsymbol{a}_z \times \nabla_t E_z]. \tag{3.1.7b}$$

这表明导波电磁场的横向分量可由场的两个纵向分量 E_z 和 H_z 完全确定，导波问题的求解便归结为场的纵向分量的求解问题.

为导出场的纵向分量满足的方程式，以∇_t叉乘(3.1.7a)式，得

$$k_c^2 \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = j\omega\mu \nabla_t \times (\boldsymbol{a}_z \times \nabla_t H_z) - \gamma \nabla_t \times \nabla_t E_z = j\omega\mu \boldsymbol{a}_z \nabla_t^2 H_z,$$

再将(3.1.5a)式代入上式左侧，便得 H_z 满足的方程式

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0. \tag{3.1.8a}$$

类似地有

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0. \tag{3.1.8b}$$

(3.1.8a,b)是两个彼此独立的标量波动方程式，它们的解也彼此独立. 根据导波系统的几何结构和物质特性所给定的边界条件，分别由(3.1.8a)和(3.1.8b)式求出场的纵向分量 E_z 和 H_z，将它们代入(3.1.7a)和(3.1.7b)式便可求出场的横向分量. 所以，场的纵向分量 E_z 和 H_z 对于整个导波问题相当于两个标量势函数，导波场的其余分量可通过这两个标量势函数求出：如果令(3.1.3)式中的横向算符

$$\nabla_t = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.1.9a}$$

得到直角坐标系中的导波；若将∇_t写作

$$\nabla_t = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{a}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{3.1.9b}$$

则得到圆柱坐标系中的导波.

2. 导波的分类

由于纵向电场和磁场满足的方程式彼此独立,因此存在着以下两种类型的导波.如果波的 $E_z=0, H_z\neq 0$,横向分量仅由纵向磁场决定,这种类型的导波称为磁型(H 型)波.由于这种导波的电矢量完全在横平面内,又称为横电型(TE 型)波.另一种类型的导波 $E_z\neq 0, H_z=0$,横向分量仅由纵向电场决定,称为电型(E 型)波.电型波的磁场矢量完全在横平面内,又称为横磁型(TM 型)波.TE 型波和 TM 型波可以在金属管波导中传播,这是本节要论述的主题.

还有另一种类型的导波,它的电磁场纵向分量均为零,$E_z=H_z=0$,但不意味着波的横向电磁场也为零,因为(3.1.7a,b)式右侧分母中的 k_c 也可以为零.这种类型的导波只有横向电磁场,称为横电磁(TEM)型波,我们在此作简单的讨论.对于 TEM 型波,$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t, \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_t$,由 Maxwell 方程组的散度方程有

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{E}_t=0,\quad \nabla_t\cdot\boldsymbol{H}_t=0. \tag{3.1.10a}$$

由(3.1.5a,b)式有

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t=0,\quad \nabla_t\times\boldsymbol{H}_t=0. \tag{3.1.10b}$$

将(3.1.10a,b)式代入矢量等式$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$,可知 TEM 型波的电磁场应满足横平面内的 Laplace 方程式:

$$\nabla_t^2\boldsymbol{E}_t(x,y)=0,\quad \nabla_t^2\boldsymbol{H}_t(x,y)=0. \tag{3.1.11}$$

因此,TEM 型波的电磁场在横平面内须呈静态场分布,这个横向分布沿轴向以波 $e^{j\omega t-\gamma z}$ 的形式传播,其电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t(x,y)e^{j\omega t-\gamma z},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_t(x,y)e^{j\omega t-\gamma z}. \tag{3.1.12}$$

由(3.1.5c,d)式,TEM 型波的电场和磁场之间须满足关系:

$$\boldsymbol{H}_t=-\frac{j\gamma}{\omega\mu}\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}_t,\quad \boldsymbol{E}_t=\frac{j\gamma}{\omega\epsilon}\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{H}_t, \tag{3.1.13}$$

这说明 $\boldsymbol{E}_t$ 和 $\boldsymbol{H}_t$ 彼此正交,而且能流密度 $\boldsymbol{S}$ 沿 z 轴正向,$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}$ 构成右手正交系.在(3.1.13)的两式中消去 $\boldsymbol{E}_t$ 或 $\boldsymbol{H}_t$ 可求得 γ,例如消去 $\boldsymbol{H}_t$ 后得

$$\boldsymbol{E}_t=-\frac{\gamma^2}{\omega^2\mu\varepsilon}\boldsymbol{E}_t,$$

由此有

$$\gamma^2=-\omega^2\mu\epsilon,\quad \gamma=j\beta=j\omega\sqrt{\mu\epsilon}=jk,\quad k_c^2=\omega^2\mu\epsilon+\gamma^2=0. \tag{3.1.14}$$

因此,TEM 型导波与无限大均匀介质中的平面波有相同的特征.

一个导波系统能否传播 TEM 型波取决于能否在横平面内建立静态电场和磁场.例如来看电场,由(3.1.10a,b)式,横平面内的电场可表示为标势 $\Phi(x,y)$

的梯度，$\Phi(x,y)$满足横平面内的 Laplace 方程：

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}(x,y)=-\nabla_{\mathrm{t}}\Phi(x,y),\quad \nabla_{\mathrm{t}}^2\Phi(x,y)=0. \tag{3.1.15}$$

为建立横向静电场，$\Phi(x,y)$需要有满足导波结构边界条件的非零解. 由静电学我们知道，在有两根以上柱形导体的结构中，$\Phi(x,y)$存在非零解，例如平行双导线或多导线传输线、同轴线等. 由于同轴线有内导体，沿内导体的轴向传导电流产生横向静态磁场，使 TEM 型波得以在其内传播. 金属空管波导中若要传播 TEM 型波，在管壁的横平面截线上须保持等势条件，但在其内没有另一导体，不能形成非零静电势分布；没有内导体也不能形成轴向传导电流，以建立横向磁场分布. 所以空管金属波导不能传播 TEM 型波.

3. 任意截面金属管波导

图 3.1 所示为任意截面金属管波导，柱形金属管内为空气或填充有均匀电介质，管内的封闭区域为导波的传播区，它代表了导波结构的一大类，称为封闭式波导. 取 z 轴与柱的母线平行，L 表示与 z 轴垂直的平面在柱的内面上的截线，在任何 z 平面都会截得相同的 L，这样的结构称为均匀波导. 我们假定金属管为理想导体，管内的填充介质无耗，μ,ε 为实数，因此 $\gamma=\mathrm{j}\beta$.

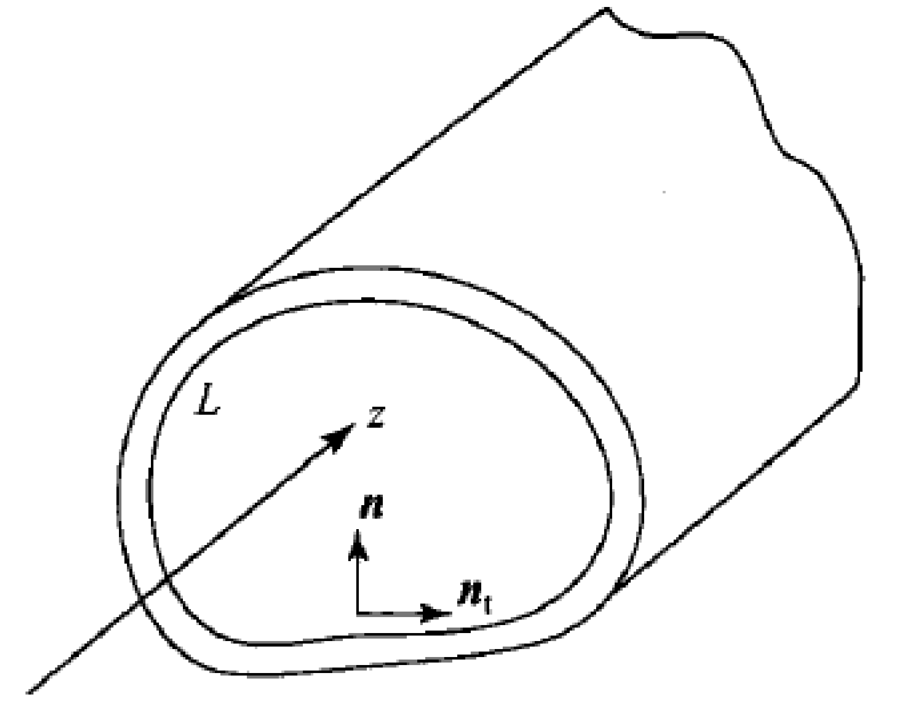


图 3.1　任意截面形状金属管波导

(1) TM 型波

TM 型波的 $E_z\neq 0, H_z=0$，由(3.1.7a,b)式其横向电磁场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=-\frac{\mathrm{j}\beta}{k_{\mathrm{c}}^2}\nabla_{\mathrm{t}}E_z,\quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}=-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_{\mathrm{c}}^2}\boldsymbol{a}_z\times\nabla_{\mathrm{t}}E_z. \tag{3.1.16}$$

E_z 由方程(3.1.8b)

$$\nabla_{\mathrm{t}}^2E_z+k_{\mathrm{c}}^2E_z=0,\quad k_{\mathrm{c}}^2=k^2-\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2 \tag{3.1.17}$$

及在柱内壁面上应满足的边界条件确定.

对于交变电磁场，Maxwell 方程组的两个散度方程可以从旋度方程导出，仅使用两个旋度方程对应的电场和磁场切线分量边界条件就可以确定电磁场边值问题的解. 现在理想导体管壁内的电磁场值为零，但管壁面外侧的切线磁场不能给定，因管壁面上的面电流为未知. 管壁面 S 外侧的电场切线分量为零是唯一可用的边界条件：

$$E_z\big|_S=0. \tag{3.1.18}$$

现在我们来证明，由 E_z 的边界条件(3.1.18)可以导致导波场的其余分量满足在边界面 S 上应满足的物理条件. 由(3.1.16)的第一式，在波导壁 S 面上

$\boldsymbol{E}_{\rm t}$ 与$\left.\dfrac{\partial E_z}{\partial l}\right|_L$ 成正比,这里 l 为沿波导横截面周线 L 的位移. 由(3.1.18),E_z 在整个 L 上为零,而有

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial l}\right|_L = 0, \tag{3.1.19}$$

便证明了 $\boldsymbol{E}_{\rm t}$ 在 S 面上的切线分量也为零. (3.1.16)的第二式表明 $\boldsymbol{H}_{\rm t}$ 在 S 面上的法线分量与

$$-\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{n}_{\rm t}\left.\frac{\partial E_z}{\partial l}\right|_L = \boldsymbol{n}\left.\frac{\partial E_z}{\partial l}\right|_L$$

成正比,这里 $\boldsymbol{n}_{\rm t}$ 为周界 L 的切线方向单位矢量,$\boldsymbol{n}$ 为法线方向的单位矢量(图 3.1). 由(3.1.19)式,$\boldsymbol{H}_{\rm t}$ 在 S 面上的法线分量也为零.

由此可见,TM 型波的场由 E_z 所满足的方程(3.1.17)和边界条件(3.1.18)完全确定.

(2) TE 型波

此时 $E_z=0, H_z\neq 0$,求解须从 H_z 满足的方程

$$\nabla_{\rm t}^2 H_z + k_{\rm c}^2 H_z = 0 \tag{3.1.20}$$

和 H_z 满足的 S 面上边界条件着手. 但 H_z 是切线磁场,在 S 面上的值为未知,可用的边界条件仍然只有切线电场为零. 由(3.1.7a,b)式求出横向电磁场

$$\boldsymbol{E}_{\rm t} = \frac{{\rm j}\omega\mu}{k_{\rm c}^2}\boldsymbol{a}_z \times \nabla_{\rm t} H_z, \quad \boldsymbol{H}_{\rm t} = -\frac{{\rm j}\beta}{k_{\rm c}^2}\nabla_{\rm t} H_z. \tag{3.1.21}$$

由上式的第一式可见,横向电场的切线分量正比于

$$\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{n}\frac{\partial H_z}{\partial n} = \boldsymbol{n}_{\rm t}\frac{\partial H_z}{\partial n},$$

要求 $\boldsymbol{E}_{\rm t}$ 的切线分量为零导致

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_S = 0. \tag{3.1.22}$$

由(3.1.21)的第二式不难看出,$\boldsymbol{H}_{\rm t}$ 在 S 面上的法线分量与$\dfrac{\partial H_z}{\partial n}$成正比,由于满足条件(3.1.22),$\boldsymbol{H}_{\rm t}$ 也满足在 S 面上法线分量为零的条件. 因此,边界条件(3.1.22)保证了 TE 型波的所有场分量满足 S 面上的物理条件.

(3) 波传播特性

TM 型波的 E_z 和 TE 型波的 H_z 满足同样的波动方程,由它确定的波相位常数与频率的关系为

$$\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_{\rm c}^2, \quad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{\rm c}^2}. \tag{3.1.23}$$

方程(3.1.23)称为特征方程,它决定传播波的色散特性. $k_{\rm c}^2$ 是由波导横截面的几何形状和尺度决定的与频率有关的常数,即使填充介质的 μ,ε 与频率无关,波

的相速和群速都与频率有关,导波是色散波.

由(3.1.23)式求出波的相速和群速:

$$\left.\begin{aligned} v_{\mathrm{p}} &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-(k_{\mathrm{c}}/k)^2}} > \frac{\omega}{k} = v, \\ v_{\mathrm{g}} &= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\omega}{k}\sqrt{1-(k_{\mathrm{c}}/k)^2} < \frac{\omega}{k} = v, \end{aligned}\right\} \tag{3.1.24}$$

式中 $v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$是填充介质中的光速. 由于 $k>k_{\mathrm{c}}$,所以总有 $v_{\mathrm{p}}>v, v_{\mathrm{g}}<v$,而且有

$$v_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{g}} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}.$$

要求 $k>k_{\mathrm{c}}$ 是因为对于传播的波 β 须取实数值. 由(3.1.23)式,使 $\beta=0$ 的频率设为 ω_{c},有 $\omega_{\mathrm{c}}=k_{\mathrm{c}}/\sqrt{\mu\varepsilon}$,此时 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=k_{\mathrm{c}}$. 当 $\omega<\omega_{\mathrm{c}}$ 时,$\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_{\mathrm{c}}^2<0$,$\beta$ 为纯虚数,$\beta=-\mathrm{j}\alpha$,波的电磁场随 z,t 按

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)} = \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

变化,波的幅度随距离以指数律衰减,波传播截止. 只当 $\omega>\omega_{\mathrm{c}}$ 时导波才能在空管波导中传播. $\omega=\omega_{\mathrm{c}}$ 为波传播截止的频率,称为截止频率,k_{c} 称为截止波数.

4. 矩形波导

矩形截面的金属管波导是最常用的波导,其几何结构及坐标系设置示于图3.2,在此我们约定 $a>b$.

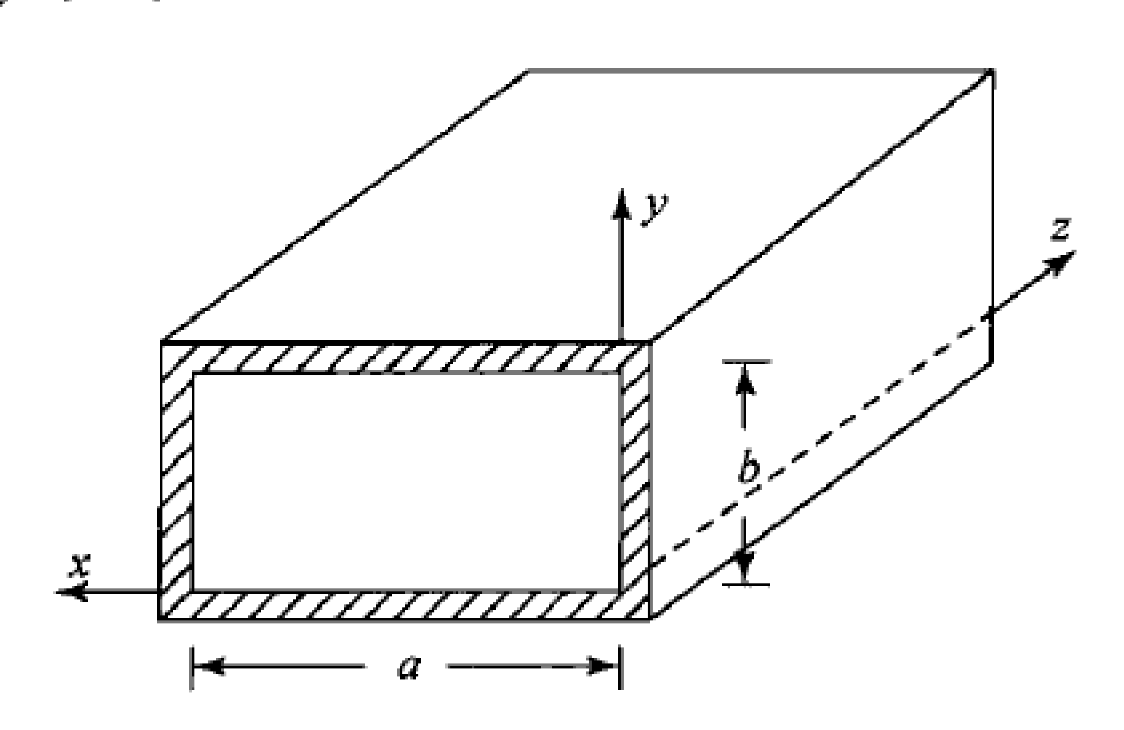


图 3.2 矩形截面金属管波导

(1) TM 型波

纵向电场 E_z 满足的方程式和边界条件现在具体写作:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_z + k_{\mathrm{c}}^2 E_z = 0, \tag{3.1.25}$$

$$E_z\Big|_{\substack{x=0,a\\ y=0,b}}=0. \tag{3.1.26}$$

用分离变数法求出方程(3.1.25)满足边界条件(3.1.26)的解为

$$E_z(x,y)=E_0\sin k_x x\cdot\sin k_y y, \tag{3.1.27}$$

其中

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b}\quad (m,n=1,2,\cdots). \tag{3.1.28}$$

TM 波各个场分量的表达式为

$$\left.\begin{aligned}
E_z&=E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{j(\omega t-\beta z)},\\
E_x&=-\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a}E_0\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{j(\omega t-\beta z)},\\
E_y&=-\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b}E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{j(\omega t-\beta z)},\\
H_x&=\frac{j\omega\varepsilon n\pi}{k_c^2 b}E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{j(\omega t-\beta z)},\\
H_y&=-\frac{j\omega\varepsilon m\pi}{k_c^2 a}E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{j(\omega t-\beta z)},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.29}$$

式中

$$k_c^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{3.1.30}$$

$$\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_c^2=\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{3.1.31}$$

本征值 k_x 和 k_y 的表达式(3.1.28)中,m 和 n 可以取任意正整数,因此有无穷多组解满足方程(3.1.25)和边界条件(3.1.26). 任一对正整数 m 和 n 确定的解是一种独特的场分布,称为波导中存在的一种模式,记作 TM_{mn} 模. 每一种模式一般具有不同于其他模式的传播特性.

(2) TE 型波

纵向磁场 H_z 满足的方程式和边界条件为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_z+k_c^2H_z=0, \tag{3.1.32}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=0,a}=0,\quad \frac{\partial H_z}{\partial y}\Big|_{y=0,b}=0. \tag{3.1.33}$$

其解

$$H_z(x,y)=H_0\cos k_x x\cdot\cos k_y y\quad (m,n=0,1,2,\cdots), \tag{3.1.34}$$

本征值 k_x,k_y 仍由(3.1.28)式给出. TE 波的各个场分量表达式为

$$\left.\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{b}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_x &= \frac{\mathrm{j}\beta m\pi}{k_c^2 a}H_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{b}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_y &= \frac{\mathrm{j}\beta n\pi}{k_c^2 b}H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_x &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu n\pi}{k_c^2 b}H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_y &= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu m\pi}{k_c^2 a}H_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{b}y \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.35}$$

k_c 和 β 仍分别由(3.1.30)和(3.1.31)式给出.

与 TM 型波不同,现在 m,n 可以取 0,但不能同时为 0. 所以,除了 TE_{00} 模式不存在外,TE_{0n},TE_{m0} 和 TE_{mn} 模式可以存在. TE_{0n} 和 TE_{m0} 模只有部分横向场分量不为零,是场结构比较简单的 TE 模.

(3) 波传播特性

TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模的相位常数相同,为

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}, \tag{3.1.36}$$

可见,不同标号(m,n)模式的相位常数一般不同,它们的传播特性(如截止频率、相速、群速等)一般也不同.

TM_{mn} 和 TE_{mn} 模的截止频率

$$(\omega_c)_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \tag{3.1.37}$$

仅当 $\omega > (\omega_c)_{mn}$ 时,该标号为 mn 的模式才可以传播,因此在一定频率范围内只存在有限个传播模. 截止频率最低的是 TE_{10} 模,这个模式称为基模,其他模式都称为高次模.

将(3.1.30)式代入(3.1.24)式,求出 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模的相速和群速

$$\left.\begin{aligned}
(v_p)_{mn} &= \frac{c}{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}\left[1-\{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2\}/\omega^2\mu\varepsilon\right]^{1/2}},\\
(v_g)_{mn} &= c\left[\frac{1-\{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2\}/\omega^2\mu\varepsilon}{\kappa_e\kappa_m}\right]^{1/2},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.38}$$

这里,c 为真空中的光速. 可见,不同标号模式的相速、群速均不同. 但归一化的 $\omega(k)$ 与 β 的关系(图 3.3)和归一化的相速、群速与 ω 的关系(图 3.4)对各个模式全相同.

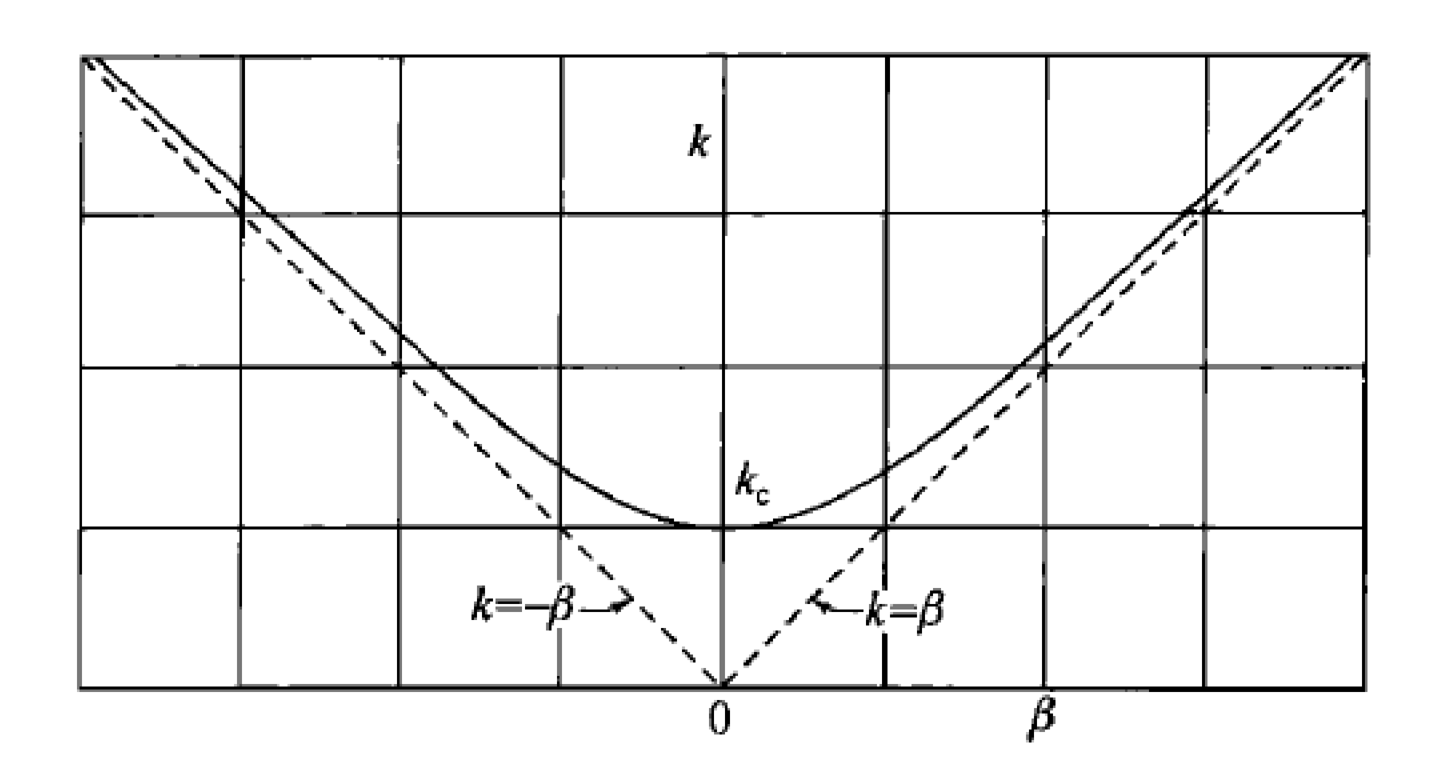


图 3.3 矩形波导传播模的归一化 k-β 关系

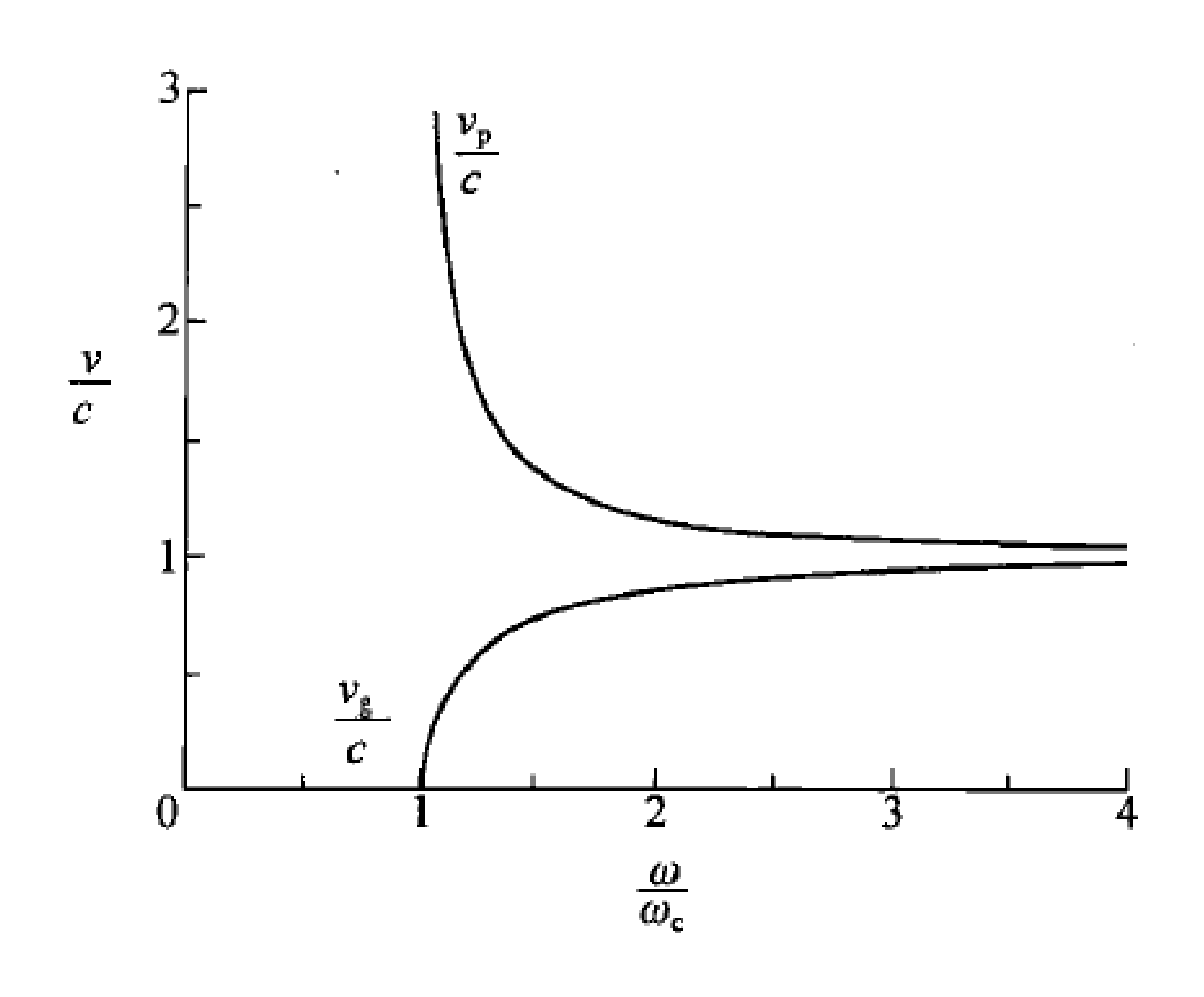


图 3.4 矩形波导传播模的归一化相速度和群速度与 ω 的关系

5. 圆波导

另一种常用的波导为金属圆管，称为圆波导，如图 3.5 所示，这里取圆柱轴为 z 轴，金属管内半径为 a.

(1) TM 型波

现在须使用圆柱坐标系(ρ,ϕ,z)，$E_z(\rho,\phi)$满足的方程和边界条件为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)E_z+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}E_z+k_c^2E_z=0, \tag{3.1.39}$$

$$E_z\big|_{\rho=a}=0,\quad E_z\big|_{\rho=0}\text{ 有限}. \tag{3.1.40}$$

图 3.5 圆截面金属管波导

由圆柱坐标系中的分离变数法解有

$$E_z(\rho,\phi) = [\mathrm{J}_m(k_c\rho) + E\mathrm{Y}_m(k_c\rho)][A\sin m\phi + B\cos m\phi],$$

这里,m 为非负整数,J_m 和 Y_m 分别是第一类和第二类 m 阶 Bessel 函数. 因为在 $\rho=0$ 处 E_z 须有限,要求系数 $E=0$. 在波导内壁 $\rho=a$ 面上 E_z 须为零,要求

$$\mathrm{J}_m(k_c a) = 0, \tag{3.1.41}$$

即要求

$$k_c = \nu_{mn}/a, \tag{3.1.41a}$$

ν_{mn} 为 J_m 的第 n 个零点($n=1,2,\cdots$). 角函数有两项,$\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$,这两个常数 A 和 B 可分别取为零. 由于 ϕ 角零点的选取有任意性,一般在此两项中可只取一项,或对称模($A=0,B\neq0$),或反对称模($A\neq0,B=0$). 这样,满足边界条件的纵向电场解最终写作:

$$E_z = E_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{3.1.42}$$

由(3.1.16)式求出横向电磁场

$$\left.\begin{aligned}
E_\rho &= -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c}E_0\mathrm{J}_m'(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\phi &= \frac{\mathrm{j}\beta m}{k_c^2\rho}E_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ -\cos m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_\rho &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon m}{k_c^2\rho}E_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ -\cos m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_\phi &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c}E_0\mathrm{J}_m'(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.43}$$

式中 J_m' 表示对 J_m 的宗量求微商.

在 TM_{mn} 模场分量的表示式(3.1.42)和(3.1.43)式中,模式标号 n 隐含于由(3.1.41a)式确定的 k_c 中. 模式标号 m 表示在横平面上 $0\leqslant\phi\leqslant2\pi$ 的圆周内场图形变化的周期数;模式标号 n 表示在 $0\leqslant\rho\leqslant a$ 范围内场图形在横平面内变化的半周期数.

最重要的 TM 模是 TM_{01} 模,因为 $\nu_{01}=2.405$,$(k_c)_{\mathrm{TM}_{01}}=2.405/a$. 这是个圆对称模,场分布不随 ϕ 变化,只有三个非零场分量:

$$\left.\begin{aligned}
E_z &= E_0\mathrm{J}_0(2.405\rho/a)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\rho &= -\frac{\mathrm{j}\beta a}{2.405}E_0\mathrm{J}_0(2.405\rho/a)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_\phi &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon a}{2.405}E_0\mathrm{J}_0'(2.405\rho/a)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.44}$$

(2) TE 型波

TE 型波的纵向磁场应满足的方程和边界条件为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)H_z+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}H_z+k_c^2H_z=0, \tag{3.1.45}$$

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=0,\quad H_z\,|_{\rho=0}\ \text{有限}. \tag{3.1.46}$$

可以类似地求得 TE_{mn} 模的各个场分量:

$$\left.\begin{aligned}
H_z &= H_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\rho &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu m}{k_c^2\rho}H_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ \cos m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\phi &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c}H_0\mathrm{J}_m'(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_\rho &= -\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c}H_0\mathrm{J}_m'(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
H_\phi &= \frac{\mathrm{j}\beta m}{k_c^2\rho}H_0\mathrm{J}_m(k_c\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ -\cos m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.47}$$

式中

$$k_c=\nu_{mn}'/a\quad(n=1,2,\cdots), \tag{3.1.48}$$

ν_{mn}' 为 J_m' 的第 n 个零点:

$$\mathrm{J}_m'(\nu_{mn}')=0. \tag{3.1.48a}$$

最重要的 TE 模是 TE_{11} 模,因为 $\nu_{11}'=1.841$,$k_c=1.841/a$ 为圆波导模的最小截止波数,所以 TE_{11} 模是圆波导的基模. TE_{11} 模的场分量为

$$\left.\begin{aligned}
H_z &= H_0\mathrm{J}_1(1.841\,\rho/a)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\rho &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu a^2}{(1.841)^2\rho}H_0\mathrm{J}_1(1.841\,\rho/a)\begin{Bmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\phi &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu a}{1.841}H_0\mathrm{J}_1'(1.841\,\rho/a)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\rho &= -\frac{\mathrm{j}\beta a}{1.841}H_0\mathrm{J}_1'(1.841\,\rho/a)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\
E_\phi &= \frac{\mathrm{j}\beta a^2}{(1.841)^2\rho}H_0\mathrm{J}_1(1.841\,\rho/a)\begin{Bmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.49}$$

除 TM_{01} 模外,TE_{01} 模也是圆对称模,只有三个非零场分量.

(3) 波传播特性

截止频率 ω_c 在自由空间中相应的波长 λ_c 称为截止波长:

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2\pi c\sqrt{\mu\varepsilon}}{k_c} = \frac{2\pi\sqrt{\kappa_e\kappa_m}}{k_c}, \tag{3.1.50}$$

自由空间波长 λ_0 大于 λ_c 的波不能在波导管中传播. 将(3.1.41a)和(3.1.48)式分别确定的 k_c 代入上式,得 TM_{mn} 和 TE_{mn} 模的截止波长分别为

$$(\lambda_c)_{TM_{mn}} = 2\pi a\frac{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}}{\nu_{mn}},\quad (\lambda_c)_{TE_{mn}} = 2\pi a\frac{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}}{\nu'_{mn}}. \tag{3.1.51}$$

表 3.1 按截止波长的顺序列出了低次模的截止波长.

表 3.1　均匀介质填充的圆波导低次模的截止波长

模式	ν_{mn}(TM 模)或 ν'_{mn}(TE 模)	$(\lambda_c)_{TE_{11}}$ 与该模式 λ_c 之比
TE_{11}	1.841	1
TM_{01}	2.405	1.306
TE_{21}	3.054	1.659
TE_{01}, TM_{11}	3.832	2.081
TE_{31}	4.201	2.282
TM_{21}	5.136	2.789
TE_{12}	5.331	2.896

由表 3.1 可见,具有最长截止波长的模是 TE_{11} 模,它是圆波导的基模,但是它并不是个便于使用的模式. 由式(3.1.49)可以看出,TE_{11} 模场分布随方位角 ϕ 具有余弦和正弦两种变化,由于场分布图形不同,它们应看作是两个不同的模式. 但现在这两个模式的存在条件和传播特性完全相同. 在物理学中将两种存在条件相同的不同物理状态的并存称为简并. 所以,TE_{11} 模是场分布沿方位角 ϕ 彼此转过 $\pi/2$ 的两个简并模式合成的模,其中的一个模式的电场在横平面内近似为线极化,另一模的极化方向转过了 $\pi/2$ 角. 若这两个简并模式的初相位差为零或 π,它们合成的模式仍近似为线极化. 当波导沿其纵向具有理想的均匀性时,这两个简并模在传播过程中可保持同样的相位差,合成模的极化方向得以保持不变. 实际上,由工业加工制作的波导不可避免地具有一定的纵向不均匀性或椭圆度,这两个简并模在传播过程中不能保持相位差不变,合成模的极化方向会在传播过程中旋转或摆动,所以,圆波导的基模(TE_{11})的传播不够稳定.

截止波长次长的 TM_{01} 模,由于场分布具有轴对称性,这个模式是天线的旋转接头的工作模式;因为有纵向电场分量,直线加速器也使用这个模式. 在表3.1中我们看到 TE_{01} 模和 TM_{11} 模截止波长相同,这两个模式也是简并模.

圆波导的各个模式的相速和群速仍由(3.1.24)表示,只需将各个模式的相应值代入 k_c. 图 3.3 所示归一化的 ω-β 关系,以及图 3.4 示出的归一化 v_p-ω 和 v_g-ω 关系依然适用于圆波导的各个模式.

6. 模式的正交性[1,2]

模式的正交性是指波导中的每个传播模独立地携带能量，与其他传播模式无关，其条件是波导无耗，这要求导体壁为理想导体而且填充介质无耗.

设 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$ 为任意截面均匀金属波导中两个非简并模的电磁场：

$$\boldsymbol{E}_1=(\boldsymbol{E}_{1t}+\boldsymbol{E}_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_1 z)},\quad \boldsymbol{H}_1=(\boldsymbol{H}_{1t}+\boldsymbol{H}_{1z})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_1 z)},\tag{3.1.52a}$$

$$\boldsymbol{E}_2=(\boldsymbol{E}_{2t}+\boldsymbol{E}_{2z})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_2 z)},\quad \boldsymbol{H}_2=(\boldsymbol{H}_{2t}+\boldsymbol{H}_{2z})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta_2 z)},\tag{3.1.52b}$$

这里，若为 TE 模，$E_z=0$；若为 TM 模，$H_z=0$. 如果可以证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\times(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2)^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\mathrm{Re}\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1^*+\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{1t}+\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{2t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\end{aligned}\tag{3.1.53}$$

则这两个模式将独立地携带能量传播，称为彼此正交. 上式中 S_0 是在任一坐标 z_0 处的波导横截面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面的单位法线为 $\boldsymbol{a}_z$，所以在第二个等式的积分中只有场的横向分量；由于已假定波导无耗，所以可以认为 $\boldsymbol{E}_{it},\boldsymbol{H}_{it}(i=1,2)$ 为实数.

欲证明这两个模式的正交性，就须证明这两个模式场的交叉项携带的功率为零，即要证

$$\begin{aligned}&\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2^*+\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1^*)\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z_0+\mathrm{j}\beta_2 z_0}\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z_0-\mathrm{j}\beta_2 z_0}\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S\\&=0.\end{aligned}\tag{3.1.54}$$

以 Maxwell 方程组的旋度式 $\nabla\times\boldsymbol{E}_i=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_i$，$\nabla\times\boldsymbol{H}_i=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_i(i=1,2)$ 代入下式的左侧，可得

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\\&=\mathrm{j}\omega\mu(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2)=\mathrm{j}\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2)=0.\end{aligned}$$

做一闭合的柱面 $S=S_1+S_2+S_t$，柱面的两个端面 S_1 和 S_2 为任选的坐标 z_1 和 z_2 处波导的横截面，柱的侧面 S_t 为它们之间的波导管内壁面. 对上式在 S 面上积分，得

$$\oiint_S(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.\tag{3.1.55}$$

由于 $(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{H}_2=(\mathrm{d}S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2)\cdot\boldsymbol{H}_1=0$，上式第一项在侧壁面 S_t 上的积分为零，这里 $\boldsymbol{n}$ 为波导管壁的内法线；由于同样的理由，第二项的

积分也为零. 因此,(3.1.55)式变为

$$\iint_{S_1}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S-\iint_{S_2}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=0. \tag{3.1.55a}$$

同样,在上式中只有横向电磁场分量能参与积分而写作

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z_1-\mathrm{j}\beta_2 z_1}\iint_{S_1}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S$$
$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z_2-\mathrm{j}\beta_2 z_2}\iint_{S_2}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=0. \tag{3.1.55b}$$

因为 z_1 和 z_2 是任取的,上式要成立只可能是在 S_1 和 S_2 这两个任取的波导横截面上的积分分别为零. 所以,对于波导的任意横截面 S_0 须有

$$\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=0. \tag{3.1.56}$$

如果模式 2 向反方向传播,它的横向磁场须反符号,为 $-\boldsymbol{H}_{2t}$,但 $\boldsymbol{E}_{2t}$不变. 此时(3.1.56)式变为

$$\iint_{S_0}(-\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=0. \tag{3.1.56a}$$

(3.1.56)式与(3.1.56a)式相加或相减便得到

$$\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{1t}\times\boldsymbol{H}_{2t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=\iint_{S_0}(\boldsymbol{E}_{2t}\times\boldsymbol{H}_{1t})\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=0, \tag{3.1.57}$$

也就是说,两个模式场的交叉项携带的功率为零,模式的正交性(3.1.54)式得到证明.

7. 脉冲在波导中的传播[3]

以无介质填充的矩形波导(图 3.2)为例,它的基模 TE_{10}模仅有三个非零场分量:

$$\left.\begin{aligned}E_y&=E_0\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\H_x&=-\frac{E_0}{\omega\mu_0}\beta\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\\H_z&=\mathrm{j}\frac{E_0}{\omega\mu_0}k_c\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\end{aligned}\right\} \tag{3.1.58}$$

式中

$$\beta=k[1-(k_c/k)^2]^{\frac{1}{2}},\quad k_c=\pi/a. \tag{3.1.59}$$

虽然在 $(\omega_c)_{\mathrm{TE}_{10}}<\omega<(\omega_c)_{\mathrm{TE}_{01}}$ 频率范围内只有 TE_{10}模可以传输(设 $a=2b$),但由

于存在色散,电磁脉冲各个频率分量传播速度不同,脉冲会在传播过程中拓宽并且变形.

当携带载频为 ω_0 的调制信号时,TE_{10}模的电场 $E_y(z,t)$可写成

$$E_y(z,t) = \phi(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t-\beta_0 z)}, \tag{3.1.60}$$

脉冲的包络 $\phi(z,t)$为缓变函数,电场在横平面内的分布函数 $\sin\frac{\pi x}{a}$与 z 和 t 无关,已作为不变量包含于 $\phi(z,t)$中.

将脉冲(3.1.60)展开为 Fourier 积分

$$E_y(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\mathrm{d}\omega. \tag{3.1.61}$$

以 $\beta(\omega)$的 Taylor 展开式

$$\beta(\omega) = \beta_0(\omega_0)+\dot{\beta}_0(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\ddot{\beta}_0(\omega-\omega_0)^2 \tag{3.1.62}$$

代入(3.1.61)式,得

$$\phi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\nu)\exp\{\mathrm{j}[(t-\dot{\beta}_0 z)\nu-\frac{1}{2}\ddot{\beta}_0 z\nu^2]\}\mathrm{d}\nu, \tag{3.1.63}$$

这里 $\nu=\omega-\omega_0$,圆点表示对 ω 求微商,β 的下脚标 0 表示取 $\omega=\omega_0$.

若(3.1.63)式中的 $\ddot{\beta}_0$ 项可以略去,不难看出脉冲的包络将无畸变地以群速度 $v_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta|_{\omega=\omega_0}$ 传输. 由于电磁能是由脉冲的包络(载频振动的幅度)携带的,所以群速度 v_g 表示能量传播速度. 量

$$t_0 = z\dot{\beta}_0 = z\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = z\frac{1}{v_g} \tag{3.1.64}$$

是脉冲传输距离 z 所需时间,称为群时延. 每单位传输距离的群时延用 τ_0 表示:

$$\tau_0 = \dot{\beta}_0 = \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g}. \tag{3.1.64a}$$

当 $\ddot{\beta}_0$ 不可忽略时脉冲将在传播过程中畸变. 现以 Gauss 脉冲为例作具体计算. 在 $z=0$ 处的初始脉冲设为

$$E_y(0,t) = A_0\exp\left(-\frac{t^2}{T_0^2}\right)\cos\omega_0 t, \tag{3.1.65}$$

T_0 为脉冲初始宽度. 在 $z=0$ 处的脉冲包络

$$\phi(0,t) = A_0\exp\left(-\frac{t^2}{T_0^2}\right). \tag{3.1.66}$$

上式的 Fourier 变换为

$$\Phi(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi}}T_0\exp\left(-\frac{1}{4}T_0^2\omega^2\right), \tag{3.1.67}$$

将它代入(3.1.63)式，求得脉冲传播到 z 距离处的包络

$$\phi(z,t) = \frac{A_0}{(1+\mathrm{j}S/T_0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{(t-t_0)^2(1-\mathrm{j}S/T_0)}{T_0^2+S^2}\right], \quad (3.1.68)$$

式中

$$S = z\frac{2}{T_0}\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\bigg|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.1.69)$$

可见，传播了 z 距离后，脉冲的宽度由 T_0 拓宽为

$$T = (T_0^2+S^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.70)$$

但仍保持脉冲形状不变，这是 Gauss 脉冲的特点. 由于 Gauss 脉冲(3.1.65)在 $z=0$处的频带宽 $\Delta\omega=\dfrac{2}{T_0}$，表示脉冲拓宽的参数 S 可改写为

$$S = \frac{2}{T_0}z\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \Delta\omega\frac{\partial t_0}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.1.71)$$

$\partial t_0/\partial\omega$ 为每单位频率的群时延，S 的涵义便是脉冲的所有频率分量的总群时延.

在§3.5 中我们还要讨论光脉冲在光纤中的传播问题，其中用到的几个参量也在此一并写出. 对于真空中的光波，$\lambda_0=2\pi/k_0$，$\omega\lambda_0=2\pi c$，而有 $\Delta\omega/\omega=-\Delta\lambda_0/\lambda_0$. 因此，参量 S 可写作

$$|S| = \left|\Delta\omega\frac{\partial t_0}{\partial\omega}\right| = \left|\Delta\lambda_0\cdot\frac{\partial t_0}{\partial\lambda_0}\right|. \quad (3.1.72)$$

每单位传播距离的脉冲加宽

$$|\hat{S}| = \left|\Delta\lambda_0\frac{\partial\tau_0}{\partial\lambda_0}\right| = |\Delta\lambda_0\cdot D|, \quad (3.1.73)$$

式中

$$D = \frac{\partial\tau_0}{\partial\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial\lambda_0}\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\ddot{\beta}_0 \quad (3.1.74)$$

在光学中称为色散参量.

回到脉冲在矩形波导中的传播问题，因为

$$T_0 = \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0}{\beta c^2},\quad \beta = \left[k^2-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

每单位传播距离的脉冲加宽可具体求出：

$$|\hat{S}| = \left|\Delta\lambda_0\frac{\partial\tau_0}{\partial\lambda_0}\right| = \left|\Delta\omega\frac{\partial\tau_0}{\partial\omega_0}\right| = \left|\Delta\omega\frac{(\pi/a)^2}{c^2\beta^3}\right|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.1.75)$$

§3.2 电磁谐振腔

1. 电磁谐振腔

无线电技术中使用的谐振电路是由集总参量LC元件组成的谐振回路.在低频情况下集总参量元件和它们之间的连接导线的线度远小于波长,电容器、电感和导线周围的电磁场是准静态的,元件内各处的电场或磁场之间没有相位差,也不必考虑连接导线上的波传播效应.但到了超短波频带(HF波段),在集总元件LC回路的尺度内波传播效应已经开始显现.到了1000～3000 MHz的频率范围(L和S波段),电感已经变得非常小,甚至是单匝导线,此时需要用短路传输线(例如,平行双导线)构成谐振器,谐振电路由集总元件回路演变成分布参量短截线.在频率更高的厘米波和毫米波波段,由于需要与波导管连接并降低损耗,须采用全封闭的金属空腔谐振器.

简单的空腔谐振器由两端被金属平面封闭的一段均匀波导构成,沿波导轴向传播的行波受到与波导轴垂直的端面反射而反向行进,正反方向的行波叠加形成驻波.理想导体表面的切向电场须为零,两个端面就必须是驻波电场的波节点;在其他腔壁上也须满足同样的条件,因此在封闭的金属腔内只能形成一定离散频率的电磁振荡.形成振荡的频率称为谐振腔的固有频率,从数学的观点,这个频率称为本征频率.

并非所有的电磁谐振腔都可看作是两端封闭的均匀波导段,例如球形谐振腔,以及微波电真空器件中使用的环形谐振腔等.因此,形状复杂的空腔谐振器中固有电磁振荡的形成不能作如上的简单解释.但在任意形状的理想导体空腔中,由于须满足理想导体腔壁上的边界条件,只能存在一系列分立本征频率的固有电磁振荡,这是束缚状态波的一般特征,在波动力学中可以看到类似的现象.

空腔谐振器在微波技术中有重要应用,例如用作波长计或用于电介质介电常数的测量,作为高频电路的组成部分用于微波电真空器件等.光频和准光频的谐振器在概念上与微波频率的空腔谐振器是相同的,但在结构上有相当差别,为使谐振频谱变稀疏,此时采用开放式结构.为与光频谐振器相区别,我们专指微波频率的空腔谐振器为电磁谐振腔.

2. 直角柱形谐振腔

这是结构最简单的电磁谐振腔,用垂直于轴的金属平板将一段矩形波导的两端封闭便构成直角柱形谐振腔(图3.6),我们以它为例说明腔内电磁场的求解.

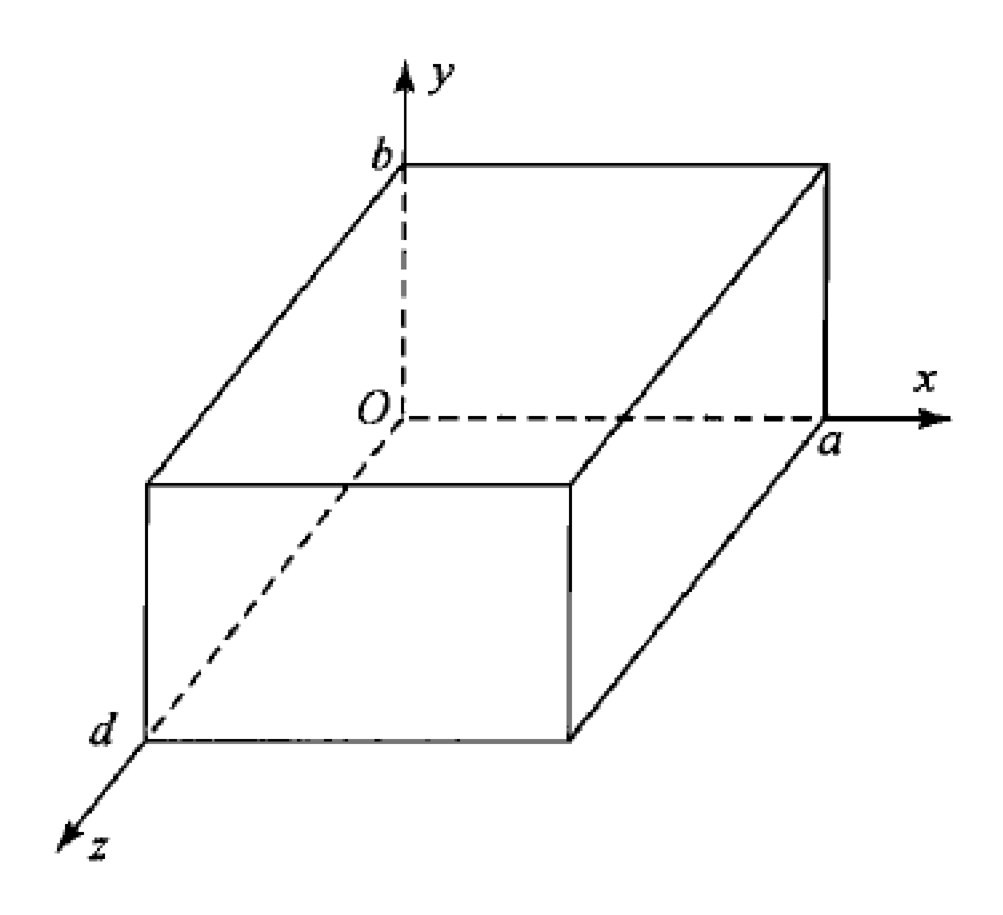


图 3.6　直角柱形谐振腔

(1) TM 模

设腔内未填充介质，TM 模的纵向电场现在须写作

$$E_z = E_z(x,y,z)e^{j\omega t}, \tag{3.2.1}$$

它满足直角坐标系中的 Helmholtz 方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z(x,y,z)+k^2E_z(x,y,z)=0, \tag{3.2.2}$$

其中 $k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$. 方程(3.2.2)的通解为

$$E_z = (Ae^{jk_xx}+A'e^{-jk_xx})(Be^{jk_yy}+B'e^{-jk_yy})(Ce^{jk_zz}+C'e^{-jk_zz})e^{j\omega t}, \tag{3.2.3}$$

式中的待定常数 k_x, k_y, k_z 须满足

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0. \tag{3.2.4}$$

纵向场 E_z 满足的方程(3.2.2)与导波的一般方程式(3.1.8b)是一致的，因为现在场与 z 的关系不再是 $e^{-\gamma z}$，在导出(3.1.8b)式的过程中将($-\gamma$)还原成 $\partial/\partial z$，所得方程式便是(3.2.2). 所以，现在有

$$k_c^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0-k_z^2=k^2-k_z^2=k_x^2+k_y^2. \tag{3.2.5}$$

同样，在用纵向场分量表示横向场分量的(3.1.7a,b)式中将($-\gamma$)还原成 $\partial/\partial z$，便得 TM 模的横向电磁场：

$$\left.\begin{aligned}
E_x(x,y,z)&=\frac{1}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}E_z(x,y,z),\\
E_y(x,y,z)&=\frac{1}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}E_z(x,y,z),\\
H_x(x,y,z)&=\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial}{\partial y}E_z(x,y,z),\\
H_y(x,y,z)&=-\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial}{\partial x}E_z(x,y,z).
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.6}$$

由边界条件确定解(3.2.3)中的待定常数 k_x, k_y, k_z 后便得到全部场解.

E_z 须满足的边界条件为

$$E_z\big|_{x=0,a} = 0,\quad E_z\big|_{y=0,b} = 0. \tag{3.2.7}$$

但在两个端面上 E_z 为法线分量,在这两个端面上应满足的边界条件仍为电场切线分量为零:

$$E_x\big|_{z=0,d} = 0,\quad E_y\big|_{z=0,d} = 0. \tag{3.2.8}$$

边界条件(3.2.7)要求

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x} + A'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} = 2\mathrm{j}A\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right),\ k_x = \frac{m\pi}{a},$$

$$B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_y y} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y} = 2\mathrm{j}B\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\ k_y = \frac{n\pi}{b}\quad (m,n = 1,2,\cdots).$$

由上式我们知道

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{z=0,d} \neq 0,\quad \left.\frac{\partial E_z}{\partial y}\right|_{z=0,d} \neq 0.$$

将(3.2.6)的前二式代入(3.2.8),便只能有

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{z=0,d} = 0, \tag{3.2.9}$$

这是 E_z 在两个端面上应满足的边界条件,由此有

$$C\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z} + C'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} = 2C\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right),\quad k_z = \frac{p\pi}{d}\quad (p = 0,1,2,\cdots). \tag{3.2.10}$$

满足腔壁面上全部边界条件的 TM 模的纵向场解为

$$E_z(x,y,z,t) = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{3.2.10}$$

这里已将振幅常数合并为 E_0. 每一组非负整数 m,n,p 对应着腔中可以存在的固有电磁振荡的一种电磁场分布,称为谐振腔的固有振荡模式,对于现在的横磁模用 TM_{mnp} 表示,m,n,p 分别表示场分布沿 x,y 和 z 三个边的极大值数目.

因为 $m=0$ 或 $n=0$ 时 $E_z=0$,所以只存在 $m\neq 0, n\neq 0$ 的 TM_{mnp} 模. 最简单的 TM 模是 TM_{110} 模,它只有三个非零场分量:

$$\left.\begin{aligned}
E_z &= E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\\
H_x &= \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_0}{\pi b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\\
H_y &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_0}{\pi a\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.11}$$

(2) TE 模

满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_z(x,y,z)+k^2H_z(x,y,z)=0 \qquad (3.2.12)$$

的纵向磁场 $H_z(x,y,z)$的通解仍为

$$H_z=(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}+A'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x})(B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_y y}+B'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y})(C\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}+C'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \qquad (3.2.13)$$

由 H_z 求得 TE 模的横向场分量：

$$\left.\begin{aligned}E_x&=-\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},\\E_y&=\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},\\H_x&=\frac{1}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}H_z,\\H_y&=\frac{1}{k_x^2+k_y^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}H_z,\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.14)$$

其中的常数 k_x,k_y,k_z 由边界条件确定.

在四个侧壁上的边界条件仍为

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=0,a}=0,\quad \left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{y=0,b}=0, \qquad (3.2.15)$$

它们分别要求

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}+A'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}=2A\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right),\quad k_x=\frac{m\pi}{a},$$

$$B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_y y}+B'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y}=2B\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\quad k_y=\frac{n\pi}{b}\quad (m,n=0,1,2,\cdots).$$

在两个端面上的边界条件仍为

$$E_x\,|_{z=0,d}=0,\quad E_y\,|_{z=0,d}=0. \qquad (3.2.16)$$

由(3.2.14)，E_x，E_y 与 z 的关系都是正比于$(C\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}+C'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z})$. 边界条件(3.2.16)要求

$$(C\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}+C'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z})=2\mathrm{j}C\sin k_z z,\quad k_z=\frac{p\pi}{d}\quad (p=1,2,\cdots).$$

满足全部腔壁边界条件的 TE_{mnp} 模的纵向磁场为

$$H_z(x,y,z,t)=H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \qquad (3.2.17)$$

当 $b<a<d$ 时最低次的 TE 模是 TE_{101} 模，它只有三个非零场分量：

$$\left.\begin{aligned} E_y &= -\frac{j\omega\mu_0 a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)e^{j\omega t}, \\ H_x &= -H_0\frac{a}{d}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)e^{j\omega t}, \\ H_z &= H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)e^{j\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.18}$$

(3) 特征方程和固有波长

与波导不同,现在特征方程

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{3.2.19}$$

确定的是腔的固有频率 ω_0,由于通过本征值 k_x,k_y,k_z 确定,固有频率也称为本征频率. 将 k_x,k_y,k_z 值代入方程(3.2.19),得直角柱谐振腔的固有频率

$$\omega_0 = c\pi\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2.20}$$

显然,ω_0 有无穷多个分立值. 与 ω_0 对应的自由空间波长 λ_0 称为谐振腔的固有波长. 由(3.2.20)式有

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2.21}$$

(3.2.20)和(3.2.21)式中的 c 为真空中的光速.

谐振腔也存在模式简并现象. 当 $m,n,p\geqslant 1$ 时,TE_{mnp} 模与 TM_{mnp} 模是简并模. 还有另一类与腔的边长有关的模式简并. 如果腔的任意两条边相等,例如 $a=b$,则 m 和 n 对换的模式,如 TM_{mnp} 和 TM_{nmp} 是简并模. 在腔的实际使用中通常不希望发生模式简并,一般设计腔的三边长度不同以避免后一类简并,对于前一类简并只能根据场分布的不同从激励条件来选择或抑制.

与波导模类似,也是用固有波长的长短来排列谐振腔固有振荡模式的高低. 当 $b<a<d$ 时,矩形腔的最低次模式是 TE_{101} 模,其固有波长为

$$(\lambda_0)_{TE_{101}} = 2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2.22}$$

最低次的 TM 模式是 TM_{110} 模,其固有波长

$$(\lambda_0)_{TM_{110}} = 2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = (\lambda_c)_{TM_{11}}, \tag{3.2.23}$$

$(\lambda_c)_{TM_{11}}$ 是截面为 $a\times b$ 的矩形波导 TM_{11} 模的截止波长. 实际上,矩形腔的任意 TM_{mn0} 模的固有波长都等于构成腔的矩形波导的 TM_{mn} 模的截止波长:

$$(\lambda_0)_{TM_{mn0}} = 2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = (\lambda_c)_{TM_{mn}}. \tag{3.2.23a}$$

由(3.2.10)和(3.2.6)式不难看出,TM_{mn0} 模的所有场分量都不随 z 变化,而且 $E_x=E_y=0$. 仅有的 z 分量电场与两个端面垂直,满足端面上的边界条件. 从波

导理论我们知道，在波导模处于截止的临界状态下波导波长 $\lambda_g \to \infty$，这时场沿波导的轴向没有变化. 截止状态相当于波垂直投射到波导的侧壁而形成纯驻波，此时没有沿波导轴向的能量传播，矩形谐振腔中的 TM_{mn0} 模正是处于这种状态. 不仅在矩形腔中，在任何可归结为一段均匀波导的谐振腔中，与 TM_{mn0} 模相似的模式也具有此特征.

3. 谐振腔中的储能

谐振腔是储存电磁能量的器件，利用复数 Poynting 定理容易证明，任意形状的理想导体壁空腔谐振器中储存的周期平均电能和磁能是相等的. 设腔的体积为 V，腔壁的内侧面为 S，由(1.1.14)式，通过 S 面进入腔体积 V 的复数 Poynting 矢量的虚部

$$\mathrm{Im}\oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\omega(\overline{W}_\mathrm{m} - \overline{W}_\mathrm{e}), \qquad (3.2.24)$$

现在面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向指向腔体内部. 因为在理想导体面上电场的切线分量为零，在 S 面上 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，上式左侧的面积分为零，于是腔中储存的周期平均电能和磁能相等.

以矩形谐振腔为例，我们来看谐振腔中电磁能储存的具体情况，并与能量在波导中的流动过程比较. 由横向电磁场的表示式(3.2.6)和(3.2.14)我们看到，决定能量沿轴向流动的横向电场和磁场之间有 $\pi/2$ 时间相位差，在电场达到最大时磁场为零，反之亦然. 由于 $\pi/2$ 时间相位差，复数 Poynting 矢量轴向分量的实部为零，没有平均能量沿轴向传播. 在谐振腔中发生的是电能和磁能的相互转换的振荡过程，在四分之一时间周期内主要为电能，下一个四分之一时间周期内主要是磁能. 在波导的单一行波状态下的能量运动过程则不然，由(3.1.16)和(3.1.21)式，任意截面形状均匀波导中 TM 波和 TE 波的横向电场和磁场的时间相位总是相同的，轴向的瞬时能流脉动地流过波导横截面.

除了时间相位差之外，谐振腔中的电场和磁场的空间分布也呈现强弱交错. 例如，直角柱形腔的 TE_{101} 模电场 E_y 最强处在 xz 平面的中心，在此处磁场却最弱；磁场 H_x 和 H_z 在 xz 平面的分布以靠近四壁为最强，但在腔壁面上 $E_y=0$. 因此，腔中的电能和磁能除了随时间周期地相互转换外，也在腔内空间作局部交流：它们周期地由四周聚集到 xz 平面的中心(电能)，再向四周扩散，在腔壁附近以磁能形式呈现. 波导单一行波状态的能量运动又与此相反. 例如矩形波导的 TE_{10} 模，E_y 最强处也是 H_x 最强处，在同一瞬时电磁能量在波导管内呈空间周期性地强弱分布，整个场分布图形沿轴向流动，电磁能流随之脉动地流过波导横截面.

通过谐振腔模与波导传播模的比较，我们看到了驻波状态和行波状态下电

磁能量运动截然不同的特征.

4. 腔壁的损耗

在以上的论述中均假定谐振腔壁为理想导体,但实际的谐振腔的腔壁材料为电导率虽高但却有限的金属,电磁波可以透入腔壁并在其内产生焦耳热损耗.即使空腔内的填充介质为理想的无耗介质,由于腔壁的损耗,谐振腔就不可能是无耗的.损耗问题对于谐振腔很重要,它决定谐振腔的一个重要参量——品质因数.由于损耗与腔壁上的电流分布有关,损耗问题也会影响对谐振腔制造工艺的要求.

在腔壁为有限电导情况下,腔壁内表面的内外侧都有电磁场,欲严格地解出腔中的场和腔壁内侧的场相当困难.现行的有效求解方法是应用微扰技术求出近似解,但介绍微扰技术需要相当篇幅,有兴趣的读者可参考本章参考文献[1]的第 6 章.下面我们用较为简单且直观的方法来处理腔壁损耗的计算.

从基础电磁场理论或电动力学我们知道,垂直投射到良导体平面表面的平面电磁波,透入导体内的电场与磁场的复数振幅之比称为单位面积平面导体的表面阻抗 Z_s:

$$\frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon-\mathrm{j}\sigma/\omega}}\approx\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+\mathrm{j})=R_s+\mathrm{j}X_s=Z_s, \qquad (3.2.25)$$

我们在§2.2 讨论超导体的表面阻抗时已经遇到了这个量.当平面电磁波以任意入射角投射到良导体面上时,波总是沿着接近与导体垂直的方向透入导体的,而且其电场与磁场的复数振幅之比仍为(3.2.25)式的 Z_s,透射波的能流密度仍垂直于导体表面进入导体,透入深度仍为 $\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$①.这个结论可以推广,认为它近似适用于以任意入射角投射到良导体面的任意电磁波,只要该导体面的曲率半径与波长相比不是很小.将它应用于腔壁损耗的计算,透入每单位面积腔壁导体的平均功率等于

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_s\times\boldsymbol{H}_s^*)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(Z_s\boldsymbol{H}_s\cdot\boldsymbol{H}_s^*)=\frac{1}{2}R_s|\boldsymbol{H}_s|^2,$$

这里 $\boldsymbol{E}_s$ 和 $\boldsymbol{H}_s$ 表示腔壁导体内的表面切向电磁场,R_s 为腔壁导体每单位面积的平面导体表面电阻.

如果能够解出导体壁内的表面磁场 $\boldsymbol{H}_s$,将上式在腔壁面上积分便可求得腔壁损耗的平均功率,但这个问题的难度迫使在计算 $\boldsymbol{H}_s$ 时还须作近似.因为腔壁面两侧的切线磁场分量须连续,将在理想导体腔壁条件下解得的磁场在腔壁面

① 见,例如,J. A. Stratton, Electromagnetic theory, § 9.8, McGraw-Hill, 1941.

上的切线分量 $\boldsymbol{H}_a$ 取作非理想导体腔壁条件下腔壁磁场切线分量的一级近似，便得到腔壁损耗平均功率的一级近似为

$$P_L = \frac{1}{2}\left[\oiint_S R_s(\boldsymbol{H}_a \cdot \boldsymbol{H}_a^*)\mathrm{d}S\right], \tag{3.2.26}$$

腔壁材料的 R_s 越小，近似的精度越高.

这种计算谐振腔腔壁损耗的方法也可用于计算波导壁的损耗.

5. 谐振腔的品质因数

低频 LC 谐振回路的一个重要参量是它的品质因数 Q，定义为

$$Q = 2\pi\,\frac{\text{谐振回路中的总储能}}{\text{每一周期内损耗的能量}}.$$

低频并联 LC 谐振回路中的损耗可以用与 L，C 并联的等效电导 G 表示，品质因数 Q 随之写作

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G},$$

这里 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 是回路无耗时的谐振频率.

可以用同样的方式定义空腔谐振器的品质因数：

$$Q_0 = 2\pi\,\frac{\text{谐振腔中的储能}}{\text{每一周期内谐振腔中损耗的能量}} = \omega_0\,\frac{\text{谐振腔中的储能}}{\text{谐振腔中的平均损耗}} = \omega_0\,\frac{W}{P_L}, \tag{3.2.27}$$

Q_0 称为谐振腔的固有品质因数，由于谐振腔有无穷多个固有振荡模式，Q_0 是对于每一个固有振荡模式定义的.（3.2.27）式中的 W 是指某一固有振荡模式的储能，如果腔中的填充物没有损耗，P_L 为同一模式的腔壁损耗平均功率，ω_0 是腔壁视为理想导体时该模式的固有频率. 如果损耗不存在，谐振腔中储存的电能和磁能之和不变，（3.2.27）式中的 W 是理想导体谐振腔中周期平均的电能和磁能之和：

$$W = \overline{W}_e + \overline{W}_m = \iiint_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*)\mathrm{d}V. \tag{3.2.28}$$

【例】 求铜壁直角柱形谐振腔 TE_{101} 模的 Q_0 值，设腔尺寸为 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$d=4$ cm.

【解】 由（3.2.21）和（3.2.20）式求出所给尺寸的直角柱形腔 TE_{101} 模式的固有波长和固有频率分别为 $\lambda_0 = 4.8$ cm，$f_0 = 6.25$ GHz.

仅有的电场分量 E_y 由（3.2.18）的第一式给出，将它代入（3.2.28）式求出腔中的储能：

$$W = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0^2 a^2 H_0^2}{2\pi^2}\int_0^a\int_0^b\int_0^d \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0^2 a^3 b d H_0^2}{8\pi^2}.$$

因为 TE_{101} 模在相对的两个腔壁面上的场分布相同,只需计算三个不同坐标腔壁面上的损耗,再乘以 2 就得全部 6 个腔壁面上的损耗. 将(3.2.18)式的 H_x, H_z 代入(3.2.26)式,得

$$P_L = \frac{1}{2}\oiint_S R_s(\boldsymbol{H}_a \cdot \boldsymbol{H}_a^*)\mathrm{d}S$$
$$= R_s\left[\iint_{x=0} H_z H_z^* \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{y=0}(H_x H_x^* + H_z H_z^*)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{z=0} H_x H_x^* \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$= R_s H_0^2\left[\frac{bd}{2} + \frac{a^3}{4d} + \frac{ad}{4} + \frac{a^3 b}{2d^2}\right].$$

将 W 和 P_L 代入(3.2.27)式,得

$$Q_0 = \omega\frac{W}{P_L} = \frac{2\omega_0\mu_0 V}{R_s\lambda_0^2}\frac{1}{\frac{1}{a^2}(2bd + ad) + \frac{1}{d^2}(2ab + ad)}$$
$$= \frac{4\pi Z_0 V}{R_s\lambda_0^3}\frac{1}{\frac{1}{a^2}(2bd + ad) + \frac{1}{d^2}(2ab + ad)}, \tag{3.2.29}$$

式中 $V = abd$ 为腔体积,$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 120\pi\,\Omega$.

已知 $f = 6.25$ GHz 时铜的表面电阻 $R_s = 2.61\times10^{-7}\sqrt{f} = 0.206\,\Omega$,将它以及 a, b, d 值代入(3.2.29)式,得 $Q_0 = 1065$.

(3.2.29)式可以写成更方便的形式. 因为腔壁一般为非磁性导体,$\mu = \mu_0$,腔壁的表面电阻 $R_s = \sqrt{\omega_0\mu_0/2\sigma}$. (3.2.29)第二个等式中的 $\omega_0\mu_0/R_s$ 可以用腔壁导体在 ω_0 频率的透入深度(集肤厚度)δ 表示为

$$\frac{\omega_0\mu_0}{R_s} = \frac{\omega_0\mu_0}{\sqrt{\omega_0\mu_0/2\sigma}} = \frac{2}{\sqrt{2/\mu_0\omega_0\sigma}} = \frac{2}{\delta}. \tag{3.2.30}$$

(3.2.29)式即可改写为

$$Q_0 = \frac{4V}{\lambda_0^2\delta}\frac{1}{\left[\frac{1}{a^2}(2bd + ad) + \frac{1}{d^2}(2ab + ad)\right]}, \tag{3.2.29a}$$

此式分母方括号中的量是由腔的几何形状决定的无量纲因子. 例如,若为立方形腔,$a = b = d$,这个因子为 6,而且 $\lambda_0 = \sqrt{2}a$,Q_0 就简单地等于 $Q_0 = a/3\delta = \lambda_0/3\sqrt{2}\delta$,$\delta$ 对 Q_0 的影响便一目了然.

这个例子计算所得 Q_0 值具有典型性,一般用良导体制作的电磁谐振腔的 Q_0 值可达到 $10^3 \sim 10^4$ 量级,而 LC 谐振回路的 Q 值只能达到 30~300 量级. 由于导体壁的光洁度及腔壁各导体面之间连接处的不良导电性等实际因素,腔的测量 Q_0 值一般低于它的理论计算值.

由(3.2.29)式我们看到 Q_0 值反比于腔壁材料的表面电阻 R_s,为制作高 Q_0

值的微波谐振腔，使用高温超导体材料作腔壁成为自然的选择. 沉积于平坦衬底材料上的高质量高温超导体薄膜的 R_s 值比铜的 R_s 值要低 2～3 个数量级. 但是由于高温超导体材料在制作工艺上的限制，需要特殊的结构设计，以巧妙地发挥超导体材料的优越性. 由两块超导体薄膜圆盘和蓝宝石圆柱构成的 TE_{011} 模谐振器，在 80 K 致冷温度下的测量 Q_0 值高达 3.9×10^6，中心频率为 5.56 GHz①.

6. 空腔谐振器的频带宽度

理想导体壁空腔谐振器的固有频率谱是一条条分立的谱线，但这种无限窄的理想谱线实际上不可能实现. 由腔壁的有限电导率造成的能量损耗使腔的固有频率谱变成以固有频率谱线为中心的连续谱分布.

为求得这个连续谱分布，先要求出谐振腔中场振幅的衰减常数. 腔中电场的任一直角坐标分量可以写作

$$E(x,y,z,t) = E(x,y,z)e^{-\alpha t}e^{j\omega_0 t}, \tag{3.2.31}$$

其中 α 为衰减常数，ω_0 为某一固有频率. 由于耗损，腔中的总储能也随时间衰减. 根据能量守恒，腔中总储能的时间负变率应等于腔中耗损的功率：

$$-\frac{dW}{dt} = P_L.$$

将(3.2.27)式代入上式，得

$$\frac{dW}{dt} = -P_L = -\frac{\omega_0}{Q_0}W,$$

由此解出

$$W(t) = W_0 e^{-\omega_0 t/Q_0}, \tag{3.2.32}$$

W_0 是腔中储能的初始值. 由(3.2.31)和(3.2.28)式可求出场振幅的衰减常数

$$\alpha = \omega_0/2Q_0, \tag{3.2.33}$$

(3.2.31)式便可写成另一形式：

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0/2Q_0}e^{j\omega_0 t}, \tag{3.2.31a}$$

因为我们主要关心场随时间的变化，这里已用 $E_0=E(x,y,z)$ 表示场的空间分布.

(3.2.31a)式表示的 $E(t)$ 是频率为 ω_0 的衰减振动，它不是纯频率 ω_0 的简谐振动，而是由 ω_0 附近的无穷多个频率的振动叠加形成. 对 $E(t)$ 做 Fourier 变换：

① Z. Y. Shen, C. Wilker, P. Pang, W. L. Holstein, D. W. Face and D. J. Kountz, High T_c superconductor-sapphire resonator with extremely high Q-values up to 90 K, *IEEE Trans.*, vol. MTT-40, pp. 2424—2432, 1992.

$$E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{3.2.34}$$

谱分量振幅

$$E(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t. \tag{3.2.35}$$

假定振荡在 $t=0$ 时起始，$t<0$ 时 $E(t)=0$，积出积分(3.2.35)

$$E(\omega)=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega_0/2Q_0-\mathrm{j}(\omega_0-\omega)},$$

谐振腔中能量的谱分布

$$W(\omega)\sim|E(\omega)|^2=\frac{1}{2\pi}\frac{E_0^2}{\omega_0^2/4Q_0^2+(\omega_0-\omega)^2}. \tag{3.2.36}$$

谱振幅 $|E(\omega)|^2$ 是以 $\omega=\omega_0$ 为中心的峰形分布(图 3.7)，其最大幅度在 $\omega=\omega_0$ 处：

$$|E(\omega)|^2_{\max}=|E(\omega_0)|^2=\frac{E_0^2}{2\pi}\frac{4Q_0^2}{\omega_0^2}.$$

在频率 $\omega=\omega_0\pm\omega_0/2Q_0$ 的谐振幅

$$|E(\omega_0\pm\omega_0/2Q_0)|^2=\frac{1}{2}|E(\omega_0)|^2,$$

这两个频率为谱分布的半功率点. 通常将以 ω_0 为中心的两个半功率点之间的这段频率定义为谐振腔固有振荡的频带范围. 因此谐振腔固有振荡的频带宽度

$$\Delta f=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{\omega_0}{2\pi Q_0},\quad Q_0=\frac{\omega}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}. \tag{3.2.37}$$

谐振腔的固有品质因数越大，腔的固有振荡频带就越窄. 理想导体谐振腔 $Q_0\to\infty$，$\Delta f\to 0$，固有谐振频率成为一条单纯的谱线，此时频率 $\omega\neq\omega_0$ 的电磁振荡由于不能满足腔壁上的理想导体边界条件不可能在腔中建立. 有限电导率导体腔壁上的边界条件有别于理想导体边界条件，频率在 $\omega=\omega_0$ 附近的电磁振荡可以在腔中建立，但频率与 ω_0 偏离越远，建立振荡也越困难，就形成以 ω_0 为中心的峰形谱分布. 谐振腔中的电磁振荡在绝大多数情况下都是被外源激励的受迫振荡，当激励源的频宽覆盖了谐振腔的固有振荡频带时，被激励的强迫振荡谱分布便如图 3.7 所示.

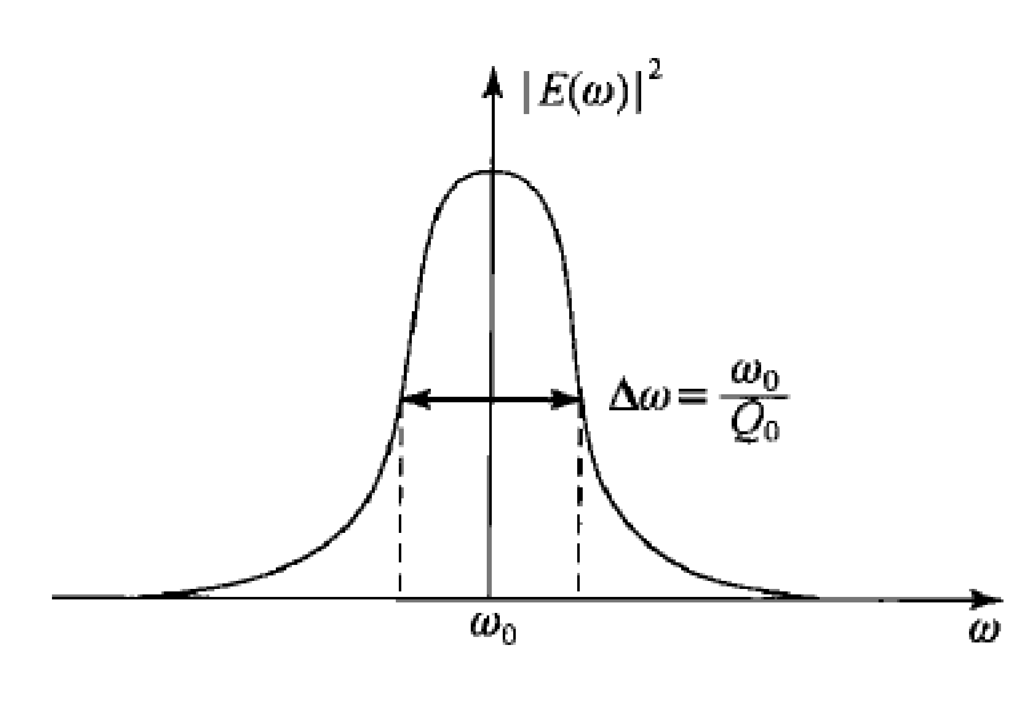


图 3.7 谐振腔中的受迫振荡谱分布

式(3.2.37)也可看作谐振腔固有品质因数 Q_0 的另一定义，由此提供了一种 Q_0 的测量方法：测量固有谐振频率和频带宽度，以确定 Q_0.

§3.3 表　面　波

1. 沿平面分界面传播的表面波[1,4]

我们还要讨论的一种导行电磁波称为电磁表面波，这种波沿着介质的分界面传播，由于场分布集中于介质分界面附近而得名. 介质分界面对于波的导引作用可在下面的分析中看出.

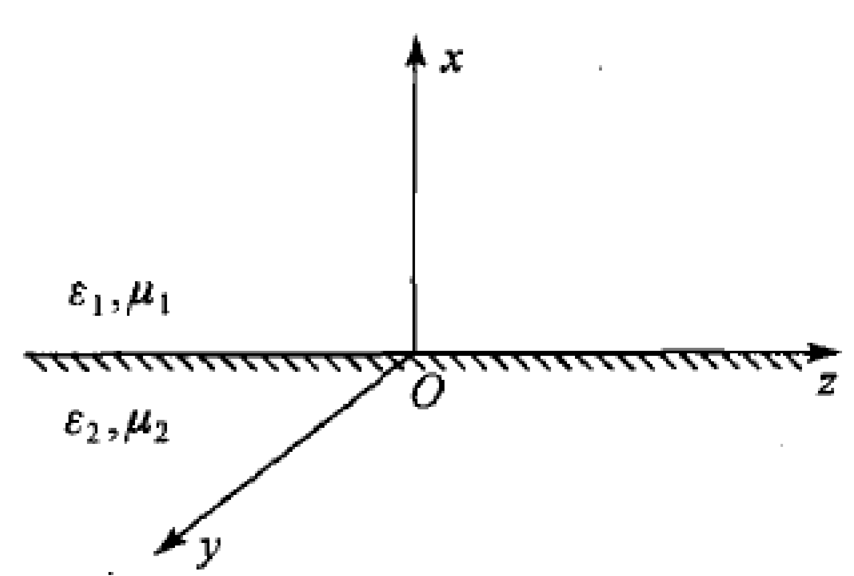


图 3.8　两种介质的平面分界面

设有两不同介质的无穷大平面分界面如图 3.8 所示，取定直角坐标系，介质分界面为 $x=0$ 平面. 我们讨论沿 z 方向传播的 TM 型波($H_z=0$)，由于介质结构沿 y 方向是均匀的，$\partial/\partial y=0$，这是个二维问题. 仅有的纵向场分量为 E_z，两个介质区域中的 E_z 可分别设为

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A\mathrm{e}^{-h_1x}\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \\ E_{z2} &= A\mathrm{e}^{h_2x}\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

为满足 $x=0$ 面上切向电场连续条件，要求在分界面两侧的场有相同的 A 和 γ 值. 解(3.3.1)式代回(3.1.8b)式可得 h_1 及 h_2 与 γ 的关系：

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - h_1^2, \quad \gamma^2 = -\omega^2\mu_2\varepsilon_2 - h_2^2. \tag{3.3.2}$$

场的横向分量可通过(3.1.7a,b)式求出，略去 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 因子后两个区域中的场分量为

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A\mathrm{e}^{-h_1x}\mathrm{e}^{-\gamma z}, & E_{z2} &= A\mathrm{e}^{h_2x}\mathrm{e}^{-\gamma z}, \\ E_{x1} &= -\frac{\gamma A}{h_1}\mathrm{e}^{-h_1x}\mathrm{e}^{-\gamma z}, & E_{x2} &= \frac{\gamma A}{h_2}\mathrm{e}^{h_2x}\mathrm{e}^{-\gamma z}, \\ H_{y1} &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1 A}{h_1}\mathrm{e}^{-h_1x}\mathrm{e}^{-\gamma z}. & H_{y2} &= \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_2 A}{h_2}\mathrm{e}^{h_2x}\mathrm{e}^{-\gamma z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.3}$$

由 $x=0$ 面上 E_z 连续条件，即(3.3.2)式，得

$$\omega^2\mu_1\varepsilon_1 + h_1^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2 + h_2^2; \tag{3.3.4a}$$

由切向磁场 H_y 连续条件得

$$\varepsilon_1 h_2 = -\varepsilon_2 h_1. \tag{3.3.4b}$$

(3.3.4a)式和(3.3.4b)式是确定 h_1 和 h_2 的方程式，称为特征方程. 对于非磁性介质可设 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$，这时特征方程的解相当简单，为

$$h_1^2 = -\omega^2\mu_0\varepsilon_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \quad h_2^2 = -\omega^2\mu_0\varepsilon_2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \tag{3.3.5}$$

当这两种介质之一，例如介质 2，为损耗介质时，ε_2 为复数，由(3.3.5)式给出的解 h_1 和 h_2 为复数，相应的波的电磁场(3.3.3)式在 x 方向是指数衰减的，场分

布集中于分界面附近,这样的波就称为表面波.若两种介质都是无耗介质,这时 ε_1 和 ε_2 都是实数,则 h_1 和 h_2 都是纯虚数,(3.3.3)式就不是表面波.所以损耗介质的存在对于形成表面波是必需的.下面将就介质分界面的两种典型情况进行具体的讨论.

(1) 空气与良导电介质的分界面

这时

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0\left(\kappa_e - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) \approx -\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}, \tag{3.3.6}$$

因为对于良导体下面的条件成立:

$$\left|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \gg \kappa_e.$$

将(3.3.6)式代入(3.3.5)式和(3.3.2)式可求得波的横向波数 h_1,h_2 和纵向波数 γ:

$$h_1^2 \approx -\omega^2\mu_0\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_2} \approx \omega^2\mu_0\varepsilon_0\frac{\omega\varepsilon_0}{\mathrm{j}\sigma},$$

$$h_1 \approx k_0(1-\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}; \tag{3.3.7}$$

$$h_2^2 \approx -\omega^2\mu_0\varepsilon_2 \approx \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma,$$

$$h_2 \approx \frac{1+\mathrm{j}}{\delta}; \tag{3.3.8}$$

$$\gamma^2 \approx -\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1-\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}\right),$$

$$\gamma \approx \mathrm{j}k_0\left(1-\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}\right), \tag{3.3.9}$$

其中 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$,$\delta=\sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ 为导体的集肤厚度.将复波数 h_1,h_2 和 γ 的实部和虚部分离,令

$$h_1 = h_1' - \mathrm{j}h_1'', \quad h_2 = h_2' + \mathrm{j}h_2'', \quad \gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta,$$

由(3.3.7)—(3.3.9)式可求出

$$\left.\begin{aligned} &h_1' = h_1'' = k_0\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}, \\ &h_2' = h_2'' = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}, \\ &\alpha = k_0\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma} \ll k_0, \\ &\beta \approx k_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

这样,两个介质区域中的电场可写成

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A\mathrm{e}^{-h_1'x-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-h_1''x+\beta z)}, \\ E_{x1} &= -\frac{\gamma}{h_1}A\mathrm{e}^{-h_1'x-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-h_1''x+\beta z)} \end{aligned}\right\} \quad (x>0); \tag{3.3.11}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= A\mathrm{e}^{h_2'x-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(h_2''x+\beta z)}, \\ E_{x2} &= \frac{\gamma}{h_2}A\mathrm{e}^{h_2'x-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(h_2''x+\beta z)} \end{aligned}\right\} \quad (x<0). \tag{3.3.12}$$

由于 $h_1''\ll\beta, h_2''\gg\beta$，在 1 区中的波矢量 $\boldsymbol{k}_1=(-h_1'',\beta)$ 近乎与 z 轴平行，而在 2 区中的波矢量 $\boldsymbol{k}_2=(-h_2'',\beta)$ 则接近于垂直于介质分界面，如图 3.9 所示. 又由于 $|\gamma/h_1|\gg1$，$|\gamma/h_2|\ll1$，使两个区域中的场振幅分别有

$$|E_{x1}|\gg|E_{z1}|,\quad |E_{z2}|\gg|E_{x2}|.$$

所以 1 区中电场基本上为 x 方向，2 区中的电场则为 z 方向，亦示于图 3.9.

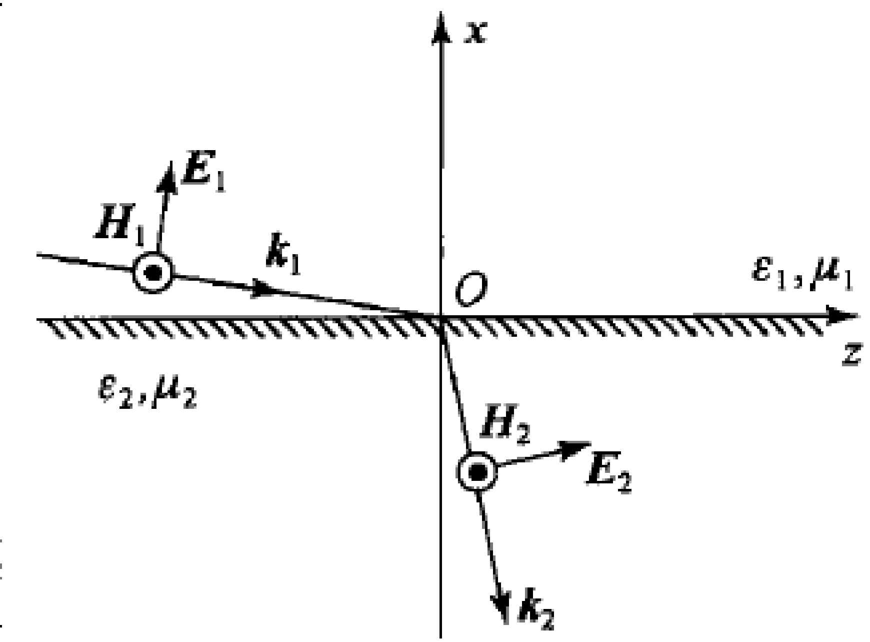


图 3.9　沿良导电介质平面表面传播的 TM 型表面波

由于横向波数的实部 h_1' 和 h_2'，两个区域中的场振幅均分别沿 $\pm x$ 方向随离开分界面而指数衰减. 在导体区域 2 中由于集肤厚度 δ 是很小的量，随着离开分界面波的衰减十分迅速，场主要集中在厚度为 δ 的薄层内；在空气介质区 1 中由于 $\sqrt{\omega\varepsilon_0/2\sigma}\ll1$，随着离开分界面场的衰减相对缓慢，可延伸至几个波长的距离，是一种松散地束缚于界面附近的表面波. 显然表面波是一种非均匀平面波.

在空气一侧，波沿 z 方向近似以光速传播，由于存在着损耗，波在传播过程中将衰减，由(3.3.10)式我们知道衰减常数 α 随频率 ω 增加而增加，所以只有在低频情况下表面波才能有效地传播. 良导体与空气的平面分界面正是 Zenneck 于 1907 年首先讨论无线电波沿地球表面传播问题时所用的模型，所以这种表面波常被称为 Zenneck 表面波. 如果介质 2 是海水，当 $f<10^8$ Hz 时良导体条件 $\sigma/\omega\varepsilon_0\gg\kappa_e$ 可以满足，因此用 Zenneck 波的概念可以较好地解释无线电波在海平面上的传播现象. 但对于典型的陆地只当 $f<2\times10^5$ Hz 时良导体条件才成立，故 Zenneck 波的概念只能用于解释长波无线电波沿地表的传播，但在中波频率沿地表传播时 Zenneck 波会很快被地面衰减掉. 关于 Zenneck 波问题也可参考文献[5]，而在文献[6]中则是从波在介质分界面上的反射，利用复数入射角的概念来解释表面波的形成.

(2) 空气与损耗介质的分界面

当介质 2 为损耗介质时，$\varepsilon_2=\varepsilon_2'-\mathrm{j}\varepsilon_2''$，而且 $\varepsilon_2''\ll\varepsilon_2'$，也能得到 TM 型表面波解，但横向及纵向波数的表示式要复杂些，这里不再写出，有兴趣的读者可参考文献[1]或[4].

应该指出,对于磁导率相同($\mu_1=\mu_2$)的介质分界面 TE 型表面波是不存在的(读者可自行证明),当 $\mu_1\neq\mu_2$ 时 TE 型表面波才可能存在. 实际上,只要两种介质均是非铁磁性介质,μ_1 和 μ_2 的差别甚小,TE 型表面波仍然可以忽略,这时重要的只是 TM 型表面波.

3. 沿圆柱面传播的表面波

Sommerfeld(1899)首先研究了电磁波沿圆柱形单导线传输的可能性问题,结论是当导线具有有限电导率时是可能的(见[7],或[6],§9.16). 他研究了具有轴对称场分布的 TM 型主波(有 E_z,E_ρ 及 H_ϕ 三个分量),这种主波被称为 Sommerfeld 波. 但对于金属圆柱表面,仅当频率 $f>10^{10}$ Hz 时才能形成集中于导体表面的场分布,成为可以实际传输的表面波.

Goubau(1950—1959)①指出了 Sommerfeld 理论结果的上述限制,并且发现当导体表面覆盖有介质薄层或导体表面有周期性皱折而形成电抗性表面时,可在较低的频率下形成密集于导体表面的表面波. 这种类型的传输线被称作 Goubau 线,曾被期望成为一种实用的单导线传输线用于通信. 但是在雨雪环境下其传输损耗显著增大,而且易受到外界干扰,如鸟类栖息其上等,终未能成为现实. 然而,Goubau 的这种概念后来却成功地用于包层光纤中(见§3.5).

§3.4 电介质波导

电介质波导主要包括均匀的电介质圆杆或电介质平板构成的导波传输系统. 早在 1910 年 Hondrous 和 Debye 就对于介质杆的导波问题进行了研究,早于金属空管波导问题的研究约 20 年,但介质波导得到广泛应用却要迟得多,直到激光技术和毫米波技术发展以后. 光导纤维是一种特殊的介质波导,在毫米波传输和集成光学中则多采用带状介质波导. 在本节中我们限于讨论圆截面的均匀介质杆波导,关于光导纤维的传输问题则留待下一节讨论.

1. 圆介质杆波导中的混合模[1,8]

设有一半径为 a 的均匀介质圆杆,介质常数为 μ_0 和 ε,杆外为空气,如图 3.10 所示. 我们讨论在这个系统中沿轴向传输的导波,在柱坐标系中沿轴向传

---

① G. Goubau, Surface waves and their application to transmission lines, *J. Appl. Phys.*, vol. 21, pp. 1119—1128, Nov., 1950; also: Single conductor surface wave transmission lines, *Proc. IRE*, Vol. 39, pp. 619—624, June, 1951; Waves in interfaces, *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-7, pp. s140—s146, 1959.

播的导波的电磁场可写作

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\rho,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\rho,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{3.4.1}$$

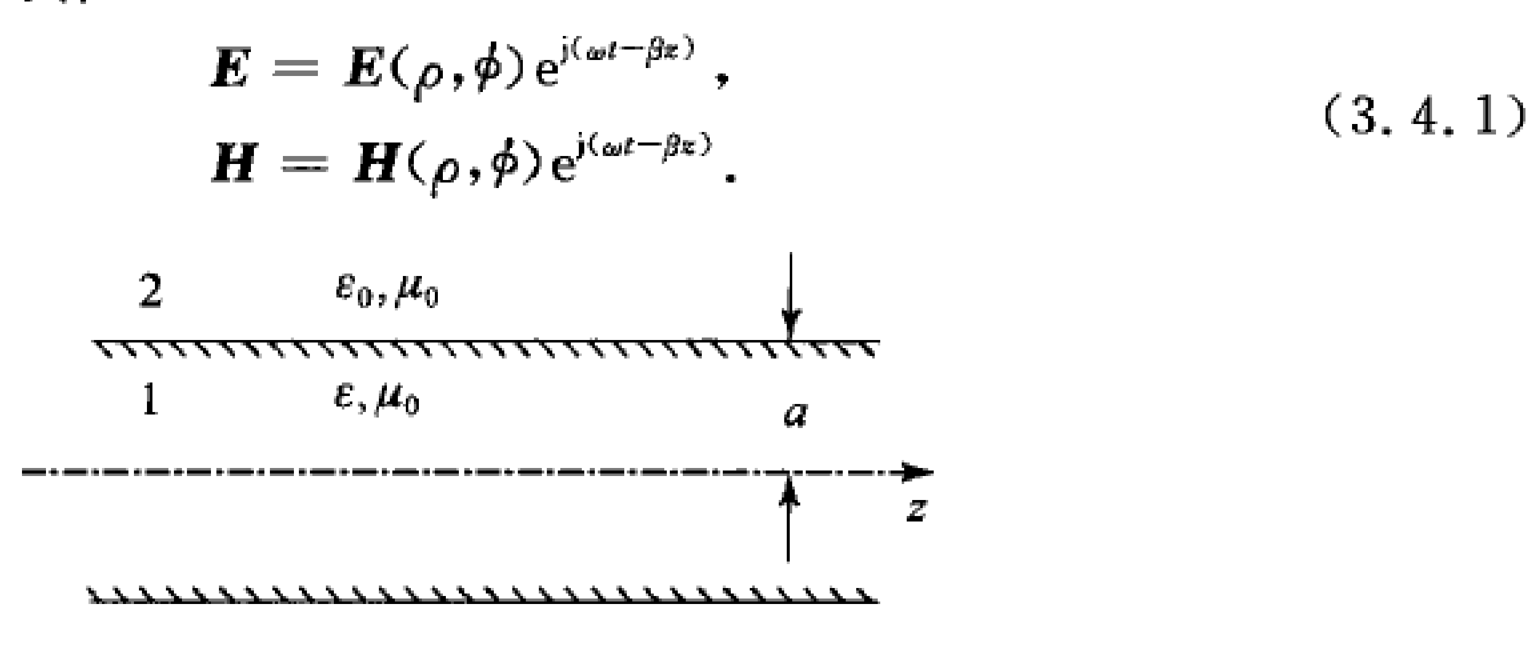


图 3.10　圆介质杆波导的纵剖面

根据§3.1的(3.1.2a,b)和(3.1.8a,b)式，在介质杆内(区域1，$\rho\leqslant a$)和介质杆外(区域2，$\rho\geqslant a$)场纵向分量分别满足以下方程式：

$$[\nabla_t^2+(\omega^2\mu_0\varepsilon-\beta^2)]\begin{Bmatrix}E_{z1}\\H_{z1}\end{Bmatrix}=0\quad(\rho\leqslant a), \tag{3.4.2a}$$

$$[\nabla_t^2+(\omega^2\mu_0\varepsilon_0-\beta^2)]\begin{Bmatrix}E_{z2}\\H_{z2}\end{Bmatrix}=0\quad(\rho\geqslant a), \tag{3.4.2b}$$

其中∇_t^2为柱坐标下的横向 Laplace 算符

$$\nabla_t^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{3.4.3}$$

在(3.4.2a)和(3.4.2b)式中我们已将介质杆内、外两个区域中的解的轴向波数β取得相同，这是为满足$\rho=a$柱面上场的切线分量连续条件所必须的. 令

$$k_{1\rho}^2=\omega^2\mu_0\varepsilon-\beta^2,\quad k_{2\rho}^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0-\beta^2, \tag{3.4.4}$$

则方程(3.4.2a,b)式的纵向场分量的分离变数法解可写为

$$\begin{Bmatrix}E_{z1}(\rho,\phi)\\H_{z1}(\rho,\phi)\end{Bmatrix}=[\mathrm{J}_m(k_{1\rho}\rho)+E\mathrm{Y}_m(k_{1\rho}\rho)][A\sin m\phi+B\cos m\phi], \tag{3.4.5a}$$

$$\begin{Bmatrix}E_{z2}(\rho,\phi)\\H_{z2}(\rho,\phi)\end{Bmatrix}=[\mathrm{H}_m^{(2)}(k_{2\rho}\rho)+F\mathrm{H}_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)][C\sin m\phi+D\cos m\phi], \tag{3.4.5b}$$

其中J_m和Y_m分别是第一类和第二类m阶 Bessel 函数，$\mathrm{H}_m^{(1)}$和$\mathrm{H}_m^{(2)}$则分别是第一类和第二类m阶 Hankel 函数，而A,B,C,D,E和F是待定系数. 在$\rho=0$和$\rho\to\infty$时场有界的条件要求$E=F=0$. 又由于结构具有轴对称性，柱坐标ϕ角的零平面可任取，在E_{z1}中可只保留$\sin m\phi$项而不失去普遍性. 由于场分量在$\rho=a$柱面上必须满足的边界条件和三角函数的正交性，可以证明若E_{z1}中仅有$\sin m\phi$项则H_{z1}中只能有$\cos m\phi$项，反之若E_{z1}中仅有$\cos m\phi$项也有类似的结果，证明见[1]，§Ⅶ.B. 因此介质杆内第m次模式的场纵向分量可写作

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}\rho)\sin m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z1} &= B_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}\rho)\cos m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} (\rho \leqslant a). \right\} \tag{3.4.6a}$$

由于 $\rho=a$ 面上场的纵向分量连续,介质杆外第 m 次模式的场纵向分量应相应地写作

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= C_m \mathrm{H}_m^{(2)}(k_{2\rho}\rho)\sin m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z2} &= D_m \mathrm{H}_m^{(2)}(k_{2\rho}\rho)\cos m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} (\rho \geqslant a). \right\} \tag{3.4.6b}$$

对于沿轴向可以传输的导波,在介质杆外的场分布需是离开 z 轴衰减的,即为表面波.由 Hankel 函数的大宗量渐近行为可推知,$k_{2\rho}$必须取负虚数,介质杆外的场才会有沿 ρ 的衰减分布.当$|k_{2\rho}\rho|\gg 1$ 时①

$$\mathrm{H}_m^{(2)}(k_{2\rho}\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_{2\rho}\rho}}\exp(-\mathrm{j}k_{2\rho}\rho) = \sqrt{\frac{2}{-\mathrm{j}\pi h\rho}}\exp(-h\rho), \tag{3.4.7}$$

这里已令

$$k_{2\rho} = -\mathrm{j}h, \quad h = [\beta^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.8}$$

虚宗量的 Hankel 函数 $\mathrm{H}_m^{(2)}(-\mathrm{j}h\rho)$可化为第二类变型 Bessel 函数②

$$\mathrm{K}_m(h\rho) = (-\mathrm{j})^{m+1}\frac{\pi}{2}\mathrm{H}_m^{(2)}(-\mathrm{j}h\rho). \tag{3.4.9}$$

这样,介质外的纵向场分量可写成

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= C_m \mathrm{K}_m(h\rho)\sin m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z2} &= D_m \mathrm{K}_m(h\rho)\cos m\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} (\rho \geqslant a), \right\} \tag{3.4.10}$$

注意此式中的待定常数 C_m 和 D_m 与(3.4.6b)式中的不同,但为了下面的方便我们使用了同样的符号.可将(3.4.6a)和(3.4.10)式分别代入(3.1.7a)和(3.1.7b)式求出介质杆内、外的横向场分量.然后利用 $\rho=a$ 柱面两侧 E_z,E_ϕ 和 H_z,H_ϕ 连续的条件得到下面的四个方程:

$$A_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}a) = C_m \mathrm{K}_m(ha), \tag{3.4.11a}$$

$$\frac{m\beta}{k_{1\rho}^2 a^2}A_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}a) + \frac{\omega\mu_0}{k_{1\rho}a}B_m \mathrm{J}_m'(k_{1\rho}a) = -\frac{m\beta}{h^2a^2}C_m \mathrm{K}_m(ha) - \frac{\omega\mu_0}{ha}D_m \mathrm{K}_m'(ha), \tag{3.4.11b}$$

$$B_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}a) = D_m \mathrm{K}_m(ha), \tag{3.4.11c}$$

$$\frac{\omega\varepsilon}{k_{1\rho}a}A_m \mathrm{J}_m'(k_{1\rho}a) + \frac{m\beta}{k_{1\rho}^2 a^2}B_m \mathrm{J}_m(k_{1\rho}a) = -\frac{\omega\varepsilon_0}{ha}C_m \mathrm{K}_m'(ha) - \frac{m\beta}{h^2a^2}D_m \mathrm{K}_m(ha). \tag{3.4.11d}$$

(3.4.11a)—(3.4.11d)是未知振幅系数 A_m,B_m,C_m 和 D_m 的联立方程式,由其

① 见,例如,郭敦仁,《数学物理方法》,§7.12,人民教育出版社,1965.

② 见,例如,王竹溪、郭敦仁,《特殊函数概论》,§7.8,413 页,科学出版社,1965.

非零解条件可得 m 模式的色散方程，色散方程的解将确定 m 模式的传输常数 β 作为频率的函数，即 m 模式的传输特性. 从方程(3.4.11)可看出，当 $m=0$ 时这四个方程可分离为两组独立的方程：(3.4.11a)和(3.4.11d)为 A_m 和 C_m 满足的方程组，对应的场解只有一个纵向场分量 E_z，为 TM 模；方程(3.4.11b)和(3.4.11c)为 B_m 和 D_m 满足的方程组，为 TE 模，只有 H_z 一个纵向分量. 由于这两组方程式之间不发生耦合，这两个模式可以分别独立存在. 但当 $m\neq 0$ 时这四个方程式不再能够分离，四个系数必须同时联立求解，不再可能得到独立的 TM 或 TE 模解，相应的 m 模式中纵向场分量 E_z 和 H_z 两者同时存在，这种模式称为混合模(hybrid modes)，又可区分为 EH 模和 HE 模两种. 混合模在多模或单模光纤中较为重要，我们将在下节中予以讨论，这里我们仅对简单的轴对称模的求解问题加以讨论.

2. 轴对称模式[9]

当 $m=0$ 时场分布与角坐标 ϕ 无关，具有轴对称性. TM 模或 TE 模的色散方程可分别由方程组(3.4.11a)，(3.4.11d)或(3.4.11b)，(3.4.11c)的非零解条件导出：

$$k_{1\rho}\frac{\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)}{\mathrm{J}_0'(k_{1\rho}a)}=-h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\mathrm{K}_0'(ha)},\quad (\text{TE 模}, H_z\neq 0) \tag{3.4.12a}$$

$$k_{1\rho}\frac{\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)}{\varepsilon\mathrm{J}_0'(k_{1\rho}a)}=-h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\varepsilon_0\mathrm{K}_0'(ha)},\quad (\text{TM 模}, E_z\neq 0) \tag{3.4.12b}$$

利用微商公式 $\mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x)$ 和 $\mathrm{K}_0'(x)=-\mathrm{K}_1(x)$，上面的两个方程式可改写为

$$k_{1\rho}\frac{\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)}{\mathrm{J}_1(k_{1\rho}a)}=-h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\mathrm{K}_1(ha)},\quad (\text{TE 模}) \tag{3.4.13a}$$

$$k_{1\rho}\frac{\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)}{\varepsilon\mathrm{J}_1(k_{1\rho}a)}=-h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\varepsilon_0\mathrm{K}_1(ha)}.\quad (\text{TM 模}) \tag{3.4.13b}$$

为了能解出色散方程式中的两个未知量 $k_{1\rho}$ 和 h 还需要另一个方程式，这个方程式可由(3.4.4)式得到：

$$\omega^2\mu_0\varepsilon-k_{1\rho}^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0+h^2. \tag{3.4.14}$$

方程(3.4.14)分别与(3.4.13a)或(3.4.13b)式的联立求解将分别给出 TE 或 TM 模的 $k_{1\rho}$ 和 h 作为 ω 的函数. 但色散方程是超越方程，一般只能用数值方法求解. 为了直观起见下面我们用图解法来求解 TE 模的 $k_{1\rho}$ 和 h，并且说明模式传输的一些重要概念.

TE 模的纵向场 H_{z1} 和 H_{z2} 可分别由(3.4.6a)式和(3.4.10)式得出，然后分别代入(3.1.7a,b)式求出场的横向分量，略去 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}$ 因子后介质杆内、外的 TE 模场分量为

$$\left.\begin{aligned} H_{z1} &= B\mathrm{J}_0(k_{1\rho}\rho), \\ H_{\rho 1} &= \frac{\mathrm{j}\beta}{k_{1\rho}} B\mathrm{J}_1(k_{1\rho}\rho), \quad (\rho \leqslant a); \\ E_{\phi 1} &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{k_{1\rho}} B\mathrm{J}_1(k_{1\rho}\rho) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.15a}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{z2} &= D\mathrm{K}_0(h\rho), \\ H_{\rho 2} &= -\frac{\mathrm{j}\beta}{h} D\mathrm{K}_1(h\rho), \quad (\rho \geqslant a). \\ E_{\phi 2} &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{h} D\mathrm{K}_1(h\rho) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.15b}$$

当 h 为正实数时柱外区域的场(3.4.15b)式为沿 z 方向传播的表面波.

为求 TE 模的径向波数 $k_{1\rho}$和 h,我们将(3.4.13a)式和(3.4.14)式改写成

$$\frac{\mathrm{J}_1(k_{1\rho}a)}{(h_{1\rho}a)\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)} + \frac{\mathrm{K}_1(ha)}{(ha)\mathrm{K}_0(ha)} = 0 \tag{3.4.16}$$

和

$$(k_{1\rho}a)^2 + (ha)^2 = a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0). \tag{3.4.17}$$

我们用图解法来求这两个联立方程的解.对于给定的介质杆半径 a 和介电常数 ε,先在两张尺度相同的图上分别绘出(3.4.16)式左方两项的函数曲线

$$-\frac{\mathrm{J}_1(k_{1\rho}a)}{(k_{1\rho}a)\mathrm{J}_0(k_{1\rho}a)} \sim (k_{1\rho}a)^2 \tag{3.4.18a}$$

和

$$\frac{\mathrm{K}_1(ha)}{(ha)\mathrm{K}_0(ha)} \sim (ha)^2, \tag{3.4.18b}$$

绘制第二张图时应将横坐标的正向取为向左,然后将这两张图的横坐标放在同一直线上,而且曲线(3.4.18b)式的横坐标原点 $(ha)^2=0$ 与曲线(3.4.18a)式的横坐标 $(k_{1\rho}a)^2=a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)$ 重合就得到图 3.11. 对于确定的频率 ω,方程(3.4.17)的右方 $a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)$ 为确定值,当要求 h 为正实数时这个值也就是 $(k_{1\rho}a)^2$ 所能取的最大值,此时若取 $(ha)^2=0$ 则方程(3.4.17)已满足.在(3.4.18a)式和(3.4.18b)式的交点这两个函数值相等,使方程(3.4.16)得以满足,因此图 3.11 上这两个函数的交点对应的 $k_{1\rho}$ 和 h 值就是联立方程组(3.4.16)和(3.4.17)的解.图 3.11 上这样的交点有两个(用圆圈表示),对应于联立方程组的两组解,相应的 $k_{1\rho}$和 h 均为正实数.显然,解的数目取决于 ω 的值,随着 ω 的增高点 $a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)$ 将在 $(k_{1\rho}a)^2$ 横坐标轴上向右移,使解的数目增加,反之随着 ω 减小点 $a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)$ 将向左移,解的数目随之减少.

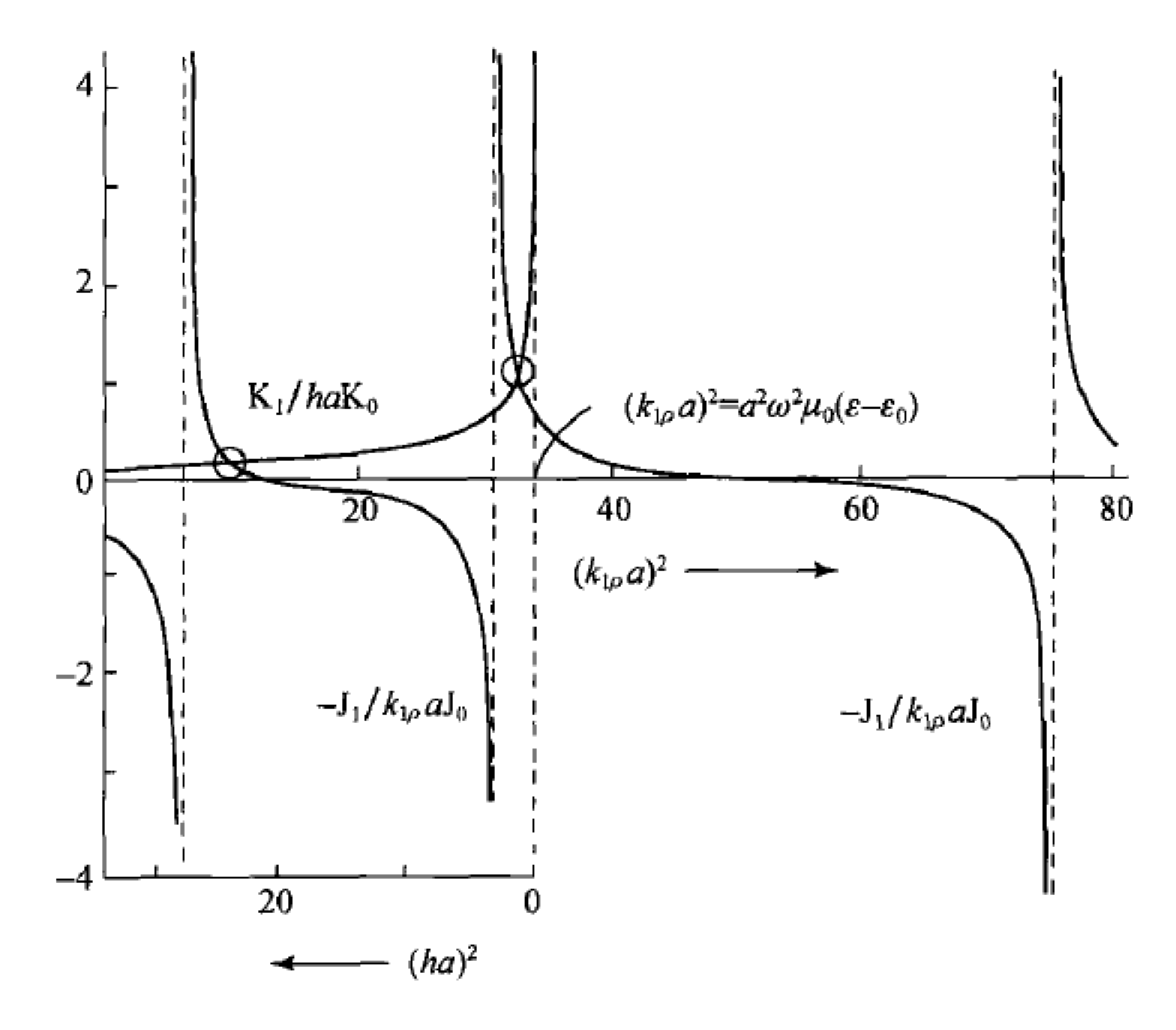


图 3.11　圆介质杆波导轴对称 TE 模色散方程的图解法

函数(3.4.18a)的断裂点对应于 $J_0(\nu_{0n})=0$ 点，ν_{0n} 为 J_0 的第 n 个根. 仅当 $a^2\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)>(\nu_{0n})^2$ 时曲线(3.4.18b)式才可能与(3.4.18a)式的相应分支相交，这个交点对应于介质杆波导的 TE_{0n} 模式，图 3.11 中的两个交点分别对应于 TE_{01}，TE_{02} 模. 各个模式均具有自己独特的场的径向分布，图 3.12 示出了 TE_{01} 模的各个场分量的径向分布. 以每个模式解的 $k_{1\rho}$ 或 h 代入(3.4.4)式就可求出该模式的纵向波数 β 作为频率的函数，因此各个模式具有独自的轴向传播速度. 当 $h=0$ 时介质杆外场的径向分布无衰减，波的能量将沿径向辐射出去，沿轴向的传播截止，由图 3.11 可见这时 $k_{1\rho}a=\nu_{0n}$，对应的频率称为该模式的截止频率 $(\omega_c)_{0n}$. 由(3.4.17)式可求出 TE_{0n} 模的截止频率

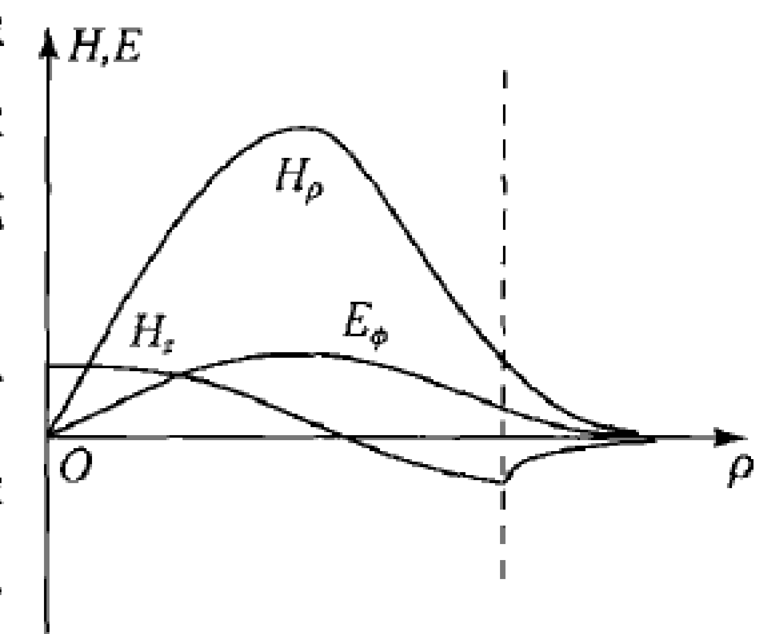


图 3.12　圆介质杆波导轴对称 TE_{01} 模电磁场分量的径向分布

$$(\omega_c)_{0n}=\frac{\nu_{0n}}{a\sqrt{\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}}. \tag{3.4.19}$$

最低截止频率为 $\nu_{01}=2.405$ 对应的 $(\omega_c)_{01}$. 显然，在 $\omega<(\omega_c)_{01}$ 的低频率下图3.11 中的曲线没有交点，这时没有 $k_{1\rho}$ 和 h 的实数解，因此不存在可以沿轴向传播的表面波模式. 而当 $(\omega_c)_{01}<\omega<(\omega_c)_{02}$ 时存在着可以传输的 TE_{01} 模；当 $(\omega_c)_{02}<\omega<(\omega_c)_{03}$ 时除 TE_{01} 模外还存在着可以传输的 TE_{02} 模，图 3.11 所示正是这种

情况.

当 $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ 及 $\omega \gg (\omega_c)_{01}$ 时，$h=0$ 的原点右移，使 TE_{01} 模的 $h \gg k_{1\rho}$ 而与 β 有相同的量级，介质杆外的场振幅沿 ρ 方向迅速衰减，成为紧束缚于介质杆表面的表面波. 图 3.12 所示的场分布就是这种情况，这时介质波导成为良好的传输系统.

对于轴对称的 TM 模式可用类似的方法进行分析和求解，这里就不再重复了.

§3.5 光 纤

在 20 世纪中叶以前，以长距离传输信号为目的的通信研究基本集中于无线电和微波频率范围，以同轴线和金属管波导等作为信号传输线，尽管早已有了介质波导的理论研究. 以光导纤维作为信号传输线，以光波频率的电磁波作为信号载体的通信研究工作始于高锟(K. C. Kao)和 Hockham 的提议，在 1966 年发表的题为“光学频率介质纤维表面波导”的论文①中，他们具体提出使用圆截面包层光纤作为可见光和红外波段的光信号传输线，芯直径约为载频波长量级，包层外径约百倍于芯径，芯折射率较包层折射率高约 1%. 从满足通信要求的各个方面，他们论证了此建议的可行性，并完成了初步实验. 并指出当时的主要困难是由于介质材料导致传输损耗过高，但从损耗的基本机构看来，此困难并非不能克服. Kapron 等人于 1970 年成功地制作了损耗小于 20 dB/km 的玻璃纤维后，对于光纤通信的研究兴趣随之喷发.

1. 弱导光纤中的混合模[10]

光纤是光导纤维的简称，这个名词现在几乎妇孺皆知，因为全球互联网和现代光通信技术对社会的影响已经波及社会生活的各个方面. 但是要透彻了解光纤传输信号的原理却不是一件容易的事，对于光纤传输原理作理论分析，即使现在也仍然需要作相当多的简化近似.

光纤是圆形横截面的介质导波结构，由于其横截面尺度纤细，将它称为光导纤维. 光纤的主体是中央的芯，直径 3～50 μm，这个几何核心也是信息传输的核心. 芯外包有另一层介质，折射率略低于芯，外径约 100～150 μm，其外另包有一层介质，厚约 3～50 μm，起机械保护作用. 多根这样的光纤成束后再裹以外皮，形似电缆，便是成缆光纤，俗称光缆.

---

① K. C. Kao and G. A. Hockham, Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies, *Proc. IEE*, vol. 113, no. 7, pp. 1151—1158, July 1966.

实际的芯和包层的折射率在横截面内一般不是很均匀，也有为提高其性能而有意将折射率的横向分布做得不均匀. 为了对光导波在光纤中的传输作理论分析，需要作简化近似：认为在半径为 a_1 的芯内折射率均匀，为 n_1；在半径 a_1 与 a_2 之间的包层内折射率也均匀，为 n_2. 在这个简化模型中折射率的横向分布为

$$\left.\begin{aligned} n &= n_1 \quad (\rho < a_1); \\ n &= n_2 = n_1(1-\Delta) \quad (a_1 < \rho < a_2), \end{aligned}\right\} \tag{3.5.1}$$

而且

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1. \tag{3.5.2}$$

这个简化模型称为阶梯折射率光纤，其几何结构和折射率在横截面内的分布示于图 3.13，通常 $\Delta < 0.01$.

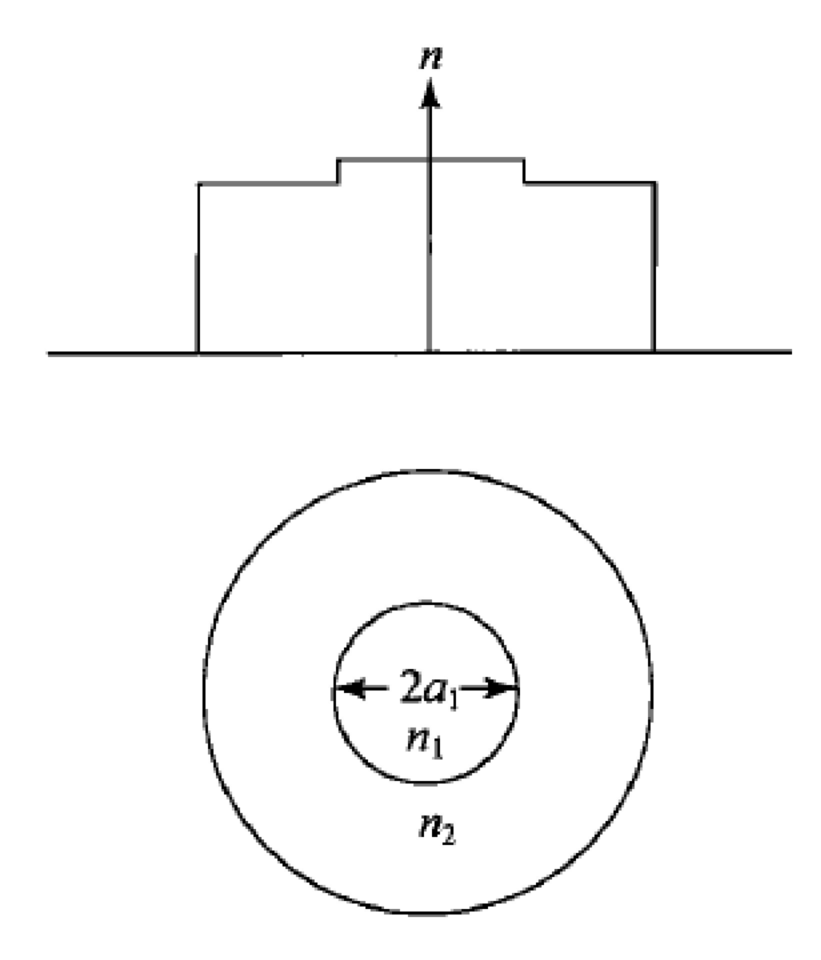


图 3.13　阶梯折射率光纤的横截面及折射率的径向分布

对于阶梯折射率光纤中传播模式的理论分析，可以直接应用上一节关于圆介质杆波导中混合模的表示式：因为 $n_1 > n_2$，在光纤包层中的场是径向指数衰减的，包层的外边界 $\rho = a_2$ 对芯中传播模影响甚微，在理论分析中可以令 $a_2 \to \infty$，将光纤包层的外边界推至无穷远处后光纤便等同于半径为 a_1 的圆介质杆波导，只是杆外介质的折射率现在为 n_2. 为了数学式的简便，以下我们将 a_1 改写作 a，称芯内为区域 1，芯外为区域 2. 由于光纤为非磁性材料，$\mu = \mu_0$.

在两个区域内 $m \neq 0$ 的混合模的纵向场分量为

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z1} &= B\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} \quad (\rho \leqslant a), \right\} \tag{3.5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= C\mathrm{K}_m(h\rho)\cos m\phi \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z2} &= D\mathrm{K}_m(h\rho)\sin m\phi \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} \quad (\rho \geqslant a), \right\} \tag{3.5.4}$$

式中

$$\kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \quad h^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2, \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0. \tag{3.5.5}$$

现在,为了表达简便,已将(3.4.6a)式中的 $k_{1\rho}$ 改用 κ 表示,而且略去常数 A,B,C,D 的下脚标 m. 柱坐标系中由纵向场分量求出横向分量的(3.1.7a,b)式现在具体写作:

$$\left.\begin{aligned}
E_{\rho1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left(\beta\frac{\partial E_{z1}}{\partial\rho} + \omega\mu_0\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{z1}}{\partial\phi}\right),\\
E_{\phi1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left(\beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z1}}{\partial\phi} - \omega\mu_0\frac{\partial H_{z1}}{\partial\rho}\right),\\
H_{\rho1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left(\beta\frac{\partial H_{z1}}{\partial\rho} - \omega\varepsilon_1\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z1}}{\partial\phi}\right),\\
H_{\phi1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left(\beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{z1}}{\partial\phi} + \omega\varepsilon_1\frac{\partial E_{z1}}{\partial\rho}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.6a}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{\rho2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left(-\beta\frac{\partial E_{z2}}{\partial\rho} - \omega\mu_0\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{z2}}{\partial\phi}\right),\\
E_{\phi2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left(-\beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z2}}{\partial\phi} + \omega\mu_0\frac{\partial H_{z2}}{\partial\rho}\right),\\
H_{\rho2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left(-\beta\frac{\partial H_{z2}}{\partial\rho} + \omega\varepsilon_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z2}}{\partial\phi}\right),\\
H_{\phi2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left(-\beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{z2}}{\partial\phi} - \omega\varepsilon_2\frac{\partial E_{z2}}{\partial\rho}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.6b}$$

将(3.5.3),(3.5.4)式代入(3.5.6a,b)式,求出芯内外横向场的柱坐标分量:

$$\left.\begin{aligned}
E_{\rho1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\beta\kappa \mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\cos m\phi + B\frac{m\omega\mu_0}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi\right],\\
E_{\rho2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left[-C\beta h\mathrm{K}_m'(h\rho)\cos m\phi - D\frac{m\omega\mu_0}{\rho}\mathrm{K}_m(h\rho)\cos m\phi\right],
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{\phi1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[-A\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi - B\omega\mu_0\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\sin m\phi\right],\\
E_{\phi2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left[C\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{K}_m(h\rho)\sin m\phi + D\omega\mu_0 h\mathrm{K}_m'(h\rho)\sin m\phi\right],
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.8}$$

$$\left.\begin{aligned}
H_{\rho1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\frac{m\omega\varepsilon_1}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi + B\beta\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\sin m\phi\right],\\
H_{\rho2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left[-C\frac{m\omega\varepsilon_2}{\rho}\mathrm{K}_m(h\rho)\sin m\phi - D\beta h\mathrm{K}_m'(h\rho)\sin m\phi\right],
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
H_{\phi1} &= -\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\omega\varepsilon_1\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\cos m\phi + B\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi\right],\\
H_{\phi2} &= -\frac{\mathrm{j}}{h^2}\left[-C\omega\varepsilon_2 h\mathrm{K}_m'(h\rho)\cos m\phi - D\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{K}_m(h\rho)\cos m\phi\right].
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.10}$$

场的纵向和横向分量的表达式(3.5.3),(3.5.4),(3.5.7)—(3.5.10)已保证满

足 $\rho=0$ 和 $\rho\to\infty$ 处的边界条件.

现在,应用 $\rho=a$ 柱面上的边界条件导出传播常数 κ 和 h 应满足的色散方程. 将纵向电场和磁场的(3.5.3)和(3.5.4)式代入边界条件

$$E_{z1}\big|_{\rho=a}=E_{z2}\big|_{\rho=a}\quad 和\quad H_{z1}\big|_{\rho=a}=H_{z2}\big|_{\rho=a}$$

得

$$C=A\frac{\mathrm{J}_m(\kappa a)}{\mathrm{K}_m(ha)},\quad D=B\frac{\mathrm{J}_m(\kappa a)}{\mathrm{K}_m(ha)}. \tag{3.5.11}$$

(3.5.8)和(3.5.10)式 $E_{\phi 2}$ 和 $H_{\phi 2}$ 中的常数 C 和 D 用上式的 A 和 B 表示,再代入边界条件

$$E_{\phi 1}\big|_{\rho=a}=E_{\phi 2}\big|_{\rho=a}\quad 和\quad H_{\phi 1}\big|_{\rho=a}=H_{\phi 2}\big|_{\rho=a},$$

分别得

$$\frac{A}{B}=-\frac{\omega\mu_0}{m\beta}\left[\frac{\kappa^2h^2a^2}{\kappa^2+h^2}\right]\left[\frac{\mathrm{J}_m'(\kappa a)}{\kappa a\mathrm{J}_m(\kappa a)}+\frac{\mathrm{K}_m'(ha)}{ha\mathrm{K}_m(ha)}\right], \tag{3.5.12}$$

和

$$\frac{A}{B}=-\frac{m\beta}{\omega\varepsilon_0}\left[\frac{\kappa^2+h^2}{\kappa^2h^2a^2}\right]\left[n_1^2\frac{\mathrm{J}_m'(\kappa a)}{\kappa a\mathrm{J}_m(\kappa a)}+n_2^2\frac{\mathrm{K}_m'(ha)}{ha\mathrm{K}_m(ha)}\right]^{-1}. \tag{3.5.13}$$

(3.5.12)和(3.5.13)式等号右侧的两式须相等,导致下面的色散方程:

$$\left[\frac{\mathrm{J}_m'(\kappa a)}{\kappa a\mathrm{J}_m(\kappa a)}+\frac{\mathrm{K}_m'(ha)}{ha\mathrm{K}_m(ha)}\right]\left[\frac{\mathrm{J}_m'(\kappa a)}{\kappa a\mathrm{J}_m(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{\mathrm{K}_m'(ha)}{ha\mathrm{K}_m(ha)}\right]$$
$$=\left(\frac{m\beta}{k_0n_1}\right)^2\left(\frac{\kappa^2+h^2}{\kappa^2h^2a^2}\right)^2. \tag{3.5.14}$$

条件(3.5.2)称为弱导条件,实际的光纤均满足此条件,称为弱导光纤①. 在弱导条件下色散方程(3.5.14)得以相当简化,可以解析地求解,由此才能导致线性极化模式的概念(见本节第 2 小节). 下面就运用弱导条件化简色散方程(3.5.14).

在弱导条件下 $k_0^2(n_1^2-n_2^2)=k_0^2n_1^2 2\Delta$,色散方程(3.5.14)右侧第一个括号可改写为

$$\left(\frac{m\beta}{k_0n_1}\right)^2=m^2\left[1-2\Delta\frac{k_0^2n_1^2-\beta^2}{k_0^2(n_1^2-n_2^2)}\right].$$

因为 $k_0^2n_1^2-\beta^2=k_0^2(n_1^2-n_2^2)-h^2$,上式右侧方括号中的分式小于 1,在 $\Delta\to 0$ 的极限下(3.5.14)式右侧化为 $m^2(\kappa^2+h^2)^2/(\kappa^2h^2a^2)^2$;在 $\Delta\to 0$ 的极限下(3.5.14)式左侧的两个方括号变得相同. 因此,色散方程(3.5.14)简化为

$$\frac{\mathrm{J}_m'(\kappa a)}{\kappa a\mathrm{J}_m(\kappa a)}+\frac{\mathrm{K}_m'(ha)}{ha\mathrm{K}_m(ha)}=\pm m\left(\frac{\kappa^2+h^2}{\kappa^2h^2a^2}\right). \tag{3.5.15}$$

---

① D. Gloge, Weakly guiding fibers, *Appl. Optics*, vol. 10, pp. 2252—2258, 1971.

利用柱函数的微商公式和递推公式①

$$Z'_m(x)=\frac{1}{2}[Z_{m-1}(x)-Z_{m+1}(x)],\quad Z_{m+1}(x)=\frac{2m}{x}Z_m(x)-Z_{m-1}(x),$$

这里 Z 表示任意柱函数,可以导出色散方程(3.5.15)中 J'_m 和 K'_m 的以下表示式:

$$J'_m(x)=\mp\frac{mJ_m(x)}{x}\pm J_{m\mp1}(x),\quad K'_m(x)=\mp\frac{mK_m(x)}{x}-K_{m\mp1}(x). \tag{3.5.16}$$

如果色散方程(3.5.15)的右侧取正号,左侧的 J'_m 和 K'_m 取(3.5.16)式的下面一行符号,(3.5.15)式便化为

$$\frac{J_{m+1}(\kappa a)}{\kappa aJ_m(\kappa a)}+\frac{K_{m+1}(ha)}{haK_m(ha)}=0\quad(m>0), \tag{3.5.17}$$

由此式确定的解称为 EH 模,是混合模式的一种.如果(3.5.15)式右侧取负号,但使用(3.5.16)式上面一行符号于(3.5.15)式左侧的 J'_m 和 K'_m,所得色散方程为

$$\frac{J_{m-1}(\kappa a)}{\kappa aJ_m(\kappa a)}-\frac{K_{m-1}(ha)}{haK_m(ha)}=0\quad(m>0), \tag{3.5.18}$$

由它确定的解为 HE 模,是混合模的另一种.这两种混合模命名的来由可参考 Snitzer 的论文②.如果将 EH 模和 HE 模的色散方程(3.5.15)代入 A/B 的(3.5.12)式,会得到 A/B 值的不同结果,分别为

$$\text{EH 模}\quad \frac{A}{B}=-\frac{\omega\mu_0}{\beta}; \tag{3.5.19a}$$

$$\text{HE 模}\quad \frac{A}{B}=\frac{\omega\mu_0}{\beta}=\frac{k_0Z_0}{\beta}, \tag{3.5.19b}$$

Z_0 为自由空间的波阻抗.

除 EH 模和 HE 模外,色散方程(3.5.14)的解也包括具有轴对称场分布的 TE_{0n} 和 TM_{0n} 模.在(3.5.14)式中设 $m=0$,它的右侧变为零,左侧分裂为两个方程:

$$\frac{J_1(\kappa a)}{\kappa aJ_0(\kappa a)}+\frac{K_1(ha)}{haK_0(ha)}=0, \tag{3.5.20}$$

$$\frac{J_1(\kappa a)}{\kappa aJ_0(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{K_1(ha)}{haK_0(ha)}=0. \tag{3.5.21}$$

(3.5.20)式是 TE_{0n} 模的色散方程,因为由(3.5.12)式它导致 $A=0$.而由

---

① 见,例如,王竹溪、郭敦仁,《特殊函数概论》,§7.6,科学出版社,1965.微商公式也可由本书附录 B 中(B.14)的第一式导出.

② E. Snitzer, Cylindrical dielectric waveguide modes, *J. Opt. Soc, Am.*, vol. 51, pp. 491—498, 1961.

(3.5.13)式,(3.5.21)式的成立导致 $B=0$,所以(3.5.21)式是 TM_{0n}模的色散方程.我们在§3.4中已直接从场的轴对称解导出了这两个色散方程.现在我们看到,在 $\Delta\to 0$ 的条件下 TE_{0n}模和 TM_{0n}模的色散方程变得相同.因为当 $h\to 0$ 时模式的传输截止,为导出截止条件可以使用 $K_0(x)$和 $K_1(x)$的小宗量近似式:

$$K_0(x)=\ln\left(\frac{2}{\Gamma x}\right),\quad K_1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right),$$

$\Gamma=1.781\cdots$为 Euler 常数.由此有

$$\lim_{x\to 0}\frac{K_1(x)}{xK_0(x)}\to\infty.$$

在上式中令 $x=ha$,将它应用于色散方程(3.5.20)和(3.5.21)的左侧第二项,得 TE_{0n}模和 TM_{0n}模的截止条件为

$$J_0(\kappa_c a)=0,\quad \kappa_c=\nu_{0n}/a,\tag{3.5.22}$$

ν_{0n}为 J_0 的第 n 个零点.在§3.4中我们已得到这个截止条件.

再来看 EH 模的色散方程(3.5.17)的解.同样,由上面的小宗量近似式有

$$\lim_{x\to 0}\frac{K_{m+1}(x)}{xK_m(x)}\to\infty,$$

因此,由(3.5.17)式得 EH_{mn}模的截止条件为

$$J_m(\kappa_c a)=0,\quad \kappa_c=\nu_{mn}/a\quad(m>0,\kappa_c>0),\tag{3.5.23}$$

ν_{mn}是 $J_m(x)$的第 n 个零点.

HE 模色散方程的求解需区分两种情况.当 $m=1$ 时,色散方程(3.5.18)化为

$$\frac{J_0(\kappa a)}{\kappa a J_1(\kappa a)}-\frac{K_0(ha)}{ha K_1(ha)}=0.\tag{3.5.24}$$

由小宗量近似式现在有

$$\lim_{x\to 0}\frac{K_0(x)}{xK_1(x)}\to\infty,$$

从色散方程(3.5.24)立即解得 HE_{1n}模的截止条件

$$J_1(\kappa_c a)=0,\quad \kappa_c=\nu_{1n}/a.\tag{3.5.25}$$

这里,有一个特别重要的情况:$J_1(x)$的第一个根为零,$\nu_{11}=0$.因为 $J_0(0)=1$,我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_0(x)}{xJ_1(x)}\to\infty,$$

因此,$\kappa_c=\nu_{11}/a=0$,是满足色散方程(3.5.24)的解.EH 模色散方程的解则与此不同,$J_m(x)$的小宗量近似式为

$$J_m(x)=\frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m,$$

由此有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{J}_{m+1}(x)}{x\mathrm{J}_m(x)}=\frac{1}{2(m+1)}.$$

因此,$\mathrm{J}_1(x)$的第一个根 $\nu_{11}=0$ 不能满足色散方程方程(3.5.17),截止条件 $\kappa_c=\nu_{1n}/a$ 需要从 ν_{12} 开始,我们在方程(3.5.17)的解(3.5.23)式中已标明要求 $\kappa_c>0$. HE_{11} 模是仅有的允许 κ_c 取值为零的模式,它的截止频率为零,是光纤的基模.

当 $m>1$ 时,因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{K}_{m-1}(x)}{x\mathrm{K}_m(x)}=\frac{1}{2(m-1)},$$

应用于色散方程(3.5.18)得截止条件

$$\frac{\mathrm{J}_{m-1}(\kappa_c a)}{\kappa_c a\mathrm{J}_m(\kappa_c a)}=\frac{1}{2(m-1)}. \tag{3.5.26}$$

Bessel 函数的递推关系

$$\frac{2(m-1)}{x}\mathrm{J}_{m-1}(x)=\mathrm{J}_m(x)+\mathrm{J}_{m-2}(x)$$

可改写为

$$\frac{\mathrm{J}_{m-1}(x)}{x\mathrm{J}_m(x)}=\frac{1}{2(m-1)}+\frac{\mathrm{J}_{m-2}(x)}{2(m-1)\mathrm{J}_m(x)}.$$

将它应用于(3.5.26)式左侧,当 $m>1$ 时 HE_{mn} 模的截止条件为

$$\frac{\mathrm{J}_{m-2}(\kappa_c a)}{2(m-1)\mathrm{J}_m(\kappa_c a)}=0,$$

即

$$\mathrm{J}_{m-2}(\kappa_c a)=0,\quad \kappa_c=\nu_{m-2,n}/a\quad (m>1,\kappa_c>0). \tag{3.5.27}$$

以上在 $\Delta\to 0$ 的条件下出了弱导光纤中 TE_{0n},TM_{0n},EH_{mn},HE_{mn} 模的截止条件. 在弱导条件下当 $\Delta\nrightarrow 0$ 时对截止条件的研究表明[11],截止条件(3.5.22),(3.5.23)和(3.5.25)仍然成立,只有(3.5.27)需作小修改.

2. 线性极化模[10]

不难看出 $m=l-1$ 的 EH_m 模和 $m=l+1$ 的 HE_m 模是简并模,因为它们具有相同的截止条件. 在 EH_m 模的色散方程(3.5.17)中令 $m=l-1$ 得

$$\frac{\kappa a\mathrm{J}_{l-1}(\kappa a)}{\mathrm{J}_l(\kappa a)}=-\frac{ha\mathrm{K}_{l-1}(ha)}{\mathrm{K}_l(ha)}\quad (\mathrm{EH}_m\text{ 模},m=l-1). \tag{3.5.28}$$

在 HE_m 模的色散方程(3.5.18)中令 $m=l+1$ 得

$$\frac{\kappa a\mathrm{J}_{l+1}(\kappa a)}{\mathrm{J}_l(\kappa a)}=\frac{ha\mathrm{K}_{l+1}(ha)}{\mathrm{K}_l(ha)}\quad (\mathrm{HE}_m\text{ 模},m=l+1). \tag{3.5.29}$$

由柱函数的递推关系

$$\mathrm{J}_{m+1}(x)=\frac{2m}{x}\mathrm{J}_m(x)-\mathrm{J}_{m-1}(x),\quad \mathrm{K}_{m+1}(x)=\frac{2m}{x}\mathrm{K}_m(x)+\mathrm{K}_{m-1}(x)$$

可分别导致下列关系：

$$x\frac{\mathrm{J}_{m+1}(x)}{\mathrm{J}_m(x)}=2m-x\frac{\mathrm{J}_{m-1}(x)}{\mathrm{J}_m(x)},\quad x\frac{\mathrm{K}_{m+1}(x)}{\mathrm{K}_m(x)}=2m+x\frac{\mathrm{K}_{m-1}(x)}{\mathrm{K}_m(x)}.$$

将上面的两个关系式分别应用于(3.5.29)式的左侧和右侧，(3.5.29)式便化成(3.5.28)式. 因此，EH_m 模($m=l-1$)和 HE_m 模($m=l+1$)具有相同的截止条件

$$\mathrm{J}_{l-1}(\kappa_c a)=0\quad(\mathrm{EH}_m, m=l-1;\mathrm{HE}_m, m=l+1).\tag{3.5.30}$$

这两个模式叠加形成的新模式具有显著的特征，称为线性极化模(linearly-polarized modes)①，简称为 LP 模.

横向场是 LP 模的主要分量，为了解 LP 模的性质我们需要求出它的横向分量. 为节省篇幅我们仅求出芯内的场分布，为表达简单以下将场分布式中的下脚标 1 略去不写. 将场振幅 A/B 比值的(3.5.19a,b)式代入(3.5.3)式的 H_z，场的纵向分量现在写作

$$E_z=A\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi,\quad H_z=\mp\frac{A\beta}{\omega\mu_0}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi.\tag{3.5.31}$$

这里和以下我们约定(如 H_z 表达式右侧)上面的符号适用于 EH 模(由于(3.5.19a)式)，下面的符号适用于 HE 模(由于(3.5.19b)式). 将(3.5.19a,b)式代入(3.5.7)—(3.5.10)式，芯中的横向场分布现在写作：

$$\left.\begin{aligned}
E_\rho&=-\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\beta\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\cos m\phi\mp A\beta\frac{m}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi\right],\\
E_\phi&=-\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[-A\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi\pm A\beta\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\sin m\phi\right],\\
H_\rho&=-\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\frac{m\omega\varepsilon_1}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\sin m\phi\mp\frac{A\beta}{\omega\mu_0}\beta\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\sin m\phi\right],\\
H_\phi&=-\frac{\mathrm{j}}{\kappa^2}\left[A\omega\varepsilon_1\kappa\mathrm{J}_m'(\kappa\rho)\cos m\phi\mp\frac{A\beta}{\omega\mu_0}\frac{m\beta}{\rho}\mathrm{J}_m(\kappa\rho)\cos m\phi\right].
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.32}$$

对于传播模，κ 和 h 都是实数，由(3.5.5)式有下面的不等式

$$k_0^2n_1^2>\beta^2>k_0^2n_2^2,$$

在 $\Delta\to0$ 的极限下，(3.5.32)式后二式中的 β^2 可近似为 $\beta^2=k_0^2n_1^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_1$；对于(3.5.32)式中的 $\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{J}_m'(x)$ 应用递推关系和微商公式

$$\frac{m}{x}\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{m-1}(x)+\mathrm{J}_{m+1}(x)],\quad \mathrm{J}_m'(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{m-1}(x)-\mathrm{J}_{m+1}(x)],$$

如此，(3.5.32)式可以简化为

① polarization 光学中习惯称为偏振，这里我们仍依照电磁学的习惯，称为极化.

$$
\left.\begin{aligned}
E_\rho &= -\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}[\mp \mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\cos m\phi],\\
E_\phi &= -\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}[-\mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\sin m\phi],\\
H_\rho &= -\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}[\mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\sin m\phi],\\
H_\phi &= -\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}[\mp \mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\cos m\phi].
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.33}
$$

线性极化模横向场分量的极化特性需要用直角坐标表示才变得明显，经过柱坐标与直角坐标的下列变换

$$
\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\phi \end{pmatrix},
$$

(3.5.33)式变为

$$
\left.\begin{aligned}
E_x &= -\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}[\mp \mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\cos(m\pm1)\phi],\\
E_y &= -\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}[-\mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\sin(m\pm1)\phi],\\
H_x &= -\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}[\mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\sin(m\pm1)\phi],\\
H_y &= -\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}[\mp \mathrm{J}_{m\pm1}(\kappa\rho)\cos(m\pm1)\phi].
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.34}
$$

现在，由(3.5.34)式出发，将 $\mathrm{EH}_m(m=l-1)$ 模和 $\mathrm{HE}_m(m=l+1)$ 模的场叠加，合成模的横向分量场就显示出线性极化特征. 例如，EH_m 与 HE_m 相加：

$$
\left.\begin{aligned}
(E_y)_{\mathrm{EH}_{l-1}} + (E_y)_{\mathrm{HE}_{l+1}} &= 2\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}\mathrm{J}_l(\kappa\rho)\sin l\phi,\\
(H_x)_{\mathrm{EH}_{l-1}} + (H_x)_{\mathrm{HE}_{l+1}} &= -2\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}\mathrm{J}_l(\kappa\rho)\sin l\phi,\\
(E_x)_{\mathrm{EH}_{l-1}} + (E_x)_{\mathrm{HE}_{l+1}} &= (H_y)_{\mathrm{EH}_{l-1}} + (H_y)_{\mathrm{HE}_{l+1}} = 0.
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.35}
$$

这个模式称为 LP_l 模，它的纵向场分量为

$$
\left.\begin{aligned}
(E_z)_{\mathrm{LP}_l} &= A[\mathrm{J}_{l-1}(\kappa\rho)\cos(l-1)\phi + \mathrm{J}_{l+1}(\kappa\rho)\cos(l+1)\phi],\\
(H_z)_{\mathrm{LP}_l} &= -\frac{A\beta}{\omega\mu_0}[\mathrm{J}_{l-1}(\kappa\rho)\sin(l-1)\phi - \mathrm{J}_{l+1}(\kappa\rho)\sin(l+1)\phi].
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.36}
$$

比较 LP_l 模式场的纵向分量的幅值，我们有

$$
\left|\frac{E_z}{E_y}\right| \sim \left|\frac{H_z}{H_x}\right| \sim \frac{\kappa}{\beta}.
$$

因为 $\kappa^2=k_0^2n_1^2-\beta^2$，在 $\Delta\to0$ 的极限下已可以将 β^2 取作 $\beta^2=k_0^2n_1^2$，所以 $\kappa\ll\beta$. 由上式便有 $|E_z|/|E_y|\sim|H_z|/|H_x|\ll1$，也就是说，$\mathrm{LP}_l$ 模的纵向场分量与横向场

分量比较可以忽略. 这样，LP_l 模的性质就变得与线极化平面波十分相似，是一个近于 TEM 型的模式，线性极化模由此得名.

如果以 $EH_m(m=l-1)$ 和 $HE_m(m=l+1)$ 之差构成 LP_l 模，得如下的横向场分量：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 2\mathrm{j}\,\frac{A\beta}{\kappa}\mathrm{J}_l(\kappa\rho)\cos l\phi, \\ H_y &= 2\mathrm{j}\,\frac{A\omega\varepsilon_1}{\kappa}\mathrm{J}_l(\kappa\rho)\cos l\phi, \\ E_y &= H_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.5.37}$$

场的横向分量仍然与线极化平面波相似，但现在极化方向转过了 $\pi/2$，是一个与模式(3.5.35)极化正交的简并模式. 因此，LP 模是至少具有 2 重极化简并的模式.

以上导出的 LP_l 模式的场分量表达式是以纵向场分量(3.5.3)式为出发点. 当 $m\neq 0$ 时纵向场分量的三角函数还有另一组选择，就还会导致另外的两个 LP 模，$m\neq 0$ 时的 LP 模为 4 重简并模.

现在，对 LP 模作一小结，表 3.2 按截止波数顺序列出了前 7 个 LP 模及相应的构成模式. 有两点需要解释. 首先，当 $l=1$ 时对应的 EH_m 模 $m=0$，但 EH_m 模要求 $m>0$，此时 TE_{0n}，TM_{0n}模顶替 EH 模，与 HE 模叠加构成 LP_{1n}模. 其次，$l=0$ 时也没有对应的 EH_m 模，此时仅有 HE_1 模，所幸 HE_1 模自身就是线性极化模，无需与 EH 模叠加. HE_1 模的线性极化特性从场的横向分量表示式(3.5.34)立即可以看出，当 $l=0$ 时 $m=1$，在(3.5.34)式中只有 E_x 和 H_y 分量不为零. 如果在场的纵向分量表达式(3.5.3)中选择另一组三角函数，则仅有的非零横向场分量是 E_y 和 H_x，HE_1 模具有 2 重极化简并度. 表 3.2 中传播模式数一栏是指到下一个 LP 模传播截止时的模式数，所以 LP_{01}模(即 HE_{11}模)的传播模式数为 2.

表 3.2 低阶 LP 模及其构成模

LP_{ln} 模	截止条件	$\kappa_c a$	构成模式	传播模式数
LP_{01}	$J_1(k_c a)=0$	0	HE_{11}	2
LP_{11}	$J_0(\kappa_c a)=0$	2.405	$HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}$	6
$LP_{02}; LP_{21}$	$J_1(k_c a)=0$	3.832	$HE_{12}; EH_{11}, HE_{31}$	12
LP_{31}	$J_2(k_c a)=0$	5.136	EH_{21}, HE_{41}	16
LP_{12}	$J_0(k_c a)=0$	5.520	$HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}$	20
LP_{41}	$J_3(k_c a)=0$	6.380	EH_{31}, HE_{51}	24
$LP_{03}; LP_{22}$	$J_1(k_c a)=0$	7.016	$HE_{13}; EH_{12}, HE_{32}$	30

LP_{01}模是最重要的 LP 模，它是单模光纤的工作模式. 由(3.5.5)式，截止波数

$$\kappa_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}. \tag{3.5.38}$$

所以，LP_{01}模单模工作频率范围由下式确定：

$$0 < f < \frac{2.405}{2\pi a\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}},\tag{3.5.39}$$

因为 $n_1^2-n_2^2=2\Delta n_1^2\to 0$，单模工作频带的上界可达可见光频，甚至更高.

LP 模的线极化特性为模式在光纤中的传输提供了一种控制手段，可以通过波的极化控制波的传播，这对光纤的实际使用有重要意义.

最后需要指出，由 $EH_{l-1,n}$模和 $HE_{l+1,n}$模叠加构成线性极化模只在 $\Delta\to 0$ 条件下才是精确的. 实际上，尽管 Δ 很小，但这两个构成模的传播常数 β_1 和 β_2 仍有小的差别，会形成波拍. 波拍的波长为 $2\pi/(\beta_1-\beta_2)$，每隔这个距离两个构成模才会重新达到同相位而精确地合成为 LP 模. 尽管有此不足，LP 模的概念和场分布表达式已较弱导光纤中的混合模大为简化，对光纤的工程设计和应用很有价值.

3. 传输损耗

尽管在分析光纤中的传播模式特性时可以假定光纤无耗，但是在设计和构造光纤通信系统时传输损耗是一个不可忽略的因素. 实际上限制高数码率数字脉冲在数字式线性光纤通信系统中长距离传输的两个主要因素便是色散和损耗. 损耗造成脉冲幅度衰减、脉宽加宽，是限制信号脉冲无中继放大传输上限距离的主要因素. 光纤传输的基本理论在 20 世纪 70 年代初期已经成熟，但当时实用的光纤通信系统还只处在研究的进程中，除了与光源有关的技术问题未能完全解决外，传输损耗过高是一个主要障碍. 直到 70 年代后期采用了改进的化学蒸发沉积制作技术，使工作波长 0.82 μm 的多模光纤的传输损耗从每 km 数十 dB 降到 2.5 dB/km，并进而制成了工作波长 1.3 μm 和 1.55 μm 的红外波段单模光纤，损耗降低到分别约 0.40 dB/km 和 0.25 dB/km 的水平，光纤通信系统才达到可实际推广应用的阶段. 目前达到的线性 SiO_2 光纤损耗与波长的关系见图 3.14.

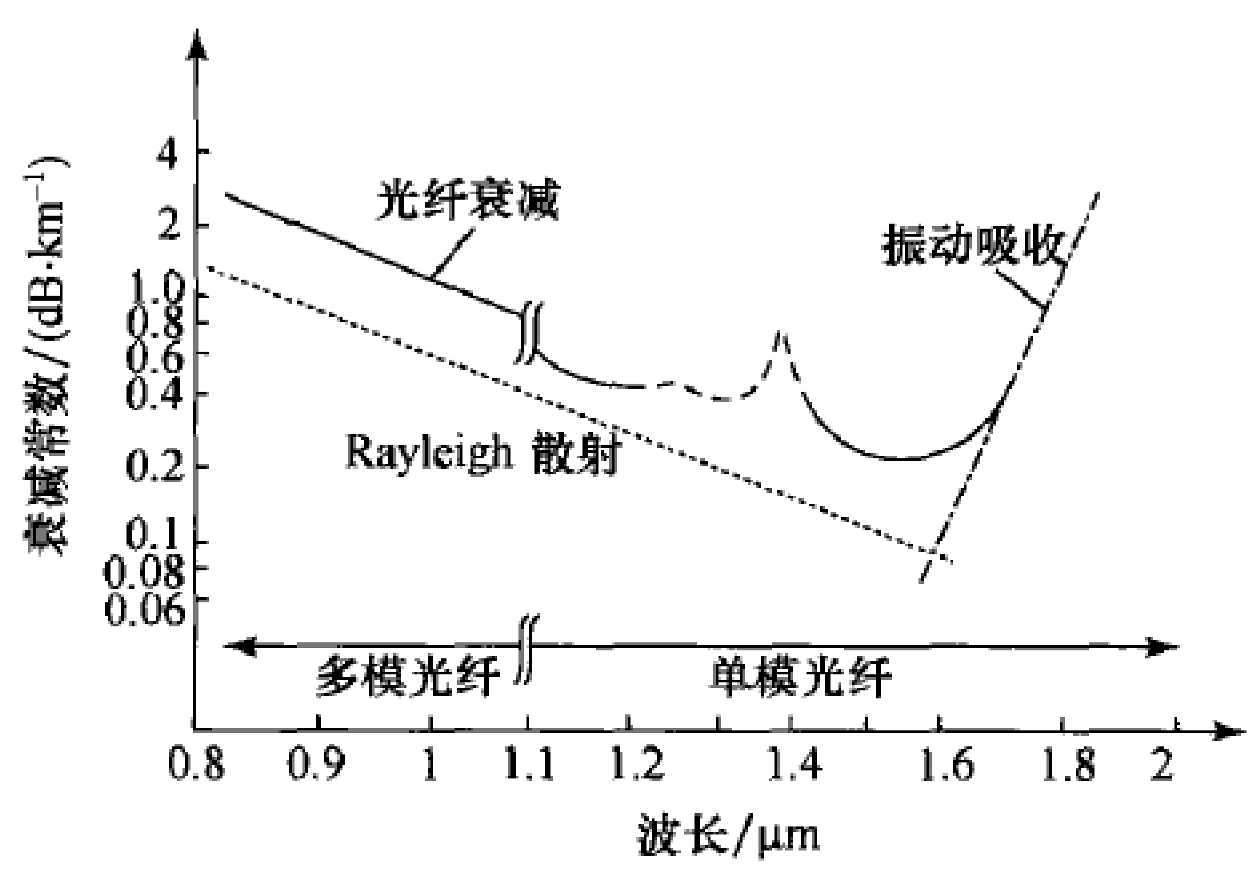


图 3.14　石英光纤的损耗与波长的关系

现在使用的光纤，其芯材料为非晶态的熔凝石英（纯 SiO_2），在芯半径不过小和光脉冲幅度不过高的条件下 SiO_2 的介电常数值保持常数，不随场强值变化，称为 SiO_2 线性光纤. 产生光纤传输损耗的主要原因是由光纤的芯材料引起的，包括：

（1）材料的本征吸收

这是由 SiO_2 的能级结构和分子振动谱决定的. 处于低能级的电子吸收能量跃迁至高能态为材料吸收光能的基本机构，有幸 SiO_2 的吸收谱落在紫外光波段，处在光纤的红外至可见光工作波段之外. 但 SiO_2 的分子振动吸收谱在红外波段，成为对 SiO_2 光纤工作波长选择的制约因素之一，图 3.14 长波长端的渐近线示出了这个限制.

（2）杂质的吸收

由光纤材料中的杂质的本征吸收导致光能损失. 杂质中有最严重影响的是 OH^- 离子，由于使用化学蒸发沉积方法制作，水分子是难以完全消除的杂质. OH^- 离子的本征吸收波长为 0.95 μm，1.24 μm 和 1.38 μm，完全处于光纤的工作波长范围内，图 3.14 中出现的两个吸收峰与后两个本征吸收波长对应，须选择光纤系统的工作波长避开这两个吸收峰.

（3）Rayleigh 散射

由材料密度的微不均匀性引起，例如存在过密点或气泡等，它们的尺度远小于波长，光波在其上的散射属于 Rayleigh 散射（见 § 5.2）. 图 3.14 短波长端的渐近线为 Rayleigh 散射导致的损耗.

Rayleigh 散射渐近线与分子振动渐近线的交点确定最低损耗的理论极限值，约为 0.1 dB/km. 由图可见，SiO_2 光纤在波长 1.55 μm 处损耗最低，约 0.2 dB/km，已接近理论极限值. 用单模光纤构造的干线光通信系统无中继传输距离可达 100 km 以上，以此为基础形成了今日的全球互联网系统.

还存在其他非材料因素引起的损耗，如：（1）光纤弯曲产生的辐射；（2）光纤的漏模辐射；（3）光纤的横截面偏离圆形，例如呈现轻微椭圆度，致使传输模式的部分功率转移到其他模式.

由于进一步降低损耗的可能性已经不大，色散便成为 SiO_2 线性光纤系统性能提高的主要障碍.

4. 多模光纤的色散

Gloge 在弱导条件下求解严格的色散方程（3.5.14），以期得到各个模式的色散特性. 为使求解简化，他引入两个归一化参数①，其一称为归一化频率，定义为

$$V^2 = (ha)^2 + (\kappa a)^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2), \qquad (3.5.40)$$

① 见本节第 1 小节脚注所引 Gloge1971 年的论文.

这个量出现于(3.5.14)式右侧的分子中.在弱导条件下近似有

$$V = ak_0 n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5.40a}$$

当 $h=0$ 时模式传输截止,归一化频率取截止值 $V_c=\kappa_c a$. 例如,对于 LP_{11} 模,$\kappa_c a=2.405$,

$$V_c = ak_0 n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi a}{\lambda_c} n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}} = 2.405, \tag{3.5.40b}$$

λ_c 为 LP_{11} 模的截止波长,$\lambda_c = 2\pi a n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}}/2.405$,这就是单模工作的波长下限值.

另一归一化参数称为归一化传输常数,定义为

$$b = \frac{h^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{\beta^2/k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - \left(\frac{\kappa a}{V}\right)^2. \tag{3.5.41}$$

在弱导条件下 $n_1, n_2, \beta/k_0$ 十分接近,近似有

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2}, \tag{3.5.41a}$$

由此解出

$$\beta = k_0 n_2 (1 + b\Delta). \tag{3.5.42}$$

因为 $0 \leqslant b \leqslant 1$,弱导条件意味着 $b\Delta \ll 1$. $b=0$ 对应于传播近截止,绝大部分光能在包层中,波速由 n_2 决定. $b=1$ 对应于远离截止,光能集中于芯,波速由 n_1 决定.

可以假定 $\partial n_1/\partial k_0 = \partial n_2/\partial k_0$,$\partial\Delta/\partial k_0 = 0$,考虑到 $b\Delta \ll 1$,由(3.5.42)式得每单位距离群时延的近似式:

$$\tau_0 = \left.\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial k_0} = \frac{1}{c}\left(n_2 + k_0 \frac{\partial n_2}{\partial k_0}\right) + \frac{n_2\Delta}{c}\frac{\partial(Vb)}{\partial V}. \tag{3.5.43}$$

上式的右侧第一项为材料的介质常数随频率变化导致的色散,称为材料色散.对于不同模式,b 作为 V 的函数不同,第二项表示各个模式的色散,称为模式色散,在多模光纤中这一项远大于材料色散项. Gloge 计算的各个 LP 模式的 b-V 曲线在图 3.15 中示出,曲线圆圈中的数字表示 LP 模的标号 ln.

在多模传输情况下,对于设定的载频,高次模式已接近截止,但低次模式远离截止.容易用射线方法近似估计不同模式的群时延离散程度.设从原点开始传播距离为 L,沿轴传播的射线时延最短,为 $(n_1/c)L$;与轴线形成最大允许入射角的射线行程最长,时延为 $(n_1/c)(L/\sin\theta_c) = (n_1/c)(n_1/n_2)L$. 两者之差除以 L 用 $\Delta\tau_0$ 表示:

$$\Delta\tau_0 = \frac{(n_1/c)(n_1 - n_2)}{n_2} = \frac{n_1}{c}\frac{n_1}{n_2}\Delta, \tag{3.5.44}$$

这个量称为单位距离的模式间群时延,它与 Δ 成正比.

(3.5.43)和(3.5.44)式说明,即使多模光纤也要求 Δ 很小,以减小模式间

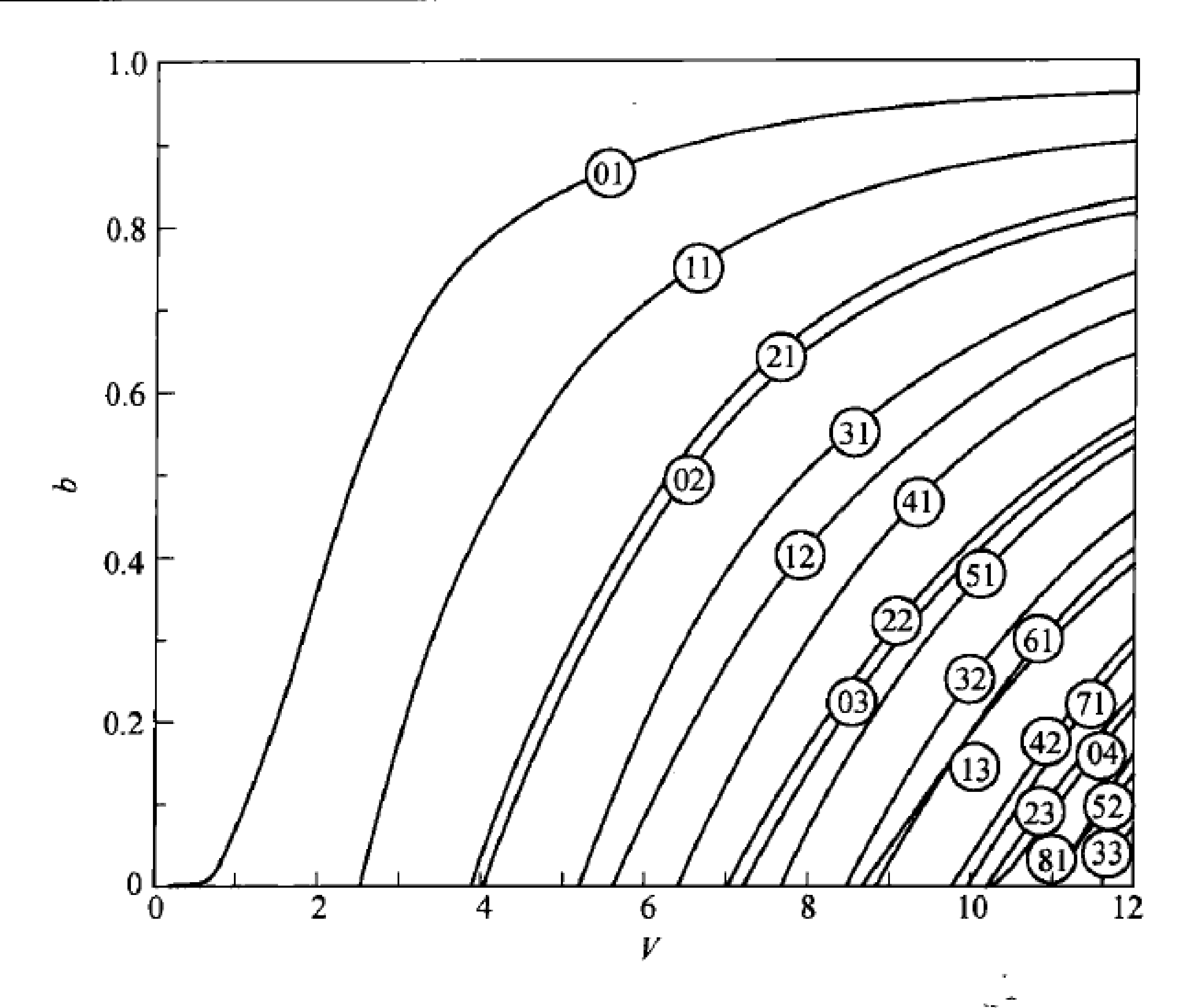


图 3.15 多模光纤 LP 模的 b-V 曲线

群时延. 例如 $n_1=1.48$, $n_2=1.46$, $\Delta=0.0135$, 工作波长 $\lambda_0=0.82\ \mu\text{m}$, 如果取直径为多模光纤的典型值 $2a=50\ \mu\text{m}$, 计算出 $V=46.85$, 用近似公式 $N=\frac{1}{2}V^2$ 计算出可传播的模式数 $N=1085$.

数值孔径(numerical aperture)是多模光纤的一个重要参量,用 NA 表示,它表示光纤收纳进入其中的光线的能力. NA 定义为当进入芯的射线以全内反射的临界角投射到芯与包层的分界面上时,在芯的外端面上的最大允许入射角的正弦值,见图 3.16. 运用 Snell 定律得

$$\text{NA} = n_1\cos\left[\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right] = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5.45}$$

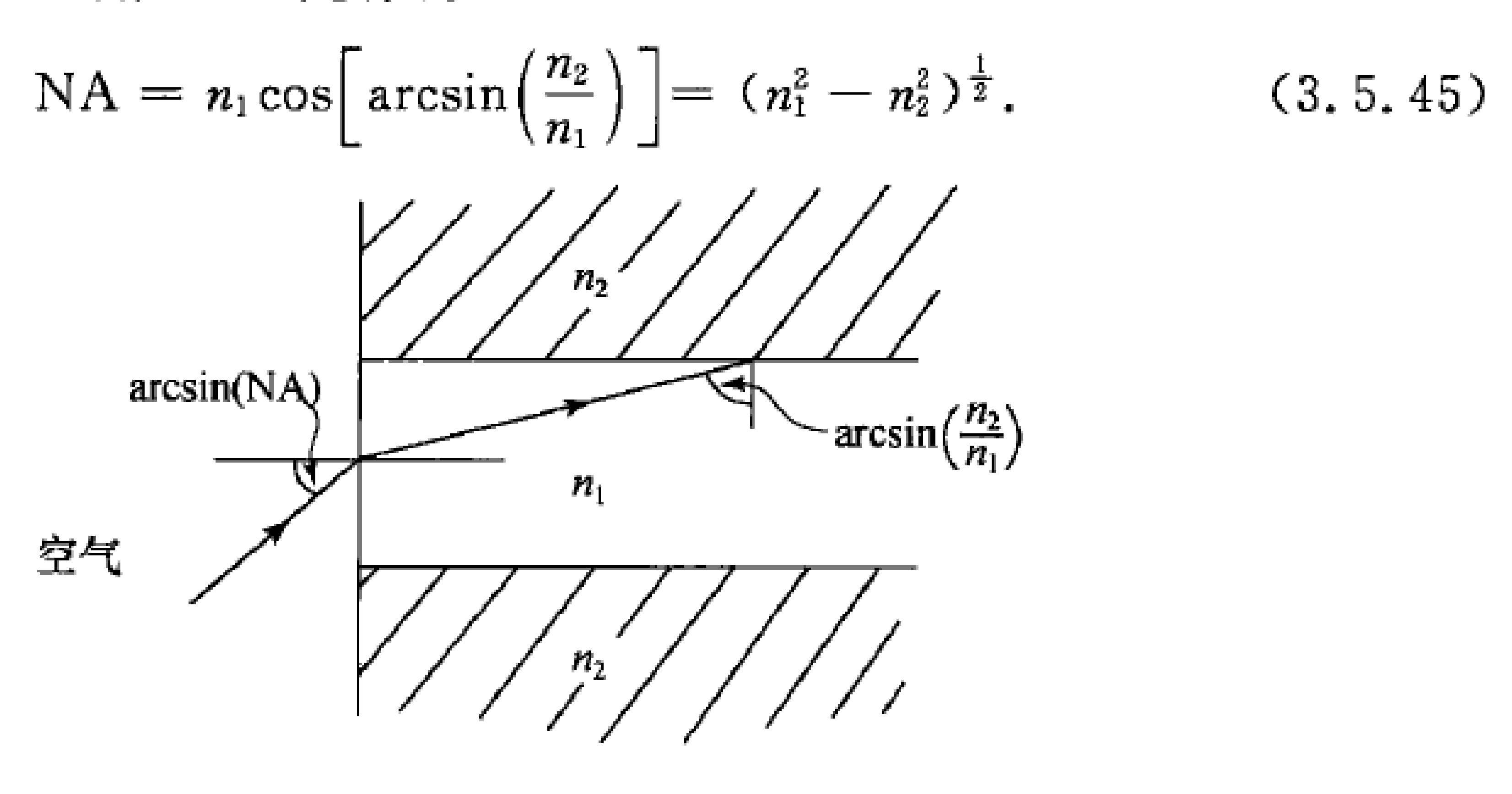


图 3.16 光纤的数值孔径

5. 单模光纤的色散

在单模光纤中只有基模传输,不存在模式间色散,但色散仍然存在.除了作为导波模所必然有的波导色散外,材料色散成为主要因素.因为工作波长的选择已经避开了杂质的吸收谱,材料色散完全由芯材料 SiO_2 决定. SiO_2 的光学色散可以用 Sellmeier 方程(2.1.17)计算,为阅读方便这里将它重新写出:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_i B_i \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \tag{3.5.46}$$

λ_i 及常数 B_i 通过实验测量确定.在上式的求和中通常取 3 项就可得到相当精确的结果.取 3 项时 SiO_2 的谐振波长 λ_i 和常数 B_i 分别为:$\lambda_1 = 0.0684\ \mu m$,$B_1 = 0.6962$,$\lambda_2 = 0.1162\ \mu m$,$B_2 = 0.4079$,$\lambda_3 = 9.896\ \mu m$,$B_3 = 0.8975$. λ_1 和 λ_2 处于紫外波段,为电子的谐振吸收;λ_3 在红外波段,是离子的谐振吸收.以 SiO_2 为主要成分的其他光纤材料的 λ_i 和 B_i 值可在[10]的表 7.3(pp.244—245)中找到.用(3.5.46)计算的芯材料 SiO_2 和包层材料(构成为 96% SiO_2 + 4% GeO_2)的色散曲线见图 3.17.由图可见,SiO_2 的零色散波长为 1.27 μm.图 3.17 的纵坐标 D 为(3.1.74)式定义的色散参量.

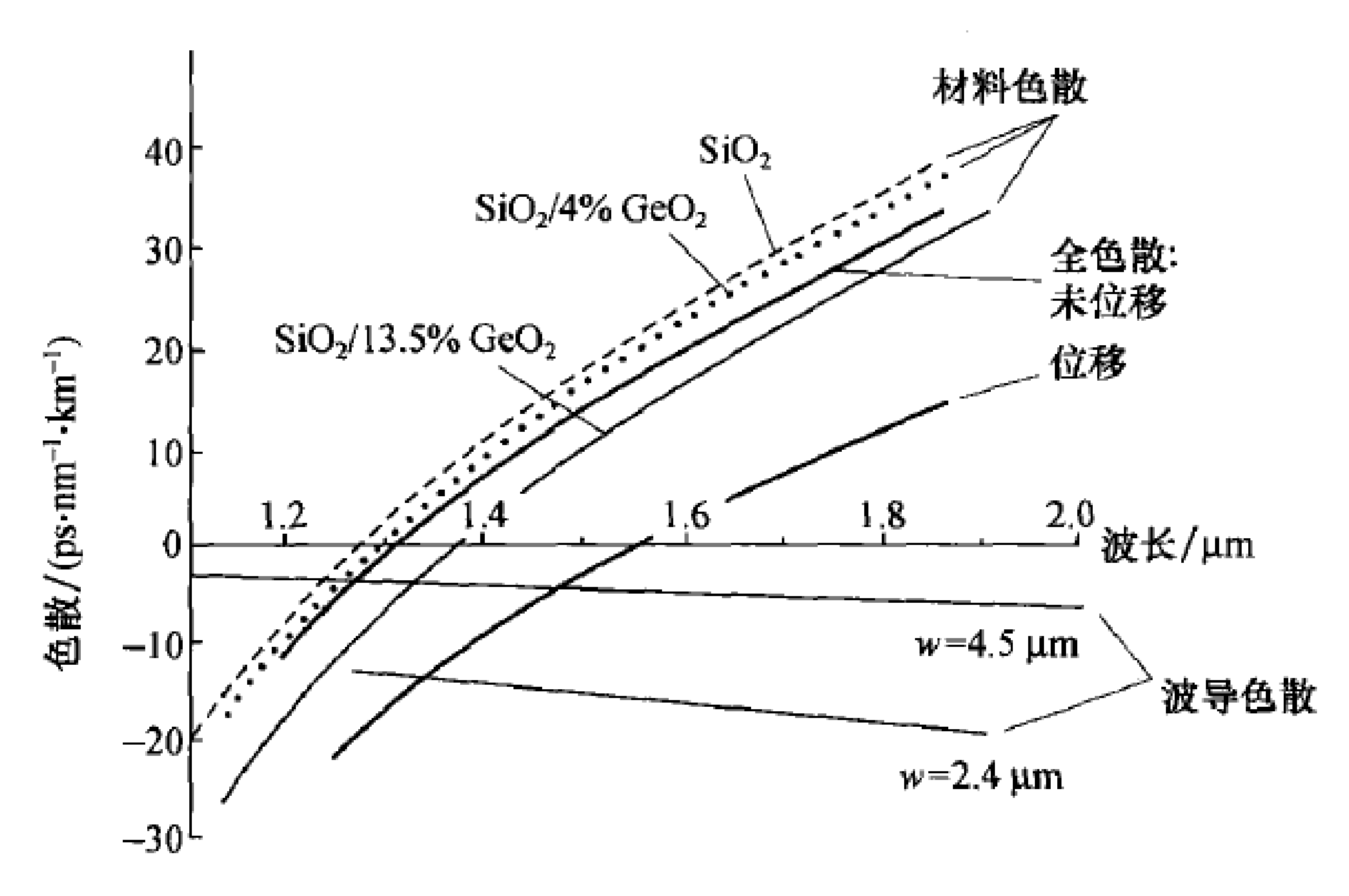


图 3.17 单模光纤的色散—波长关系

图 3.17 也示出了基模作为导波模式的模式色散,称为波导色散,w 为光纤模式场的有效半径(见下一小节),它与芯的半径近似相等.由图可见,波导色散为负值,随芯直径的减小波导色散增强.材料色散与波导色散之和为全色散,图中的粗实线为 SiO_2 材料色散与 $w = 4.5\ \mu m$ 时的波导色散之和,即全色散.由于加上波导色散,全色散曲线相对于材料色散曲线向右移,零色散波长变为1.31 μm.可见,通过改变芯直径可以移动材料色散曲线.很希望通过这种移动将零色散波

长移到 1.55 μm，以实现零色散与最低损耗二者兼得. 由图可见，当 w 减小到 2.4 μm 时实现了所希望的色散曲线移动，这种光纤称为色散位移光纤.

由于色散，光脉冲的各个 Fourier 频谱分量的传输常数 β 不同. 将 $\beta(\omega)$ 在脉冲载频 ω_0 附近展开成 Taylor 级数得

$$\beta(\omega)-\beta(\omega_0)=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\bigg|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2$$
$$+\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}\omega^3}\bigg|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^3+\cdots. \tag{3.5.47}$$

在 § 3.1 中讨论脉冲在波导中传播时我们已经知道仅当 $\ddot{\beta}_0$ 及其以上的高阶微商项为零时脉冲才能在以群速度 v_g 传播时保持其包络形状不变，否则由于包络的各个频率分量 v_g 不同会在传播过程中畸变. 群速度与频率分量有关的现象称为群速度色散，简称为群色散. 由(3.5.47)式可见，右侧的第 2 项及其后的高次项引起群色散，起主要作用的是第 2 项，这个 $\ddot{\beta}_0$ 项称为一阶色散项，下一项 $\dddot{\beta}_0$ 称为二阶色散项，其余类推. 当一阶色散项不为零时，二阶及高阶色散项通常可以略去，(3.5.47)式右侧的展开式可以只保留两项.

一阶色散

$$\ddot{\beta}_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)\bigg|_{\omega=\omega_0}=-\frac{1}{v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}, \tag{3.5.48}$$

而色散参量 D 与 $\ddot{\beta}_0$ 成正比：

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)\bigg|_{\omega=\omega_0}=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\ddot{\beta}_0, \tag{3.5.49}$$

λ 为频率 ω 相应的波长. 图 3.17 示出的是 D(ps/(nm · km))与 λ(μm)的关系. 按照光学的习惯将群色散区分为正常色散和反常色散：

$$\text{正常色散}\quad \frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}<0,\ \ddot{\beta}>0,\ D<0;$$

$$\text{反常色散}\quad \frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}>0,\ \ddot{\beta}<0,\ D>0.$$

由图 3.17 可见，当 1.31 μm 零色散光纤工作于 1.55 μm 最小损耗波长时，$D>0$，其工作区呈反常色散.

6. 单模光纤中的光孤子[12]

以上我们看到，单模光纤的直径须限制在数个微米的量级，当光脉冲携带的功率足够大时单模光纤中的电场强度会达到折射率的非线性效应不可忽略的程度，此时单模光纤中存在着维系光孤子传播的条件. 早在 1973 年，Hasegawa 和

Tappert 就从理论上研究了这种可能性①. 什么是光孤子,为什么单模光纤中存在着形成和传播光孤子的条件,下面就来解释.

可通过引入模式场的有效横截面积 A_{eff} 对单模光纤的工作模式 LP_{01} 的横向场作平均,然后将横向场近似看作线极化平面波. 因为在芯和包层中场的径向分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}J_0(\kappa\rho), & \rho\leqslant a,\\ \left(\dfrac{a}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}J_0(\kappa a)\exp[-h(\rho-a)], & \rho\geqslant a,\end{cases} \tag{3.5.50}$$

这个分布函数很接近 Gauss 分布函数[11]

$$F(x,y)=\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w}\right], \tag{3.5.50a}$$

Gauss 束半宽 w 可视为模式场的有效半径. 由于单模光纤的工作频率 V 通常选择得接近于其截止值 $V_c=2.405$,可以认为 w 接近芯半径 a. 在此平面波近似下可以认为 LP_{01} 模的横向电场 E 满足标量波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(n^2E), \tag{3.5.51}$$

n 为 SiO_2 的光学折射率.

在强外电场中,电介质的宏观电极化与外场的关系不再是线性的,$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 呈现复杂的关系,通常将 $\boldsymbol{P}$ 展开成 $\boldsymbol{E}$ 的幂级数,$\boldsymbol{E}$ 的各次幂的系数分别称为相应阶的极化率(张量). 一阶极化率(标量)为线性极化率,二阶和高阶极化率(张量)为非线性极化率. 具有中心对称性的晶体(SiO_2 的分子结构属于此类型)的二阶极化率张量为零,其非线性极化率的首项为三阶极化率. 略去四阶及其以上各阶极化率,宏观电极化现在写作

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{(1)}+\boldsymbol{P}^{(3)}=\varepsilon\boldsymbol{\chi}^{(1)}\cdot\mathrm{E}+\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(3)}\vdots\boldsymbol{EEE}. \tag{3.5.52}$$

由于二次光电效应源于三阶极化率,它又称为 Kerr 效应,(3.5.52)表示的非线性极化称为 Kerr 型非线性极化. 这样,光纤材料的介电常数 ε 就由下式确定:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(3)}\vdots\boldsymbol{EEE}. \tag{3.5.53}$$

损耗存在时 ε 是复数,损耗主要来源于 $\boldsymbol{\chi}^{(1)}$. 以 $n(\omega)$ 表示光学折射率,在仅有三阶非线性极化的情况下,若电场为单一极化方向(设为 x 方向),$n(\omega)$ 可写作

$$n(\omega)=n_0(\omega)+n_2(\omega)|E|^2, \tag{3.5.54}$$

$n_0(\omega)$ 为由 $\chi_{xx}^{(1)}$ 的实部确定的线性折射率,$n_2(\omega)|E|^2$ 为由 $\chi_{xxxx}^{(3)}$ 确定的非线性折射率. 设电场为单色场 $E_x=E_0\cos\omega t$,

① A. Hasegawa and F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fiber. I. Anomalous dispersion, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 23, pp. 142—144, 1973.

$$P_x^{(3)} = \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} E_x^3 = \frac{3}{4}\epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |E_0|^2 E_0 \cos\omega t + \frac{1}{4}\epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} E_0^3 \cos 3\omega t.$$

略去三次谐频后将上式代入(3.5.52)式，再与(3.5.54)式比较便得

$$n_2(\omega) = \frac{3}{8n_0(\omega)}\chi_{xxxx}^{(3)}. \qquad (3.5.55)$$

SiO_2 的非线性折射率 n_2 的实验测量值为 $n_2=6.1\times10^{-22}(\mathrm{V/m})^{-2}$，$n_2$ 取此值时(3.5.54)式中的 $|E|^2$ 表示电场强度的峰值①.

载频调制后形成的光脉冲电场

$$E(z,t) = \phi(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t-\beta_0 z)}, \qquad (3.5.56)$$

ω_0，β_0 分别为载频及其传输常数，包络 $\phi(z,t)$ 为慢变函数，这里已将电场分量的下脚标 x 略去不写. 将上式代入标量波动方程(3.5.51)，略去 $\phi(z,t)$ 对 z 和 t 的二阶微商并考虑到 n_2 的小量级，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} + \dot{\beta}_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\mathrm{j}\,\frac{n_2}{n_0}\beta_0|\phi|^2\phi, \qquad (3.5.57)$$

式中 $\beta_0=n_0(\omega_0)\omega_0/c$，$\dot{\beta}_0=\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega|_{\omega=\omega_0}=n_0(\omega_0)/c=v_g^{-1}$，在求 $\dot{\beta}_0$ 时暂时略去了色散.

再来看色散的影响. 将脉冲(3.5.56)展开为

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}\mathrm{d}\omega, \qquad (3.5.58)$$

将 $\beta(\omega)$ 的 Taylor 展开式

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \dot{\beta}_0(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_0(\omega-\omega_0)^2 + \cdots \qquad (3.5.59)$$

代入上式得

$$\phi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\nu)\exp\{\mathrm{j}[(t-\dot{\beta}_0 z)\nu - \frac{1}{2}\ddot{\beta}_0 z\nu^2]\}\mathrm{d}\nu, \qquad (3.5.60)$$

其中 $\nu=\omega-\omega_0$，可证上式的 $\phi(z,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} + \dot{\beta}_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{j}\ddot{\beta}_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}. \qquad (3.5.61)$$

方程(3.5.61)和方程(3.5.57)的左侧相同，左侧的两项之和表示以群速度 $v_g=(\dot{\beta}_0)^{-1}$沿 z 方向运动的形状任意的脉冲

$$\phi(z,t) = f(t-z/v_g). \qquad (3.5.62)$$

以上在只考虑非线性折射率和只考虑色散的条件下分别导出了脉冲包络满足的方程式(3.5.57)和(3.5.61)，这两个方程式的左侧相同. 当这两种效应均为弱效应而同时存在时，可以将这两个方程式的右侧相加，而得到两种效应同时存

① 数据来源：R. H. Stolen and C. Lin, Self-phase-modulation in silica optical fibers, *Phys. Rev. A*, vol. 17, no. 14, pp. 1448—1453, 1978.

在时脉冲包络满足的方程式:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}+\dot{\beta}_0\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{j}\ddot{\beta}_0\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\mathrm{j}\frac{n_2}{n_0}\beta_0|\phi|^2\phi. \tag{3.5.63}$$

引入归一化变量

$$\tau=\frac{T}{T_0}=\frac{1}{T_0}\left(t-\frac{z}{v_g}\right),\quad \xi=\frac{|\ddot{\beta}_0|}{T_0^2}z \tag{3.5.64}$$

和新的脉冲包络函数

$$u(\xi,\tau)=T_0\left[\frac{n_2\beta_0}{n_0|\ddot{\beta}_0|}\right]^{\frac{1}{2}}\phi(z,t), \tag{3.5.65}$$

方程(3.5.63)便化为标准形式的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\ddot{\beta}_0}{|\ddot{\beta}_0|}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-|u|^2u=0. \tag{3.5.66}$$

方程(3.5.66)的最简单的解为

$$\phi(z,t)=\phi_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi}\mathrm{sech}\tau, \tag{3.5.67}$$

其中

$$|\phi_0|^2=-\frac{1}{T_0^2}\frac{n_0}{n_2}\frac{\ddot{\beta}_0}{\beta_0}, \tag{3.5.68}$$

T_0 和 ϕ_0 分别为脉冲包络的 1/e 点半宽度和幅度.在光纤无耗的情况下 T_0 和 ϕ_0 是与 z 无关的常数,解(3.5.67)表示的脉冲包络在传输过程中保持其形状和脉宽以及幅度不变.因为(3.5.67)是方程式(3.5.66)的最简单解,称为一阶包络孤子.这是一种理想的数字信号脉冲,它的传播速度 v_g 与脉冲的幅度无关,脉冲的幅度仅由 T_0,n_2 和 $\ddot{\beta}_0$ 确定.一阶包络孤子的图形在图 3.18 示出,图中的 T_b 为半功率点全脉宽.

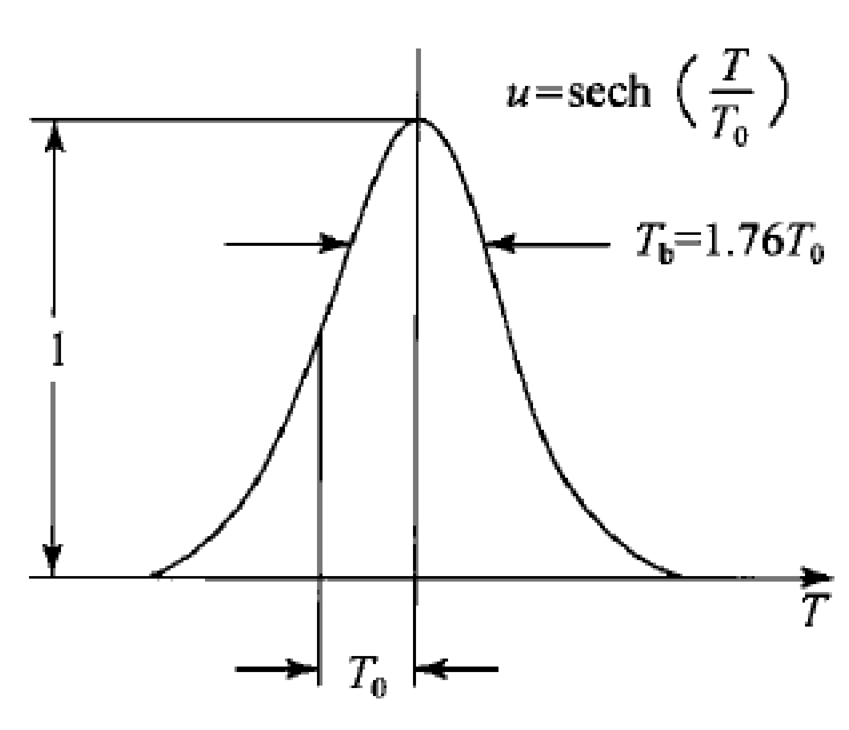


图 3.18 一阶包络孤子

由(3.5.68)式,只有当 $\ddot{\beta}_0/n_2<0$ 时才可能有一阶孤子解,因为 $n_2>0$,就要求 $\ddot{\beta}_0<0$,即需要有反常色散.可见,一阶光孤子是光纤中的非线性折射率和反常色散对于脉冲的压缩和扩散作用达到平衡的产物.当工作波长 $\lambda>\lambda_c=1.31\ \mu\mathrm{m}$ 时,SiO_2 光纤为反常色散,如果选择工作波长 $\lambda=1.55\ \mu\mathrm{m}$,便具备形成一阶光孤子的条件,但须光脉冲足够强.

为平衡色散对脉冲的影响,就要求有足够强的脉冲电场强度以产生适量的非线性折射率,(3.5.68)式的一阶光孤子幅度反映了这一要求.由(3.5.68)式计算出一阶光孤子携带的能量 W 和峰值功率 P_0 分别为

$$W=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A_{\text{eff}}\,\frac{n_0^2}{n_2}\,\frac{|\ddot{\beta}_0|}{\beta_0 T_0},\tag{3.5.69}$$

$$P_0=\frac{W}{2T_0}.\tag{3.5.70}$$

(3.5.69)式说明孤子携带的能量与脉宽的乘积是常数，脉宽越窄，色散引起的脉冲扩散越严重，就要求更高的非线性折射率，以维持平衡.

一阶光孤子的脉宽为 ps 量级，由于克服了色散的限制，可实现高比特率的远距离传输. 但光孤子的传输仍然受到损耗的影响. 在小损耗下光孤子在传输中仍可保持能量与脉宽的乘积不变，但能量的损耗将导致脉宽加宽，需要用光学方法向脉冲补充能量，以保持其脉宽和幅度. 美国 Bell 实验室的 Mollenauer 等人于 1980 年首次在 700 m 长的光纤线路上实验观察到光孤子的传输①. 在 1990 年后光学方法对光孤子补充能量的技术问题获得解决，实验上已实现 4000～10 000 km 的光孤子远距离传输，数码率达到 10 Gbit/s 量级.

§ 3.6　周期传输结构

1. Floquet 定理和空间谐波[13,14,15]

具有周期性结构参量的导波结构是导波结构中的重要一员，其结构参量的周期性变化大致有两种情形. 一种是结构中的介质常数沿结构的轴线有周期性变化，例如矩形或圆波导中的填充介质，若其介电常数沿波导轴线呈现周期性变化. 另一种是导体边界发生周期性变化，例如圆波导的半径周期性变化，有周期性加载膜片的矩形波导，以及我们下面要具体研究的波纹导体平面和螺旋线等. 后者是有更重要实际应用的周期传输结构.

沿周期结构传播的波称为 Bloch 波，源于量子物理中 Bloch 对三维晶格中电子波的研究. 正如法国物理学家 L. Brillouin 在他的经典著作[13]的序言中所指出的，波的行为方式总是相似的，不论是纵波还是横波，弹性波还是电波，它们具有共同的数学基础. 美籍瑞士裔物理学家 F. Bloch 对于三维晶格的周期势中电子波的波方程导出的解(1928)(亦称为 Bloch 定理)可以追溯到法国数学家 G. Floquet 对具有周期性系数的一维波方程(现称为 Mathieu 方程)给出的解(1883)，它构成了在周期结构中传播的波问题的数学基础，现在知道这个解也适用于具有周期性边界条件的波方程，通称为 Floquet 定理. 对于在周期结构中传

① L. F. Mollenauer, R. H. Stolen and J. P. Gordon, Experimental observation of pico-second pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, no. 13, pp. 1095—1098, 1980.

播的导波,Floquet 定理可表述如下:在一给定的稳态频率,一个确定的传播的给定横截面场分布与距它为一空间周期处的横截面场分布只相差一复常数乘子.这个定理对于周期性结构均成立,不论损耗是否存在.

以下的物理观察可以作为论证 Floquet 定理的依据:当周期结构为无穷长时,该结构沿其轴线移动一个周期后不能与原来的结构区别.对于电磁导波的传播,可具体证明如下.在周期结构中沿 z 轴方向传播的导波的电场可写作

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\tag{3.6.1}$$

γ 为复数,场的空间分布 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)$ 应是 z 的以 L 为周期的函数.在 z 轴上取两点 z_1 和 $z_2=z_1+L$,根据式(3.6.1)这两点的电场应为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z_1)\mathrm{e}^{-\gamma z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$
$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z_1+L)\mathrm{e}^{-\gamma(z_1+L)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

但是

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z_1)=\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z_1+L),$$

于是有

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_1\mathrm{e}^{-\gamma L},\tag{3.6.2}$$

相距一个周期的两点 z_2 和 z_1 处横截面上的场分布仅相差一个复常数乘子.这便是 Floquet 定理的数学表述.

若周期结构无耗,γ 为纯虚数,

$$\gamma=\mathrm{j}\beta_0,\tag{3.6.3}$$

β_0 为实数.将周期函数 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)$ 展开为 Fourier 级数:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}_n(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi n/L)},\tag{3.6.4}$$

其 Fourier 系数

$$\boldsymbol{E}_n(x,y)=\frac{1}{L}\int_{z_1}^{z_1+L}\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi n/L)}\mathrm{d}z.\tag{3.6.5}$$

展开式(3.6.4)可以写成简洁的形式

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}_n(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_n z},\tag{3.6.4a}$$

求和式中的第 n 次分量称为第 n 次空间谐波,其传输常数为

$$\beta_n=\beta_0+2\pi n/L.\tag{3.6.6}$$

空间谐波又称为 Hartree 谐波.

存在空间谐波是周期结构的重要特征,空间谐波具有以下物理特性.首先来看波相速,第 n 次空间谐波的相速

$$v_{\mathrm{p}n}=\frac{\omega}{\beta_n}=\frac{\omega}{\beta_0+2n\pi/L},\tag{3.6.7}$$

因为 n 可以取负整数，v_{pn} 可以取负值，而且不同阶次的空间谐波相速不同. 但所有各次空间谐波的群速度全相同：

$$v_{gn}=\frac{d\omega}{d\beta_n}=\left(\frac{d\beta_n}{d\omega}\right)^{-1}=\left(\frac{d\beta_0}{d\omega}\right)^{-1}=v_{g0}. \qquad (3.6.8)$$

因此，有一些空间谐波的相速度方向与群速度方向相反，这样的波称为返波. 我们在 §2.6 中也已经遇到了左手媒质中传播的返波.

虽然周期结构中的 Bloch 波可以展开为空间谐波，但所有空间谐波必须同时存在才能满足周期结构的边界条件，也就是说一个单独的空间谐波并不能满足周期结构的边界条件. 所有空间谐波的群速度全相同说明正是空间谐波之和作为一个整体携带着能量传播.

2. 沿波纹导体平面传播的表面波[16]

在 §3.3 中讨论表面波问题时已经指出，当导体表面有周期性皱折而形成电抗性表面时表面电磁波的传播可以维系. 这样的周期性皱折导体平面示于图 3.19. 为使求解简化，假定该结构在 y 方向无限延伸，$\partial/\partial y=0$，我们来讨论沿 z 方向传播的 TM 型表面波. 这种具有周期性皱折的平面在微波工程中习惯地称为波纹面(corrugated plane). 这是我们要讨论的周期结构的第一个例子，也是关于表面波问题的继续讨论.

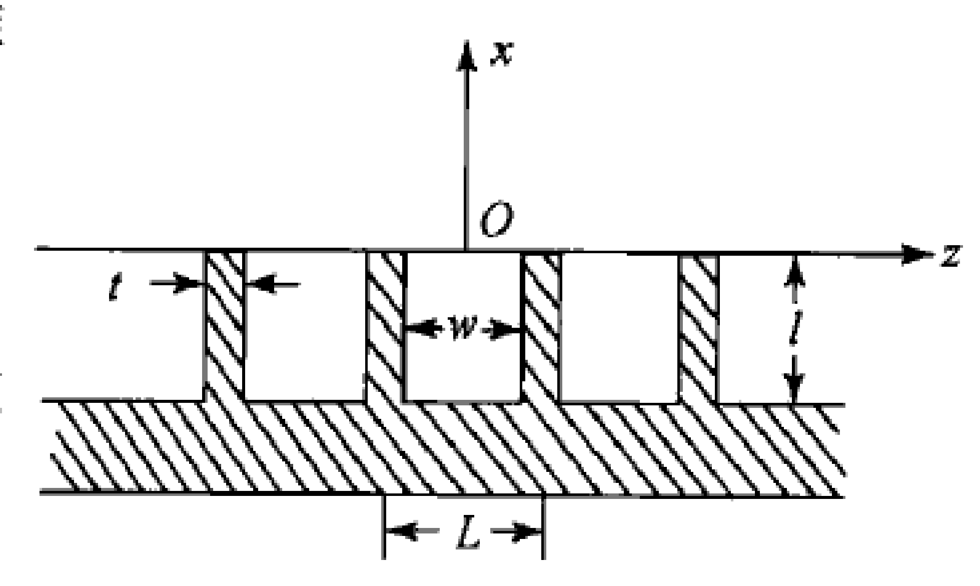


图 3.19 平面波纹导体表面

现在须分为两个区域求解，波纹导体表面($x=0$)以上的自由空间(μ_0,ε_0)为区域 1($x>0$). $x=0$ 面以下为区域 2，设区域 1 中有 TM 型表面波沿 z 方向传播. 图 3.19 坐标系的选取与图 3.8 相同，在那里我们知道 TM 型表面波只有 3 个场分量 E_{x1}，E_{z1} 和 H_{y1}. $\boldsymbol{E}$ 的两个分量可通过 Maxwell 方程的旋度式由 H_{y1} 求出：

$$E_{x1}=\mathrm{j}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}H_{y1},\quad E_{z1}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}H_{y1}. \qquad (3.6.9)$$

而 H_{y1} 须满足 Helmholtz 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_{y1}+k^2H_{y1}=0, \qquad (3.6.10)$$

这里 $k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$.

由 Floquet 定理，$H_{y1}(x,y)$ 可展开为空间谐波之和：

$$H_{y1}(x,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n(x)e^{-j\beta_n z},\quad \beta_n=\beta_0+2n\pi/L. \qquad (3.6.11)$$

为满足波动方程(3.6.10),须有 $f_n(x)\sim e^{j\alpha_n x}$,而且 $\alpha_n^2+\beta_n^2=k^2$. 为得到表面波,α_n 须为纯虚数,$\alpha_n=jh_n(h_n>0)$. 因此,$H_{y1}(x,z)$须写作

$$H_{y1}(x,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n e^{-h_n x}e^{-j\beta_n z}. \tag{3.6.12}$$

由(3.6.9)式可求出

$$E_{z1}(x,z)=j\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n h_n\ e^{-h_n x-j\beta_n z}, \tag{3.6.13}$$

$$E_{x1}(x,z)=\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\beta_n\ e^{-h_n x-j\beta_n z}. \tag{3.6.14}$$

作为切线分量 $E_{z1}(x,z)$需要满足 $x=0$ 面上的边界条件. 对于周期结构,只须考虑满足一个周期之内的边界条件,例如 $-L/2\leqslant z\leqslant L/2$,现在它可以写作

$$E_{z1}(0,z)=\begin{cases}g(z), & |z|<w/2,\\ 0, & w/2<|z|<L/2.\end{cases} \tag{3.6.15}$$

这里 $g(z)$是在齿间隙端面上激起的场分布,为未知函数. 利用空间谐波的正交性质

$$\int_{-L/2}^{L/2}(e^{-j\beta_m z})(e^{-j\beta_n z})^*\,dz=\int_{-L/2}^{L/2}e^{-j(m-n)(2\pi/L)}\,dz=L\delta_{mn},$$

δ_{mn}为 Kronecker δ 符号,以 $\exp(j\beta_n z)$乘(3.6.15)式两侧,在$[-L/2,L/2]$积分,得

$$A_n=-j\frac{\omega\varepsilon_0}{Lh_n}\int_{-w/2}^{w/2}g(z')e^{j\beta_n z'}\,dz'. \tag{3.6.16}$$

上式代入(3.6.12)式得

$$\begin{aligned}H_{y1}(x,z)&=-j\omega\varepsilon_0\int_{-w/2}^{w/2}g(z')\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-h_n x-j\beta_n(z-z')]}{L\,h_n}dz'\\&=-j\omega\varepsilon_0\int_{-w/2}^{w/2}g(z')G_1(x,z;0,z')\,dz'\quad(x>0).\end{aligned} \tag{3.6.17}$$

在后一等式中已将前一等式积分中的级数求和写成 Green 函数的形式:

$$G_1(x,z;0,z')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-h_n x-j\beta_n(z-z')]}{L\,h_n}\quad(x>0). \tag{3.6.18}$$

对于区域 2 中的场,可以将两相邻的齿视为终端短路的平行板波导,设未填充介质. 波导顶端 $x=0$ 面上激励的隙缝场 $g(z)$将在波导中激励 TEM 模和高阶 TM 模. 在间隙中的电场分量须满足边界条件 $E_{x2}|_{z=\pm w/2}=0$ 和 $E_{z2}|_{x=-l}=0$. 满足以上边界条件的 H_{y2}为

$$H_{y2}(x,z)=B_0\cos[k(x+l)]+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\cos\frac{n\pi(z+w/2)}{w}\cos[k_n(x+l)], \tag{3.6.19}$$

等式右侧的第一项为 TEM 模，求和式中的各项为 TM 高次模，$k_n^2+(n\pi/w)^2=k^2(n=1,2,\cdots)$. 由(3.6.9)式求出

$$E_{z2}(x,z)=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon_0}\Big\{-B_0k\sin[k(x+l)]-\sum_{n=1}^{+\infty}B_nk_n\cos\frac{n\pi(z+w/2)}{w}\cdot\sin[k_n(x+l)]\Big\}. \quad (3.6.20)$$

将(3.6.20)置以边界条件(3.6.15)，求得

$$B_0=-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\frac{1}{wk\sin(kl)}\int_{-w/2}^{w/2}g(z')\mathrm{d}z',$$

$$B_n=-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\frac{2}{wk_n\sin(k_nl)}\int_{-w/2}^{w/2}g(z')\cos\frac{n\pi(z'+w/2)}{w}\mathrm{d}z' \quad (n=1,2,\cdots).$$

将 B_0, B_n 代入(3.6.19)式得

$$\begin{aligned}H_{y2}(x,z)=&-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\int_{-w/2}^{w/2}g(z')\Big\{\frac{\cos[k(x+l)]}{wk\sin(kl)}\\&+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos\left[\frac{n\pi(z+w/2)}{w}\right]\cos\left[\frac{n\pi(z'+w/2)}{w}\right]}{wk_n\sin(k_nl)}\cos[k_n(x+l)]\Big\}\mathrm{d}z'\\=&-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\int_{-w/2}^{w/2}g(z')G_2(x,z;0,z')\mathrm{d}z',\end{aligned} \quad (3.6.21)$$

这里

$$G_2(x,z;0,z')=\frac{\cos[k(x+l)]}{wk\sin(kl)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos\left[\frac{n\pi(z+w/2)}{w}\right]\cos\left[\frac{n\pi(z'+w/2)}{w}\right]}{wk_n\sin(k_nl)}\cos[k_n(x+l)] \quad (3.6.22)$$

为区域 2 的 Green 函数.

在两个区域中求出的电磁场切线分量 $E_{z1,2}$ 和 $H_{y1,2}$ 须满足 $x=0$ 面上的连续条件. 因为 E_{z1} 和 E_{z2} 是由同一个间隙场 $g(z)$ 产生的，它们已经满足在 $x=0$ 面上连续的条件. 现在令 $H_{y1}(0,z)=H_{y2}(0,z)$，得

$$\int_{-w/2}^{w/2}g(z')G(0,z;0,z')\mathrm{d}z'=0 \quad (|z|<w/2), \quad (3.6.23)$$

式中

$$G(0,z;0,z')=G_1(0,z;0,z')-G_2(0,z;0,z'). \quad (3.6.24)$$

式(3.6.23)是关于未知间隙场 $g(z)$ 的积分方程，求解这个积分方程可得 $g(z)$ 和 $\beta_n(\omega)$. 但是，这个积分方程不能用解析方法求解，只能用数值解法. 在第四章中我们将会介绍一种求解积分方程的数值解法.

不去求解复杂的积分方程(3.6.23)，运用功率原理会得到未知函数 $g(z)$ 的

另一表达式. 功率原理要求从空间区域 1 通过齿间隙口面进入间隙的功率与从间隙口面向下传送的功率相等,即要求

$$\int_{-w/2}^{w/2} E_{z1}^*(0,z)H_{y1}(0,z)\mathrm{d}z = \int_{-w/2}^{w/2} E_{z2}^*(0,z)H_{y2}(0,z)\mathrm{d}z.$$

因为在间隙口面上 $E_{z1}^*(0,z)=E_{z2}^*(0,z)=g^*(z)$,由上式导致

$$\int_{-w/2}^{w/2}\mathrm{d}z\int_{-w/2}^{w/2} g^*(z)G(0,z;0,z')g(z')\mathrm{d}z' = 0. \tag{3.6.25}$$

乍一看去,此式似乎并不比积分方程(3.6.23)简单,但可以证明(3.6.25)是一变分表示式,可参考[16]的第七章附录. 实际上,Elliott 在他的早期研究中就使用功率原理导出了关于未知的间隙口面场的变分公式①.

由于(3.6.25)式的变分性质,它的解就比较容易得到. 我们可以使用最简单的间隙口面场试探解 $g(z)=\text{const.}$,将它代入(3.6.25)式,得

$$\cot(kl) = \frac{wk}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h_n}\left[\frac{\sin(\beta_n w/2)}{\beta_n w/2}\right]^2, \tag{3.6.26}$$

这是确定 $\beta_n(\omega)$ 的方程式. (3.6.26)式的导出过程表明,在齿间隙中仅 TEM 模有贡献,高次 TM 模并没有贡献.

我们来考察 $x=0$ 面的表面阻抗. 在区域 1 中的场,基波为主要成分,在(3.6.13)和(3.6.12)式中只保留 A_0 项,我们有

$$Z_s = \left.\frac{E_{z1}}{H_{y1}}\right|_{x=0} = \mathrm{j}\,\frac{h_0}{\omega\varepsilon_0} = \mathrm{j}Z_0\,\frac{h_0}{k}, \tag{3.6.27}$$

Z_0 为自由空间波阻抗. 表面波的 h_0 为正,因此维系 TM 型表面波传播时波纹导体面的表面阻抗为电感性的正电抗. 在区域 2 的间隙场(3.6.20)和(3.6.19)式中只取 B_0 项,即 TEM 模,得

$$Z_s = \left.\frac{E_{z2}}{H_{y2}}\right|_{x=0} = \mathrm{j}Z_0\tan(kl), \tag{3.6.28}$$

此式说明,为得到感抗,槽的深度须限制在 $kl<\pi/2$ 的范围内. 但对于 TE 型表面波则要求 $x=0$ 表面为电容性的负电抗,读者可尝试自己作出证明.

因为 $\beta_n^2=k^2+h_n^2$,所以 $|\beta_n|>k$,波相速 $|v_{pn}|=\omega/|\beta_n|<\omega/k$,也就是说各次空间谐波的相速度总是小于相应的介质空间中的光速,为慢波. 这是周期结构中传播的电磁波的一般特征,周期结构的应用与此有关,例如用作慢波电路. 波纹导体平面结构已应用于带电粒子加速器中,与慢波相速同步运动的粒子从波场中汲取能量而获得加速.

沿波纹导体平面传播的表面波已应用于天线,在矩形波导一个宽边的内表

---

① R. S. Elliott, On the theory of corrugated plane surfaces, *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-2, pp. 71—81, 1954.

面刻出波纹，波纹面延伸至波导开口端以外，矩形波导模在波纹面上激励表面波，沿波纹面传播的表面波在其终端形成辐射，成为表面波天线，可参考前面引用的 Elliott 的论文.

3. 螺旋线[15,17]

螺旋线是另一种常用的周期传输结构，用薄导体带或圆截面细丝在圆柱面上绕制而成，用薄带绕制的螺旋线示于图 3.20. 薄带螺旋线几何参量为半径 a，螺距 p 和螺距角 ψ. 螺距角是螺旋带边缘与垂直于螺旋线轴（设为 z 轴）的平面之间的夹角，有如下几何关系



$$\tan\psi = p/2\pi a. \tag{3.6.29}$$

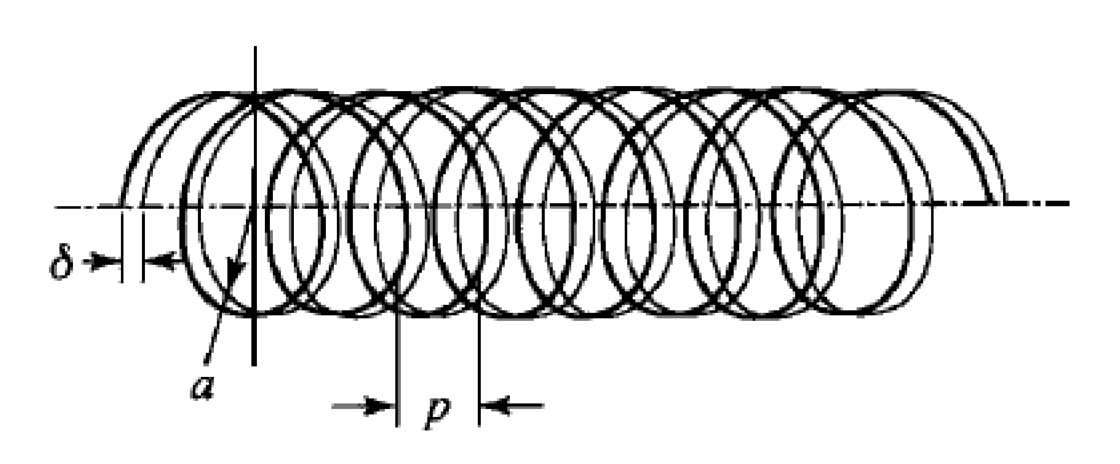


图 3.20　薄带螺旋线

若导体带的轴向宽度为 δ，那么螺旋带之间间隙的轴向宽度为 $p-\delta$. 一般设导体带的厚度为零. 薄带螺旋线虽然结构简单，但对它的严格电磁场分析却相当困难，因为这个半径为 a 的圆柱面不是光滑的导体面，而是周期性地间隔分布着导电和不导电面积. 在研究过程中提出了多种近似方案，最重要的从模型上的简化称为螺旋导面模型（sheath helix），由 J. R. Pierce 提出①. 这个模型设想带的宽度和带间的间隙宽度都缩小为零，由无宽度的细丝密排绕成，圆柱面变得光滑，但电导率呈各向异性：沿螺旋方向 $\sigma_{\parallel}\to\infty$，在与螺旋垂直的方向 $\sigma_{\perp}=0$，如图 3.21 所示.

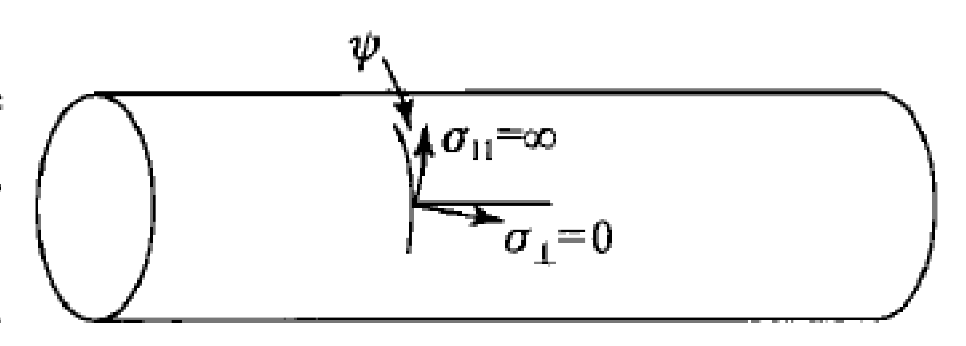


图 3.21　螺旋导面模型

螺旋导面将空间分为两个区域：圆柱面内（$\rho\leqslant a$），区域 1，和圆柱面外（$\rho\geqslant a$），区域 2. 这两个区域的导波场通过 $\rho=a$ 面上的边界条件连接. 在柱面上，由于沿螺旋方向的无穷大电导，切线电场须为零，有

$$E_{z1}\sin\psi + E_{\phi1}\cos\psi = E_{z2}\sin\psi + E_{\phi2}\cos\psi = 0. \tag{3.6.30a}$$

因为垂直于螺旋方向不导电，柱面两侧此方向的切线电场须连续，而得

① 见 J. R. Pierce, Traveling-Wave Tubes, ch. 3, Van Nostrand, 1950.［中译本：《行波管》，吴鸿适、田志仁译，科学出版社，1961.］

$$E_{z1}\cos\psi - E_{\phi1}\sin\psi = E_{z2}\cos\psi - E_{\phi2}\sin\psi. \tag{3.6.30b}$$

在与螺旋垂直的方向没有电流,柱面两侧沿螺旋方向的切线磁场也须连续:

$$H_{z1}\sin\psi + H_{\phi1}\cos\psi = H_{z2}\sin\psi + H_{\phi2}\cos\psi. \tag{3.6.30c}$$

因为 E_ϕ 分量与 H_z 有关,H_ϕ 分量也与 E_z 分量有关,所以这 3 个边界条件(3.6.30a,b,c)将 E_z 和 H_z 耦合,不再能分成 E 模和 H 模,被螺旋导面导引的是 TM 和 TE 的混合模式.

场的纵向分量现在写作

$$E_{z1,2} = E_{z1,2}(\rho,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \quad H_{z1,2} = H_{z1,2}(\rho,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{3.6.31}$$

其横向分布函数满足方程

$$\nabla_t^2\begin{Bmatrix} E_{z1,2}(\rho,\phi) \\ H_{z1,2}(\rho,\phi) \end{Bmatrix} + (k^2-\beta^2)\begin{Bmatrix} E_{z1,2}(\rho,\phi) \\ H_{z1,2}(\rho,\phi) \end{Bmatrix} = 0, \tag{3.6.32}$$

假定在螺旋导面内外均未填充介质,现在 $k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$. 对于慢波,$\beta^2>k^2$,方程(3.6.32)的解为虚宗量的 Bessel 函数与复指数函数的乘积. 令 $h=(\beta^2-k^2)^{\frac{1}{2}}$,$h$ 为正实数,考虑到 $\rho=0$ 和 $\rho\to\infty$ 的边界条件,(3.6.32)的解为

$$\left.\begin{aligned} E_{z1}(\rho,\phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \mathrm{I}_m(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi}, \\ H_{z1}(\rho,\phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \mathrm{I}_m(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi} \end{aligned}\right\} \quad (\rho \leqslant a), \tag{3.6.33a}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z2}(\rho,\phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \mathrm{K}_m(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi}, \\ H_{z2}(\rho,\phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \mathrm{K}_m(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi} \end{aligned}\right\} \quad (\rho \geqslant a), \tag{3.6.33b}$$

这里已将场展开为无穷个可能的模式①之和,A_m, B_m, C_m, D_m 为未知常数.

对于其中的一个模式 m,由(3.6.31)的纵向场求出 $E_{\phi1,2}$ 和 $H_{\phi1,2}$,再代入边界条件(3.6.30a,b,c)得 A_m, B_m, C_m, D_m 四个未知常数的联立方程组,由非零解条件得出确定 h 与 k 关系的如下特征方程:

$$\frac{\mathrm{I}_m'(ha)\mathrm{K}_m'(ha)}{\mathrm{I}_m(ha)\mathrm{K}_m(ha)} = -\frac{(h^2a^2 - m\beta a\cot\psi)^2}{k^2a^2h^2a^2\cot^2\psi}, \tag{3.6.34}$$

式中撇号表示对宗量求微商. 求解方程(3.6.34),再由 $h=(\beta^2-k^2)^{\frac{1}{2}}$ 即可求出 β 作为 ω 的函数,便得到模式 m 的色散特性.

$m=0$ 的模式是最重要的,因为它的场具有轴对称性. 当螺旋线应用于行波

---

① 在本书的第一版中错误地将模式称为空间谐波(见 164,165 页,那里标号用 n). 空间谐波不能独立地满足边界条件,而这里的每个模是独立解,各自满足边界条件,在螺旋导面模型中边界条件并不具有周期性. 在此谨向第一版的读者致歉.

管或返波管作为慢波电路时，这个模式将被具有轴对称性的电子注激励，并与之保持同步相互作用. $m=0$ 模的场分布为

$$\left.\begin{aligned} E_{z1} &= A_0 \mathrm{I}_0(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ E_{\rho 1} &= \frac{\mathrm{j}\beta}{h} A_0 \mathrm{I}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ E_{\phi 1} &= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{h} B_0 \mathrm{I}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z1} &= B_0 \mathrm{I}_0(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{\rho 1} &= \frac{\mathrm{j}\beta}{h} B_0 \mathrm{I}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{\phi 1} &= \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{h} A_0 \mathrm{I}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} \quad (\rho \leqslant a); \right\} \tag{3.6.35a}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z2} &= C_0 \mathrm{K}_0(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ E_{\rho 2} &= -\frac{\mathrm{j}\beta}{h} C_0 \mathrm{K}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ E_{\phi 2} &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{h} D_0 \mathrm{K}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{z2} &= D_0 \mathrm{K}_0(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{\rho 2} &= -\frac{\mathrm{j}\beta}{h} D_0 \mathrm{K}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{\phi 2} &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{h} C_0 \mathrm{K}_1(h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \end{aligned} \quad (\rho \geqslant a). \right\} \tag{3.6.35b}$$

当 $m=0$ 时，特征方程(3.6.34)简化为

$$\frac{\mathrm{K}_1(ha)\mathrm{I}_1(ha)}{\mathrm{K}_0(ha)\mathrm{I}_0(ha)} = \frac{(ha)^2\tan^2\psi}{(ka)^2}. \tag{3.6.36}$$

当 $ha>10$ 时上式左侧的比值 $\mathrm{K}_1\mathrm{I}_1/\mathrm{K}_0\mathrm{I}_0$ 近似为 1，由上式得 $h=k\cot\psi$，而有

$$\beta = (k^2+h^2)^{\frac{1}{2}} = k\csc\psi. \tag{3.6.37}$$

$m=0$ 模的相速度可简单地表示为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{kc}{\beta} = c\sin\psi. \tag{3.6.38}$$

这个结果有很简单的解释：在 $ha>10$ 的参量范围内，$m=0$ 模式的传播可看做是波以光速沿螺旋线传播，沿螺旋运动一匝波在轴线方向前进的距离仅为一个螺距. 当 $\psi=10°,20°,30°$时，v_p/c 作为 ka 的函数示于图 3.22.

当 $m\neq 0$ 时特征方程(3.6.34)的求解就没有这样容易了，需要作适当的近似. 对于$|m|\geqslant 1$，(3.6.34)的左侧可近似为

$$\frac{\mathrm{I}_m'(ha)\mathrm{K}_m'(ha)}{\mathrm{I}_m(ha)\mathrm{K}_m(ha)} = -\frac{m^2+(ha)^2}{(ha)^2}, \tag{3.6.39}$$

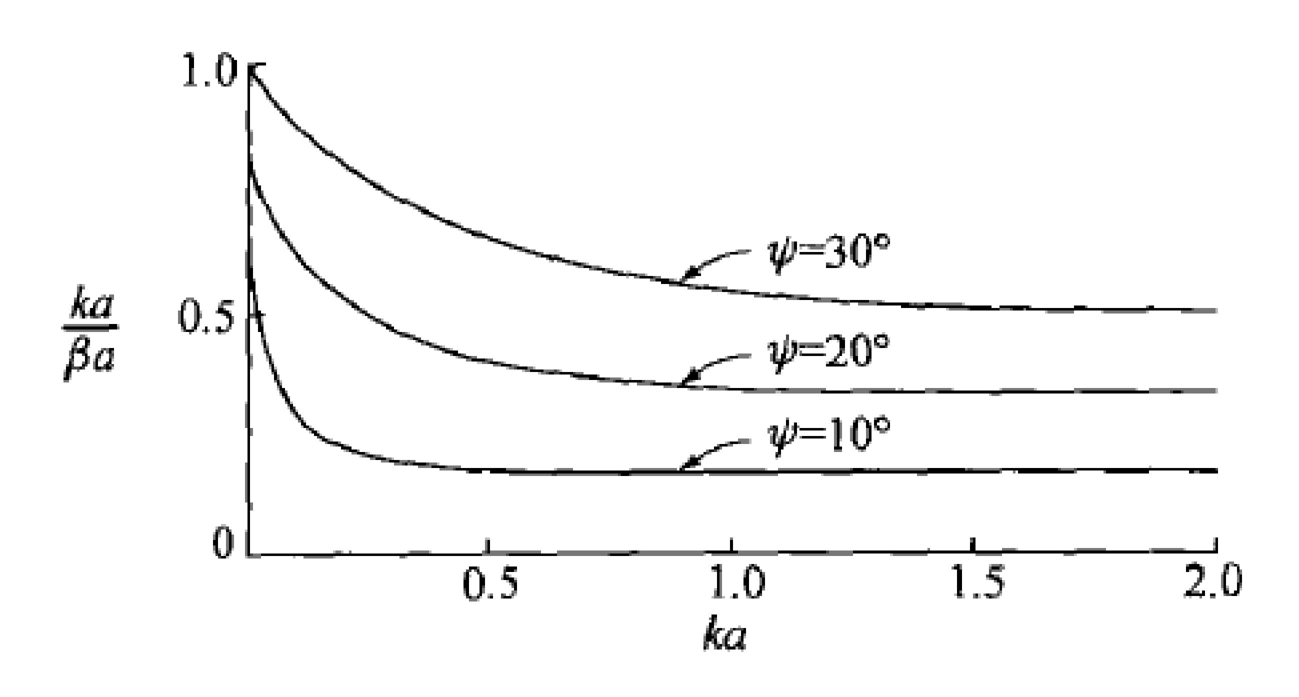


图 3.22 螺旋导面模型轴对称模特征方程的解

在此近似下方程(3.6.34)简化为

$$\frac{m^2+(ha)^2}{(ha)^2}=\frac{(h^2a^2-m\beta a\cot\psi)^2}{k^2a^2h^2a^2\cot^2\psi}. \tag{3.6.40}$$

消去$(ha)^2$后上式变为

$$(h^2a^2-m\beta a\cot\psi)^2-(m^2+h^2a^2)k^2a^2\cot^2\psi=0. \tag{3.6.40a}$$

欲求解此方程还需作进一步近似. 在$ha\gg1$而且$\cot\psi\gg1$的条件下,对于小的m模式近似有$(ha)^2\sim(\beta a)^2$和$(ha)^2\gg m^2$. 在此条件下方程(3.6.40a)简化为

$$(\beta^2a^2-m\beta a\cot\psi)^2=\beta^2a^2k^2a^2\cot^2\psi, \tag{3.6.40b}$$

其解为

$$\beta a=(\pm ka+m)\cot\psi. \tag{3.6.41}$$

近似解(3.6.37)和(3.6.41)分别提供ha值足够大条件下β作为ω的函数,即相应的$m=0$和$|m|\geqslant1$模式的色散特性. 在ha取小值的情况下则需求解精确方程(3.6.36)和(3.6.40). 这些特征方程的计算结果以ka-βa,即ω-β的关系绘制于图3.23,图中实线表示精确解,虚线为近似解,图中的n对应于我们的m,$\cot\psi=5$. 图中的三角形阴影线区为解的禁区. 关于ω-β图以及禁区,我们将在第4小节中解释.

但螺旋导面模型过于简化了,它没有反映$\rho=a$圆柱面上不导电与导电相间的结构周期性,因而在以上的求解中不出现空间谐波. 更符合实际的是薄螺旋带模型,尽管作了带厚度为零的简化假设,但电磁场的求解仍然非常复杂,在以下我们仅给出若干要点.

由于$\rho=a$面上结构的周期性,现在场应展开成空间谐波的级数,例如E_{z1}应写成双重求和的形式

$$E_{z1}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_{mn}\mathrm{I}_m(h_n\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_nz}, \tag{3.6.42}$$

这里n为空间谐波的标号,而且

$$\beta_n=\beta_0+2n\pi/p. \tag{3.6.43}$$

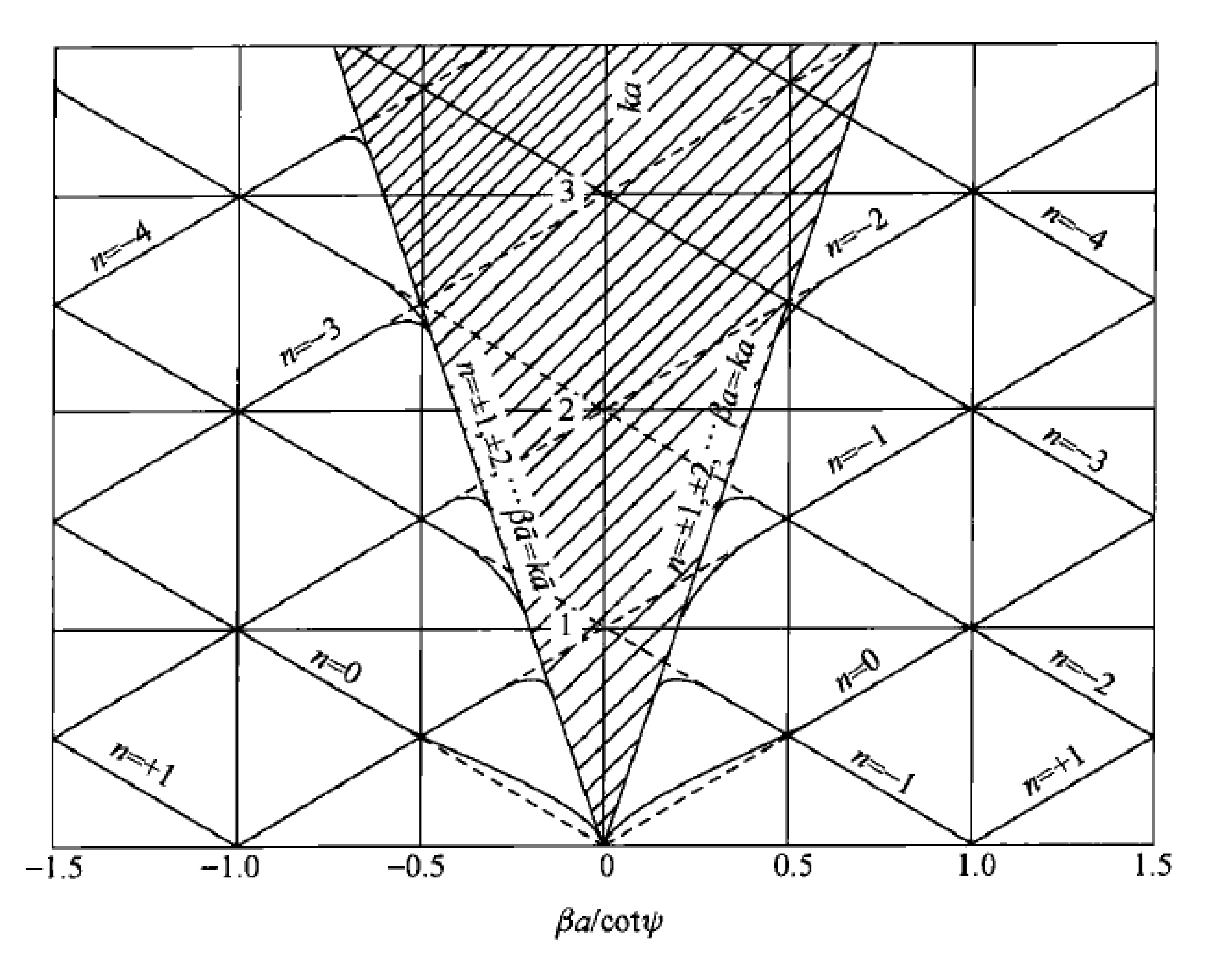


图 3.23　螺旋导面模型轴对称模及非轴对称模的 ω-β 图

(3.6.43)式代入(3.6.42)式得

$$E_{z1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_{mn}\mathrm{I}_m(h_n\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2n\pi/p)z}. \tag{3.6.42a}$$

螺旋带具有特殊的空间对称性：如果绕 z 轴旋转 $\Delta\phi$ 角再沿 z 轴向前移 $p\Delta\phi/2\pi$ 距离，螺旋带将与其自身重合，所以(ρ,ϕ,z)点的场与$(\rho,\phi+\Delta\phi,z+p\Delta\phi/2\pi)$点的场只可以相差一复常数乘子．由(3.6.42a)式，空间点$(\rho,\phi+\Delta\phi,z+p\Delta\phi/2\pi)$的 E_{z1} 为

$$E_{z1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 p\Delta\phi/2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_{mn}\mathrm{I}_m(h_n\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2n\pi/p)z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(m+n)\Delta\phi}. \tag{3.6.42b}$$

比较式(3.6.42a,b)，由 Floquet 定理必须有 $m=-n$. 这样双重求和式(3.6.42a)便化为单重求和式

$$E_{z1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\mathrm{I}_n(h_n\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2n\pi/p)z}, \tag{3.6.44}$$

其余的 3 个纵向场分量 H_{z1},E_{z2},H_{z2} 可类似写出，这 4 个纵向场分量含有 4 个未知振幅常数 A_n,B_n,C_n,D_n.

在 $\rho=a$ 圆柱面上的边界条件为：在导体带之间的不导电间隙，柱面两侧的切线电、磁场分量连续；在导体带两侧电场切线分量为零，磁场切线分量之差等

于面电流密度. 现在,因为导体带有一定宽度,其上的面电流密度有 z 和 ϕ 两个方向的分量,分布未知. 可以将未知的面电流分布函数展开为 Fourier 级数:

$$J_\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_{\phi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n[(2n\pi/p)z-\phi]},\quad J_z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_{zn}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n[(2n\pi/p)z-\phi]},$$

$j_{\phi n}$和 j_{zn}为第 n 次空间谐波的电流密度幅度. 将适当的场分量代入边界条件可得 A_n, B_n, C_n, D_n 的齐次联立方程组,由非零解条件原则上可得确定 $\beta_0(\omega)$的特征方程,但实际上必须作近似.

一种获得近似特征方程的方法是在窄带条件下假设合理的导体带上的电流分布函数,然后要求在整个 $\rho=a$ 面上 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*=0$. 这个条件是合理的,因为在导体带上虽有与带面相切的面电流,但切线电场为零;而在不导电间隙虽有切线电场但无面电流. 然后在 $\rho=a$ 柱面的一个周期面积 S 上做面积分

$$\iint_S(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*)\mathrm{d}S = 0. \tag{3.6.45}$$

因为面电流分布已按空间谐波展开,利用正交关系积出积分(3.6.45),便得特征方程

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big\{[(h_na)^2 - n\beta_na\cot\psi]^2(h_na)^{-2}\mathrm{I}_n(h_na)\mathrm{K}_n(h_na) + (ka)^2\cot^2\psi\,\mathrm{I}_n'(h_na)\mathrm{K}_n'(h_na)\Big\}\frac{\sin^2(\beta_n\delta/2)}{(\beta_n\delta/2)^2} = 0. \tag{3.6.46}$$

如果在(3.6.46)的求和中只取 $n=0$ 或 $n\neq0$ 的一项,会分别得到与螺旋导面模型相同的特征方程,即(3.6.36)和(3.6.34).

关于电磁波沿螺旋线传播问题的透彻研究,首先由 Sensiper 在他的学位论文中完成,该学位论文的要点已经发表①,也可参考[17].

4. ω-β 图;通带和禁带[13,14]

Brillouin 首先使用 ω-β 图直观而形象地表示波导和周期结构中波的传播特性,ω-β 图现在也称为 Brillouin 图. 螺旋导面的 ω-β 图(图 3.23)是我们已有的一个例子,该图的纵坐标为 $ka(\sim\omega)$,横坐标为 $\beta a/\cot\psi(\sim\beta)$,也可以直接按 ω-β 的关系绘制. 图上的曲线为特征方程的低次模精确解(实线)和近似解(虚线, $m=0$). 从曲线上任意一点引向原点的直线的斜率与该频率点的相速成正比,而由曲线上的同一点作出的曲线切线的斜率则与群速度成正比,如果按 ω-β 作图则比例常数为 1. 由图 3.23 可见,$m=0$ 模(轴对称模)的色散曲线近似为直线,

① S. Sensiper, Electromagnetic wave propagation on helical structures, *Proc. IRE*, vol. 43, pp. 140—161, Feb., 1955.

因此该模式在很宽的频率范围内相速近似不变，而且与群速度相等．这正是螺旋线广泛应用于中、小功率宽带行波管的原因：恒速电子注可以在宽频率范围内保持与螺旋线慢波模的同步相互作用．请注意，负 β 轴的曲线图形与正 β 轴的图形相对于 ω 轴对称．图中包含 ω 轴线的阴影线三角形区为解的禁区．

禁区的存在是由于要求 $\rho=a$ 圆柱面外的解为表面波，这就要求 $|\beta|>k$．如果 $|\beta|<k,h=(\beta^2-k^2)^{\frac{1}{2}}$ 为虚数，解(3.6.33b)中的径向函数变为 Hankel 函数，波将沿径向辐射．图中三角形禁区的边界线正是 $\beta a=ka$ 和 $-\beta a=ka$，在此两条直线以上的三角形影线区中 $|\beta|<k$，解被禁止．如果使用更准确的薄螺旋带模型，会出现周期性重复的禁区，因为现在要求每一个空间谐波满足 $|\beta_n|<k$，如图 3.24 所示．使用薄螺旋带模型的近似特征方程(3.6.46)，当 $\psi=10°,\pi\delta/p=0.1$ 时的 ω-β 图示于图 3.25．比较图 3.23 和图 3.25，可以看出螺旋带的空间谐波 n 分量与螺旋导面的模式 m 分量相对应，但螺旋导面的解伸展进入了螺旋带除含 ω 轴的禁区之外的其他禁区，在这些禁区之内螺旋导面解不正确．

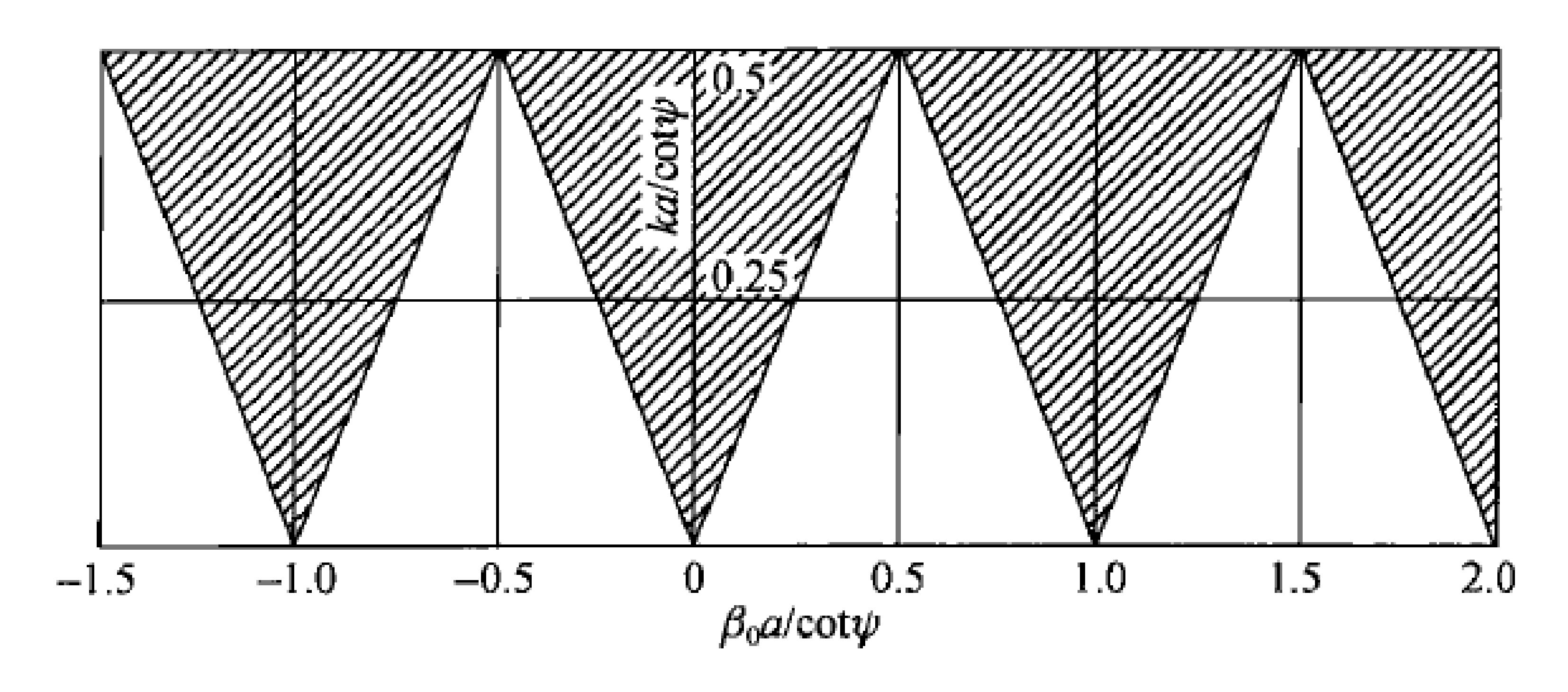


图 3.24　薄带螺旋线特征方程解的禁区

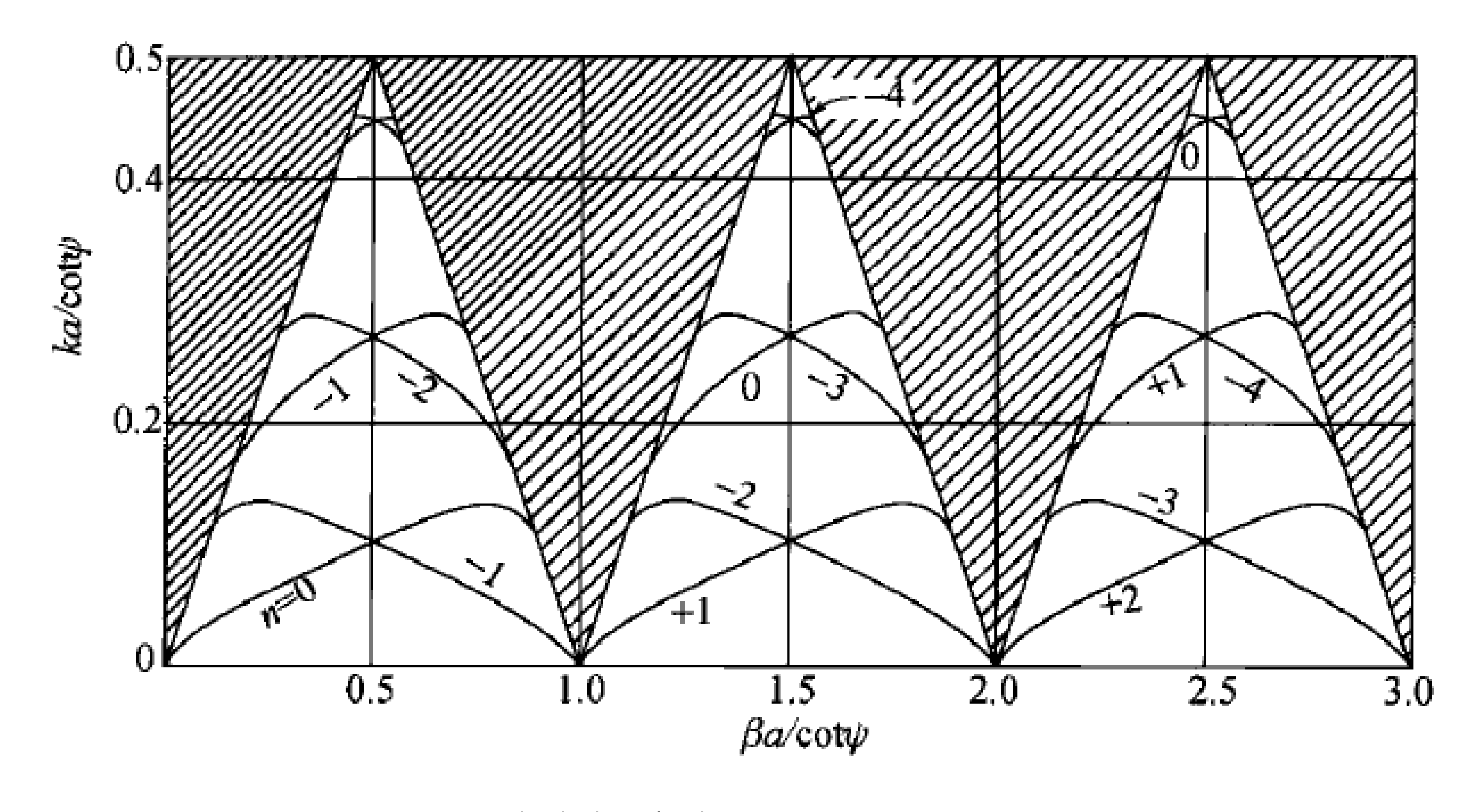


图 3.25　薄带螺旋线空间谐波分量的 ω-β 图

禁区的存在是开放的周期结构的一般特征,如果使用特征方程(3.6.26)绘出沿平面波纹导体传播的TM型表面波的 $k(\omega)$-β 图,结果将如图3.26所示.这个图也呈现出三角形禁区,这是结构边界开放所致.如果在平面波纹导体平面上方加上一平行导体盖板,将 x 方向的边界封闭,将会得到图3.27所示的 $k(\omega)$-β 图.此时解已经延伸进入禁区,因为加盖板后 x 方向会形成驻波,允许存在快波解,如同平行板波导.

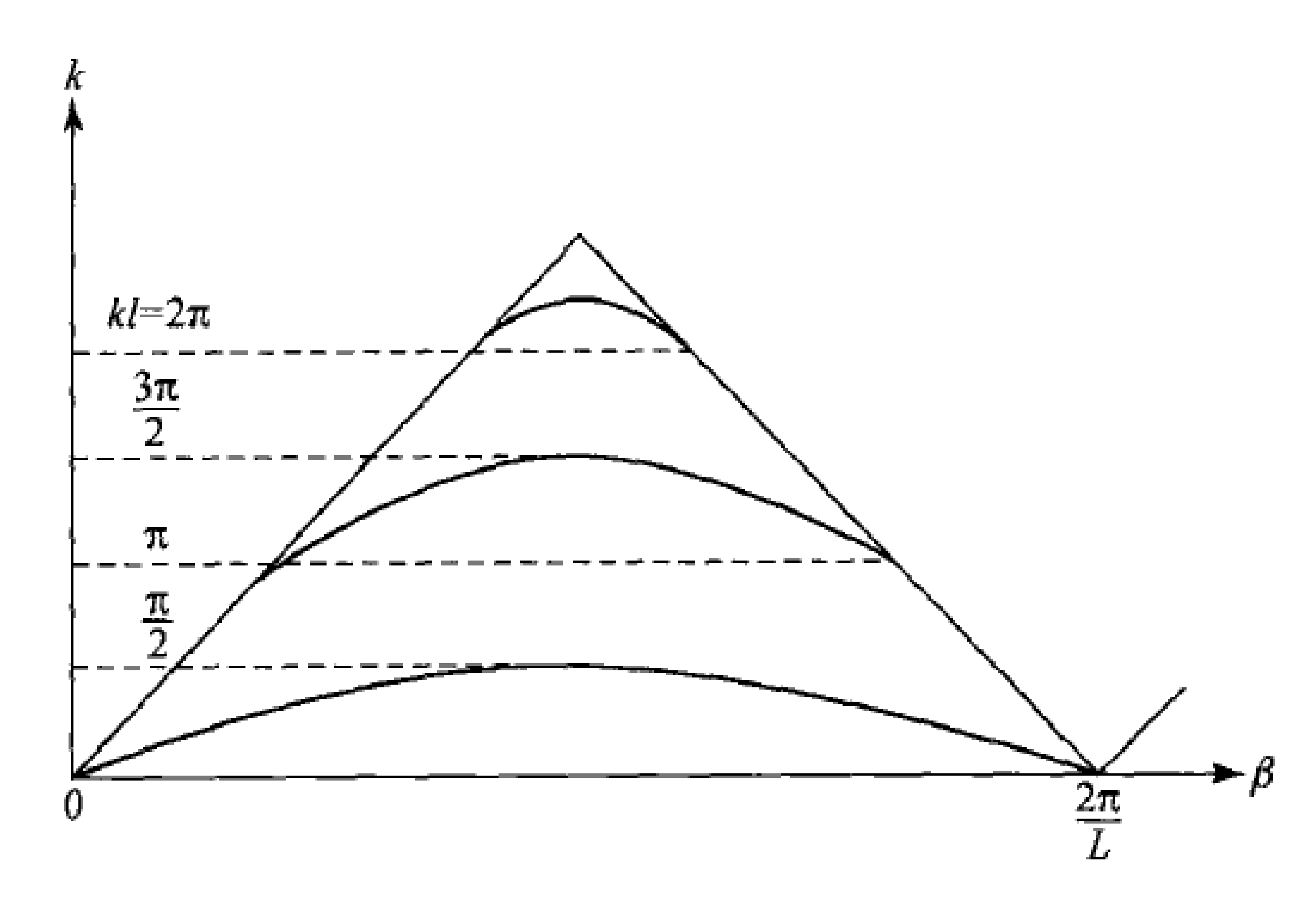


图 3.26 沿平面波纹导体表面传播的TM型表面波的 k-β 图

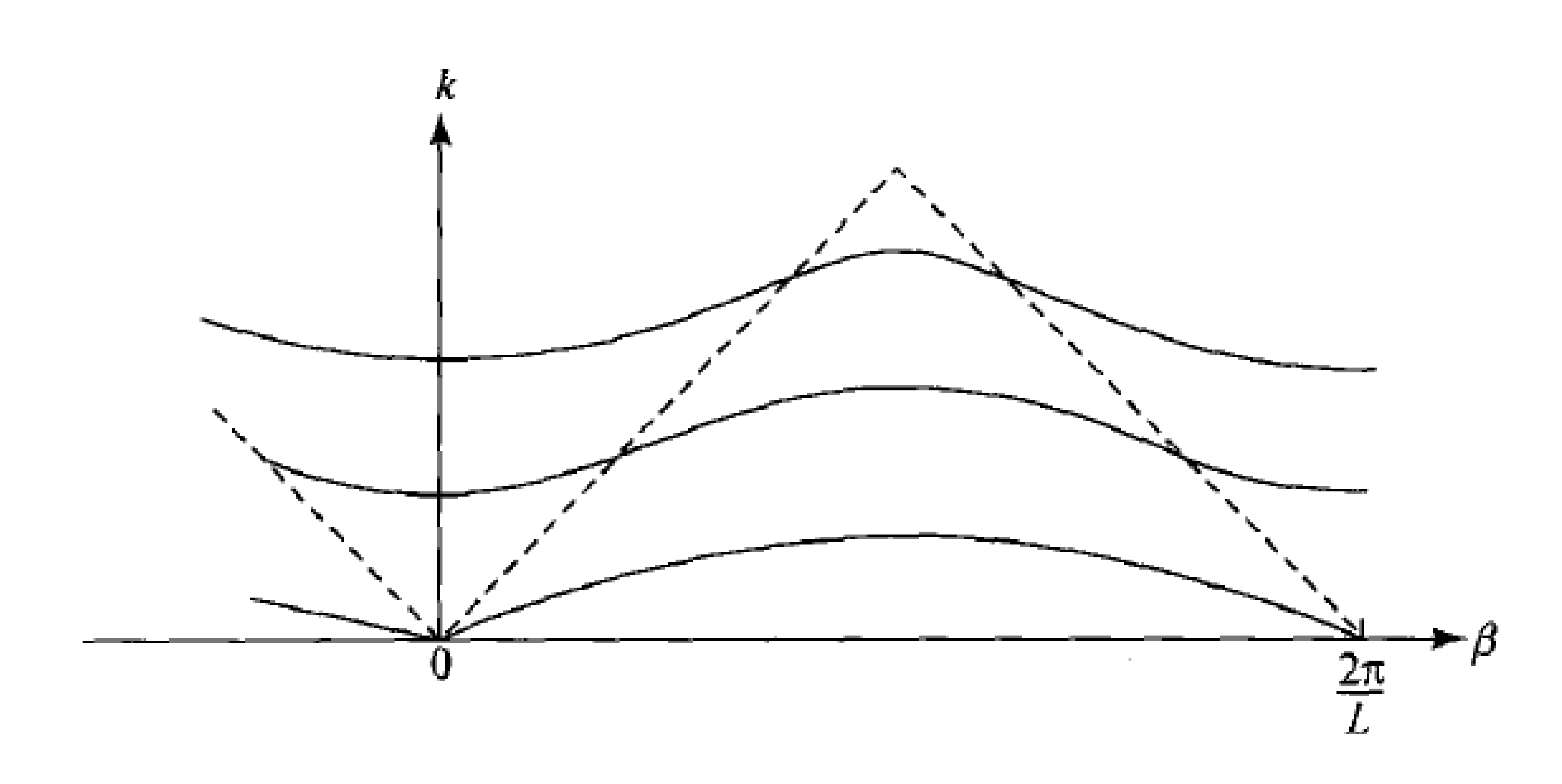


图 3.27 平面波纹导体加平行导体盖板后成为波导,其传播模的 k-β 图

图3.25(螺旋带)和图3.26(平面波纹导体)都明显地显示出存在着波可以传播的频率范围(通带)和波不能传播的频率范围(禁带),例如图3.26中 $0<kl<\pi/2$,$\pi<kl<3\pi/2$ 对应的频率范围为通带,$\pi/2<kl<\pi$,$3\pi/2<kl<2\pi$ 对应的频率范围为禁带.与此不同,在螺旋导面的 ω-β 图(图3.23)中就不出现禁带,因为这个模型没有反映结构的周期性.频率的通带和禁带交替出现,这是周期性结构的又一个特征.

Brillouin 在[13]的序言中就强调指出：已经讨论的涉及各种类型的周期结构的所有问题，它们均导致一个类似的结果，不论是电线还是晶格，所有这些结构的行为都类似于带通滤波器. 如果忽略能量耗散，在允许无衰减的波传播频带(通带)和发生衰减而无传播的频带(阻带)之间有清楚的界限. 对于无边界的无穷延伸介质，这些普遍性质是确定的.

滤波器的通、阻特性已为电子工程师所熟悉，晶体中电子态的能带分布构成了固态器件的物理基础，如今被称为电磁带隙(EBG)结构的人工周期结构的通、阻特性也已进入微波工程师的应用视野. 为了了解电磁带隙结构的原理，首先需要知道电磁波在晶格点阵中传播的基本特性，特别是禁带形成的原因.

5. 电磁波在晶格点阵中的传播. Bragg 反射[18,19]

这是固体物理学的基本问题. Bragg 反射发生于 $\lambda \leqslant 2a$ 的条件，这里 λ 为电磁波长，a 为晶格常数，即晶体中两相邻原子的间距(设考虑一维晶格). 典型的晶格常数 a 量级为 Å($=10^{-10}$ m)，所以固体物理学中所指电磁波为 X 射线. X 射线衍射图是研究晶体结构的基本手段. 我们的目的是研究微波频率范围内电磁带隙结构的通、阻特性，在以下的讨论中电磁波波长并不限制在 X 射线的波长范围.

晶格的体积单元称为原胞，为一平行六面体，它的三条棱可作为描述晶格几何的基矢量，用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示，称为晶格矢. a_1, a_2, a_3 也是晶格沿其三条棱边方向的周期长度，若将晶格沿矢量 $\boldsymbol{a} = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + l_3\boldsymbol{a}_3$ 平移，晶格仍与其自身重合，这里 l_1, l_2 和 l_3 为任意整数，这称为晶格的平移对称性. 由晶格矢可引入一组新的矢量：

$$\boldsymbol{b}_1 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)}, \quad \boldsymbol{b}_2 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)}, \quad \boldsymbol{b}_3 = 2\pi \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_3 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)}, \tag{3.6.47}$$

称为倒晶格矢，注意它们的分母为原胞的体积. 显然，倒晶格矢与晶格矢之间有以下关系：

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,3), \tag{3.6.48}$$

这里 δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号. 三维空间中的任意矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以按晶格矢展开为

$$\boldsymbol{r} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3, \tag{3.6.49}$$

展开式的分量 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 可根据(3.6.48)用倒晶格矢求出：

$$\xi_1 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{b}_1/2\pi, \quad \xi_2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{b}_2/2\pi, \quad \xi_3 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{b}_3/2\pi. \tag{3.6.50}$$

具有平移对称性的任意周期函数

$$f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r} + l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + l_3\boldsymbol{a}_3) \tag{3.6.51}$$

都可以用倒晶格矢展开为 Fourier 级数：

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}} f(\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3} f(h_1,h_2,h_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(h_1\xi_1+h_2\xi_2+h_3\xi_3)}, \tag{3.6.52}$$

这里

$$\boldsymbol{G} = h_1\boldsymbol{b}_1 + h_2\boldsymbol{b}_2 + h_3\boldsymbol{b}_3 \quad (h_1,h_2,h_3\ 为整数) \tag{3.6.53}$$

是倒晶格矢空间中的晶格点,它构成晶格在倒晶格矢量空间中的映像. 晶体的 X 光衍射图形实际上是它的倒晶格图形. 由 Fourier 逆变换,(3.6.52)中的展开式系数

$$f(h_1,h_2,h_3) = V^{-1}\iiint_V f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3.6.54}$$

积分体积 V 为一个原胞的体积.

晶体的宏观电极化是它位于各个晶格点的原子的电极化之和,它的介电常数 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 为具有平移对称性的周期函数,可展开为 Fourier 级数

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}}\varepsilon(\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{3.6.55}$$

求和遍及全部倒晶格矢,包括 $\boldsymbol{G}=0$. 当 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 为实数时可证明其 Fourier 展开式的系数有关系

$$\varepsilon(h_1,h_2,h_3) = \varepsilon^*(-h_1,-h_2,-h_3),或\ \varepsilon(\boldsymbol{G}) = \varepsilon^*(-\boldsymbol{G}). \tag{3.6.56}$$

晶体中的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 一般可展开为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的 Fourier 积分

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iiint\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}. \tag{3.6.57}$$

对于非磁性的电介质晶体,因为是在微观的晶格点阵中,介电常数为标量,其波动方程为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \omega^2\mu_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{3.6.58}$$

将(3.6.55)和(3.6.57)式代入,上式的第二项变为

$$\omega^2\mu_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \omega^2\mu_0\sum_{\boldsymbol{G}}\iiint\varepsilon(\boldsymbol{G})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

令 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{k}$ 并将积分变元 $\mathrm{d}\boldsymbol{k}$ 换成 $\mathrm{d}\boldsymbol{K}$,上式变为

$$\omega^2\mu_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \omega^2\mu_0\sum_{\boldsymbol{G}}\iiint\varepsilon(\boldsymbol{G})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{K}.$$

将(3.6.57)式的积分变量换为 $\boldsymbol{K}$,代入(3.6.58)式的第一项,得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \iiint K^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{K}.$$

因此,波动方程现在写作

$$\iiint K^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{K} - \omega^2\mu_0\sum_{\boldsymbol{G}}\iiint\varepsilon(\boldsymbol{G})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{K} = 0. \tag{3.6.59}$$

上式两项 $e^{-jK\cdot r}$ 前面的系数相等时波动方程(3.6.58)才能满足，这要求

$$K^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K}) = \omega^2\mu_0\sum_{\boldsymbol{G}}\varepsilon(\boldsymbol{G})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G}). \tag{3.6.60}$$

来看方程(3.6.60)的解．电磁波的波矢量为 $\boldsymbol{k}$，最重要的情况发生于 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的幅值接近相等而使 Bragg 条件

$$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2 = k^2 \quad 或 \quad 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{G} = G^2 \tag{3.6.61}$$

发生时．此条件称为 Bragg 反射条件，当它近似满足时晶体中的主波为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})$，前者为入射波，后者为 Bragg 反射波．当 $\boldsymbol{K}$ 写作 $\boldsymbol{k}$ 时(3.6.60)式化为

$$k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) = \omega^2\mu_0\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) + \sum{}'\varepsilon(\boldsymbol{G})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})\right], \tag{3.6.62}$$

右侧方括号中的第一项来自 $\varepsilon(\boldsymbol{G})$ 的 $\boldsymbol{G}=0$ 项，这里 ε_0 表示展开式(3.6.55)中与 $\boldsymbol{G}=0$ 倒晶格点对应的系数，不同于真空的介电常数．因为 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0(1+\chi_e(\boldsymbol{r}))\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，所以 $\varepsilon(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0(1+\chi_e(\boldsymbol{r}))$，这里的 ε_0 为真空的介电常数．$\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 的 Fourier 展开式(3.6.55)应理解为

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{r}) &= \sum_{\boldsymbol{G}}\varepsilon(\boldsymbol{G})e^{-j\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}} = \varepsilon_0\left[1+\sum_{\boldsymbol{G}}\chi_e(\boldsymbol{G})e^{-j\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &= \varepsilon_0\left[1+\chi_e(0)+\sum{}'\chi_e(\boldsymbol{G})e^{-j\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}}\right],\end{aligned}$$

$\sum'$ 表示对 $\boldsymbol{G}\neq 0$ 的倒晶格矢求和．所以 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 的 Fourier 展开式的零阶系数，即方程(3.6.62)中的 ε_0，为 $\varepsilon_0[1+\chi_e(0)]$．通常 $\chi_e\ll 1$，因此这个零阶系数通常远大于其他高阶系数．下面我们会看到，在 $\sum'$ 中只有满足 Bragg 条件的 $\boldsymbol{G}$ 分量所对应的系数才是重要的，其余系数均可略去．这一项系数记作 ε_G，方程(3.6.62)可改写为

$$k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) = \omega^2\mu_0\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) + \varepsilon_G\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})\right]. \tag{3.6.63}$$

同样，当 $\boldsymbol{K}$ 取作 $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G}$ 时(3.6.60)式变为

$$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G}) = \omega^2\mu_0\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G}) + \varepsilon_{-G}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\right]. \tag{3.6.64}$$

方程(3.6.63)和(3.6.64)是场幅度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})$ 的耦合线性方程组，当系数行列式为零时得非平庸解，即

$$\begin{vmatrix} k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0 & -\omega^2\mu_0\varepsilon_G \\ -\omega^2\mu_0\varepsilon_G^* & (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.6.65}$$

在此已根据(3.6.56)将 ε_{-G} 写作 ε_G^*．(3.6.65)式又可写作

$$\omega^4\mu_0^2(\varepsilon_0^2-|\varepsilon_G|^2)-\omega^2\mu_0\varepsilon_0[k^2+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2]+k^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2 = 0. \tag{3.6.65a}$$

Bragg 条件为 $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})^2$ 精确地等于 k^2，我们用 k_0 表示 $\boldsymbol{k}$ 的这个值，则方程(3.6.65a)变为

$$\omega^4\mu_0(\varepsilon_0^2-|\varepsilon_G|^2)-2\omega^2\mu_0\varepsilon_0k_0^2+k_0^4 = 0. \tag{3.6.66}$$

对 ω^2 求解方程(3.6.66),得两个解

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k_0^2}{\mu_0(\varepsilon_0 \pm |\varepsilon_G|)}. \tag{3.6.67}$$

设 ω 取介于 ω_+ 和 ω_- 之间的实值,(3.6.65a)作为未知数 k 的方程有复数根,波的传播将遭受衰减,ω_+ 和 ω_- 之间的频带为禁带. 容易解释禁带形成的原因:在 Bragg 条件下 $k_0=\frac{1}{2}G$,此时入射波在相继的晶格点受到反射而反向传播的波之间的相位差为 2π 的整数倍,反射波相干叠加形成强反射,这就是 Bragg 反射,波便不能传播通过.

我们来求方程(3.6.65a)在禁带中心频率附近的近似解. 设 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G}$ 方向相反,$k=\frac{1}{2}G+\delta$,而且 $\delta\ll\frac{1}{2}G$. 此时方程(3.6.65a)变为

$$\delta^4 - 2\delta^2\left(\frac{1}{4}G^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\right) + \left(\frac{1}{4}G^2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}G^2\right)\omega^2\mu_0\varepsilon_0 + \omega^4\mu_0^2(\varepsilon_0^2 - |\varepsilon_G|^2) = 0. \tag{3.6.68}$$

在上式中略去 δ^4,对介于 ω_+ 和 ω_- 之间的频率 $\omega^2=\left(\frac{1}{2}G\right)^2/\mu_0\varepsilon_0$ 求解 δ. 现在 δ 满足

$$2\delta^2\left(\frac{1}{2}G\right)^2 - \left[-\left(\frac{1}{4}G^2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}G^2/\varepsilon_0\right)^2(\varepsilon_0^2 - |\varepsilon_G|^2)\right] = 0, \tag{3.6.69}$$

其解为

$$\delta = \pm \mathrm{j}\left(\frac{1}{2}G\right)\frac{|\varepsilon_G|}{2\varepsilon_0}. \tag{3.6.70}$$

因此,禁带中心频率附近的复波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的值为

$$k = \frac{1}{2}G\left(1 \pm \mathrm{j}\,\frac{|\varepsilon_G|}{2\varepsilon_0}\right), \tag{3.6.71}$$

它的虚部是由介电常数 Fourier 展开式中与倒晶格点 $\boldsymbol{G}$ 对应的分量 ε_G 产生的,也就是说每一个倒晶格点对应着一个禁带.

现在以一维晶格为例作具体计算,以获得进一步的了解. 设介质在 xy 平面内均匀,介电常数在 z 方向周期性变化,周期为 a,介质在 $\pm z$ 方向无限延伸. 倒晶格矢

$$\boldsymbol{G} = h\boldsymbol{g} = h(2\pi/a)\boldsymbol{a}_z = hg\boldsymbol{a}_z \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{3.6.72}$$

$\varepsilon(z)$展开为 Fourier 级数

$$\varepsilon(z) = \sum_{G}\varepsilon(\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{h}\varepsilon(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}h(2\pi/a)z}. \tag{3.6.73}$$

设电磁波沿 z 轴向其正向传播,电场矢量垂直于 z 轴,$\boldsymbol{E}(z)$展开为 Fourier 积分

$$\boldsymbol{E}(z)=\int\boldsymbol{E}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{d}k, \tag{3.6.74}$$

为简单起见，这里已将仅有的波矢量分量 k_z 写作 k. 方程(3.6.60)现在写作

$$K^2\boldsymbol{E}(K)=\omega^2\mu_0\sum_h\varepsilon(h)\boldsymbol{E}(K-\boldsymbol{G}), \tag{3.6.75}$$

由于 $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的方向都沿 z 向，现在它们不必写作矢量的形式.

当 $K=k$ 时(3.6.75)式变为

$$k^2\boldsymbol{E}(k)=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}(k)+\omega^2\mu_0[\varepsilon_1\boldsymbol{E}(k-g)+\varepsilon_{-1}\boldsymbol{E}(k+g)+\cdots],$$

上式右侧的方括号表示(3.6.62)式中的Σ'，现在仅写出两项. 上式可改写成

$$\boldsymbol{E}(k)=\frac{\omega^2\mu_0}{k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0}[\varepsilon_1\boldsymbol{E}(k-g)+\varepsilon_{-1}\boldsymbol{E}(k+g)+\cdots]. \tag{3.6.76}$$

当 $K=k-g$ 时(3.6.62)式写作

$$(k-g)^2\boldsymbol{E}(k-g)=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}(k-g)+\omega^2\mu_0[\varepsilon_1\boldsymbol{E}(k-2g)+\varepsilon_{-1}\boldsymbol{E}(k)+\cdots],$$

此式也可改写为

$$\boldsymbol{E}(k-g)=\frac{\omega^2\mu_0}{k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0}[\varepsilon_1\boldsymbol{E}(k-2g)+\varepsilon_{-1}\boldsymbol{E}(k)+\cdots]. \tag{3.6.77}$$

从(3.6.76)和(3.6.77)式可以看出，在 Bragg 条件

$$|k-g|\approx k \quad 和 \quad k^2\approx\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{3.6.78}$$

满足时在电场的 Fourier 展开式系数中仅有 $\boldsymbol{E}(k)$和 $\boldsymbol{E}(k-g)$这两个系数才是重要的，在这两式右侧的方括号中仅需分别保留 $\boldsymbol{E}(k-g)$和 $\boldsymbol{E}(k)$项. 于是有

$$(k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0)\boldsymbol{E}(k)-\omega^2\mu_0\varepsilon_1\boldsymbol{E}(k-g)=0, \tag{3.6.79}$$

$$-\omega^2\mu\varepsilon_{-1}\boldsymbol{E}(k)+[(k-g)^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0]\boldsymbol{E}(k-g)=0. \tag{3.6.80}$$

此二式分别对应于(3.6.63)和(3.6.64)式，它们的非零解条件导致特征方程

$$(k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0)[(k-g)^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0]-(\omega^2\mu_0|\varepsilon_1|)^2=0, \tag{3.6.81}$$

由此解得 $\omega(k)$，即色散关系.

在精确满足 Bragg 反射条件时解出禁带的边界频率

$$\omega_{\pm}^2=k_0^2/\mu_0(\varepsilon_0\pm|\varepsilon_1|), \tag{3.6.82}$$

式中 $k_0=\frac{1}{2}g=\frac{\pi}{a}$. 在禁带中心频率附近解得的复波数 k 值为

$$k=\frac{1}{2}g(1\pm\mathrm{j}|\varepsilon_1|/2\varepsilon_0). \tag{3.6.83}$$

禁区的带宽 $\Delta\omega_{\text{gap}}=|\omega_+-\omega_-|$，由(3.6.82)有

$$\Delta\omega_{\text{gap}}=\omega\frac{|\varepsilon_1|}{\varepsilon_0}, \tag{3.6.84}$$

这就是通带之间的带隙，它与 Fourier 系数 ε_1 的绝对值成正比，上式中 $\omega^2=\left(\frac{1}{2}g\right)^2/\mu_0\varepsilon_0$.

如果考虑与介电常数的 Fourier 展开式中的高阶系数 ε_h 对应的禁带，此时 Bragg 条件写作

$$|k-hg| \approx k, \quad k^2 \approx \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0. \tag{3.6.85}$$

导致色散关系的联立方程组为

$$(k^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0)\boldsymbol{E}(k)-\omega^2\mu_0\varepsilon_h\boldsymbol{E}(k-hg)=0, \tag{3.6.86}$$

$$-\omega^2\mu_0\varepsilon_{-h}\boldsymbol{E}(k)+[(k-hg)^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0]\boldsymbol{E}(k-hg)=0. \tag{3.6.87}$$

带隙宽

$$(\Delta\omega_{\text{gap}})_h=\omega\frac{|\varepsilon_h|}{\varepsilon_0}, \tag{3.6.88}$$

现在禁带的中心频率 $\omega^2=\left(\frac{1}{2}hg\right)^2/\mu_0\varepsilon_0$. 在多数情况下随着 h 的增大 ε_h 变小，禁带的宽度也随之减小.

6. 电磁带隙结构

带隙结构的概念源于在可见光和红外频率范围内对人工周期介质结构的研究，当初的目的在于获得与固体(特别是半导体)中的电子相类似的能带结构，那时是针对光波的传播而言. 如果所设计的人工周期结构具有对光波传播的禁带，原子的自发辐射在禁带频率范围内不能传播而受到抑制，导致光电子器件(例如半导体激光器)性能改善，这是当初启动此项研究的主要动因.

主要有两种人工周期介质结构方案. 一是在一块均匀的电介质体中按晶格的几何位置挖出形状规则且相同的空间，例如球形空间，这相当于用球形空间中的空气作为"原子"构造晶体. 另一方案则是将规则的均匀介质微结构，例如介质球，按晶格几何位置浸没于介电常数与它不同的另一均匀介质中，介质球充当晶体的"原子". 这两种方案都是用介质(空气也是介质)微结构构造晶体，被称为介质晶体(dielectric crystals). 当"原子"介质与作为支撑物的衬底介质的介电常数相差足够大时，在晶格点阵上的散射足以形成 Bragg 反射，就会形成禁带. 影响形成禁带的另一因素是原子所占有的空间份额，即填充率. E. Yablonovich 首先从理论上探索了影响三维介质晶体中禁带形成的因素，找到了形成禁带所需的结构的物理和几何参数.

除上述的两个因素外，影响禁带形成的另一因素是晶格的几何结构. 所有可能的波矢量在逆晶格空间中形成的区域称为 Brillouin 区(Brillouin zone, BZ)，其几何形状由晶格的几何形状决定. 在 Yablonovich 探索中遇到的一个障碍是禁带发生的频率范围对于沿不同方向传播的波不重合，欲形成对各方向传播的波共同的禁带，Brillouin 区的形状须尽可能接近球形. 研究便集中于具有高对称性的几种晶格几何，如面心立方、金刚石结构等. Yablonovich 对于面心立方结

构介质晶体禁带的最初探索未获成功的另一原因是忽略了光波场的矢量性而使用标量波动方程近似，后经其他学者改用严格的矢量波动方程首先在金刚石结构获得了具有全向性的禁带(K. M. Ho，C. T. Chan，C. M. Saukoulis，1990)．图3.28示出了由介质球构造的金刚石晶格介质晶体的色散曲线，纵坐标为 c/a，c 为真空的光速，a 为立方晶格的晶格常数，横坐标为波矢量，下面的字母表示Brillouin区表面的若干具对称性的点．介质球的相对介电常数为3.6，衬底介质为空气，介质填充率34％．图示的计算结果与实验测量结果一致．现在已经找到多种三维和二维介质晶格结构，晶体的组成也已从介质扩展到金属，以及介质与金属相间的复合结构．例如，由彼此平行的均匀介质杆或金属杆构成的二维介质晶体，杆的截面可以是圆形、正方形或其他形状，在与杆垂直的平面内杆按照正方形、等边三角形或其他晶格形状排列，对于在此平面内传播的光波可形成禁带．这些具有传输禁带的介质或金属周期结构现在被称为光子带隙(photonic band-gap，PBG)结构或光子晶体(photonic crystals)．对于PBG结构研究的启动及初步成就的获得过程，Yablonovich在他的综述论文①中作了生动而详细的论述，值得有兴趣的读者细读．

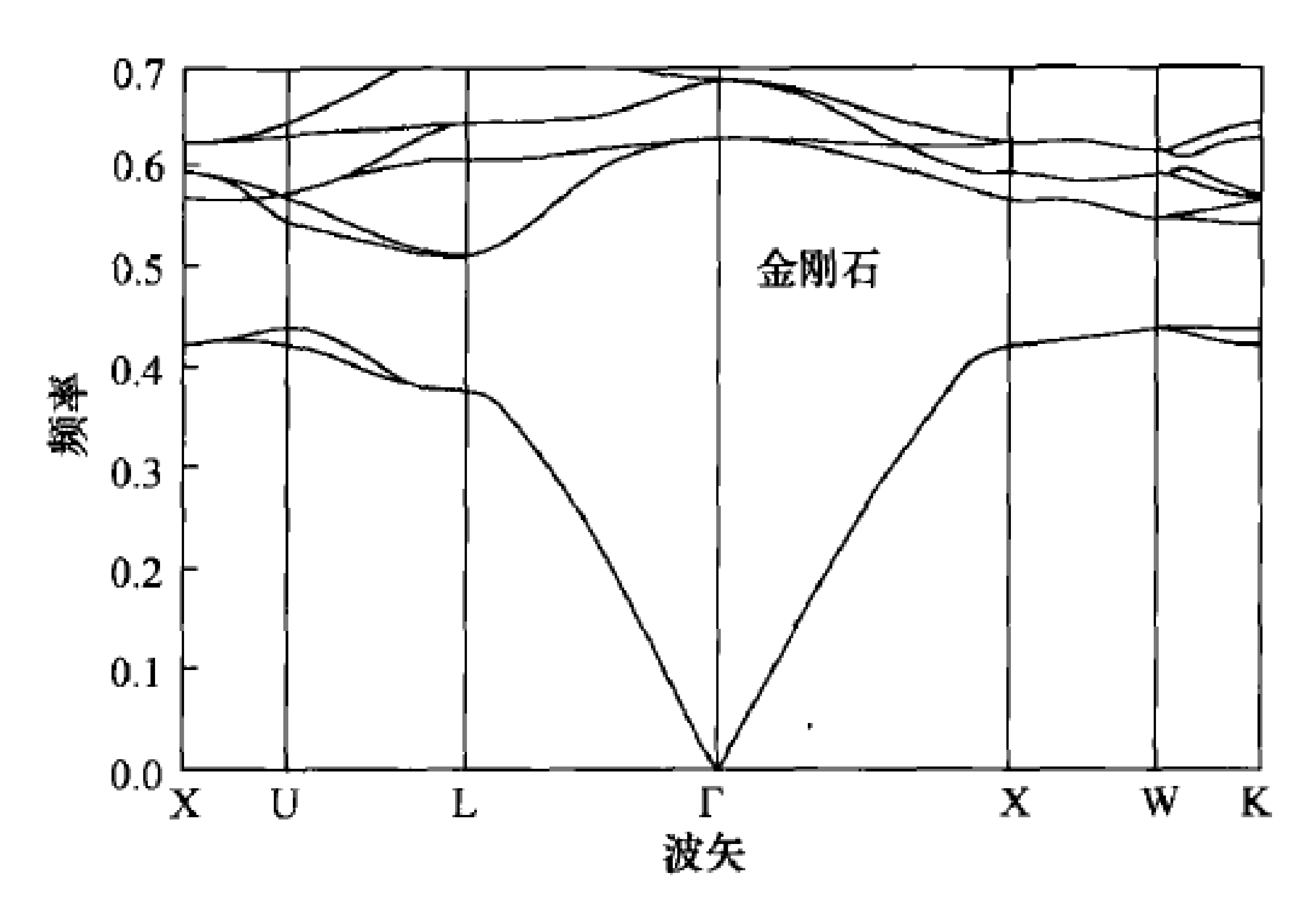


图3.28　金刚石晶格结构中形成的全向性带隙

在获得了光子晶体之后，它的应用就不仅限于抑制自发辐射．进一步的应用与在光子晶体中引入局部缺陷有关．如果在二维光子晶体中移去整个一行“原子”，或者改变整个一行介质杆的横截面尺度，就形成线缺陷．由于在缺陷部位周期性被破坏，禁带频率范围内的光波可以沿线缺陷传播，但向线缺陷两侧方向的

① E. Yablonovich, Photonic band-gap structures, *J. Opt, Soc. Am. B*, vol. 10, no. 2, pp. 283—295, Feb., 1993.

传播被禁止,线缺陷便构成光波导.这使得在光电子领域内工作的科学家和工程师感到振奋,因为此前能够约束光波沿一定方向传播的仅有物理手段是全内反射.现在,光子晶体的传输禁带提供了一种前所未有的控制光波传播的手段.在平面集成光路中不可避免地存在着许多光波导的遽然曲折,在这些地方入射角已经超出全内反射的许可值,会导致导波功率从侧壁方向漏泄,而光子带隙机制可以防止能量从侧壁漏泄.一项仿真计算证明,即使在零曲率半径的 90°弯折处,光子晶体波导的功率传输率也可达 98%.如果制造一个点缺陷,例如在光子晶体中拿掉一个"原子",在四周的反射壁中的空腔就构成谐振腔,光能被局限于其中.因此,光子晶体开辟了一个全新的应用领域,利用它可以设计出新型的滤波器、耦合器、激光器等光电子元器件,可参考 Joannopoulos 等的综论①.

但光子晶体的制作相当困难,特别是三维结构,需要解决亚微米尺度的加工技术.光电子设备的典型工作波长为 1.5 μm,由 Bragg 反射条件,光子晶体的"原子"尺度要小于 0.5 μm 量级,尽管它已经较真正的原子晶格常数(约 1 Å)大了数千倍,但要在这个尺度上按照严格的晶格几何位置加工出形状规则而且尺度准确的介质或金属"原子",这样的加工技术目前尚不具备.面对此困难,对光子晶体的理论研究结果的实验验证工作于是便利用缩尺原理移到了毫米波波段.在毫米波段,晶格常数为毫米量级,原子尺度略小于 1 毫米,不存在制作困难.于是便产生了禁带处于微波频段的第一批电磁带隙(electromagnetic bandgap,EBG)结构,或称为电磁晶体(electromagnetic crystals).很自然地,电磁晶体在微波技术和天线等工程领域的应用便吸引了有关研究人员的兴趣,成为研究热点.

在微波技术中大量使用介质和金属平板作为电路的衬底,例如微带线、微波集成电路、印制天线等都是制作在具有金属衬底的介质片上.在平板介质或金属板上容易制作二维电磁晶体,例如在介质片上按晶格几何位置钻孔,或在金属衬底板上刻蚀孔即可.

在微波(特别是毫米波)集成电路中,天线单元或系统通常印制于有金属衬底的半导体基片上,半导体材料的相对介电常数的典型值为 4.如果天线处于自由空间中,天线所在的平面将空间分为两个半空间,由几何对称性,天线的辐射功率各有一半分别进入上、下半空间.当天线印制于半导体基片上时,由于介质的存在辐射功率不再对半分,大部分辐射功率将进入介质.若辐射单元为电偶极子,进入介质与进入自由空间的辐射功率之比为 $\sqrt{\kappa_e}:1$,κ_e 为介质的相对介电

① J. D. Joannopoulos, P. R. Villoneuve and S. Fan, Photonic crystals: putting a new twist on light, *Nature*, vol. 386, pp. 143—149, 13th March 1997.

常数，因此大约为 2∶1. 如果辐射天线为隙缝天线，进入介质的比例还会更高①. 进入介质的功率不但无效，反而有害，因为它将激起沿金属与介质分界面传播的表面波，形成电路部件之间不希望的耦合路径. 提高有效辐射和抑制表面波激励长期以来是微波集成电路（特别是集成于介质基片上的天线阵系统）设计中期盼解决的问题. 电磁晶体的出现有可能解决这个难题. 如果以二维电磁晶体片取代介质基片而且让电路工作频率落在禁带内，电磁晶体的作用会类似于理想磁导体，镜像电流与源电流将同相叠加，没有功率进入，也不会激励表面波，天线的全部辐射功率都是有效的. 这方面的研究正在进行.

研究的另一个方向是试图用电磁晶体制作具有新性能的元、器件. 由光子晶体的缺陷构成的微型谐振腔由于损耗很小可达到相当高的 Q 值，现已制成 Q 值达 10 000 的谐振腔，由于结构的开放性，这已是相当好的结果，已应用于激光器，也已用它制成亚毫米频段的振荡器. 由于禁带的频率范围与电磁晶体组成物质相对介电常数的反差有关，通过电子或微电子机械技术可实现介电常数反差的调节，为调节器件性能提供了一种可操作途径. 在微波和亚毫米波波段开展的所有研究都会对将要在光频开展的应用研究提供原理证明和经验. 禁带的存在是开放边界下周期性的必然结果，现在甚至对于声频的带隙结构也在研究之中.

我们已在 §2.6 中介绍了具有负电磁常数的人工电磁介质，其结构具有周期性，这里讨论的光子晶体或电磁晶体也具有周期性，这两者有什么差别？实质的差别在于周期的尺度相对于波长根本不同. 双负电磁常数人工介质的组成，每个波长范围内原则上要有 10 个以上的结构单元，这种结构对于波的传播宏观上可视为连续介质，波的散射可以忽略. 而在带隙结构中禁带中心频率的波长约为相邻“原子”间距的 2 倍，由于散射的相干叠加才形成禁带. 所以后者被归入周期结构之中，而前者被看作是一种宏观连续介质.

§3.7　微　带　线

1. 准静态分析[20]

我们已经知道，矩形金属管波导的基模（TE_{10}）的截止波长 $\lambda_c=2a$，圆波导的基模（TE_{11}）$\lambda_c=2\pi a/1.841$. 这里的长边长或半径 a 受机械加工可能的尺度限制，金属空管波导的最短工作波长一般只能达到 1 cm 或比它略短. 在毫米波及其以上频率所使用的传输线其结构已与金属空管不同，它们主要是一些开放式

① D. B. Rutledge et al., Integrated-circuit antennas, *in* Infrared and Millimeter Waves, vol. 10, p. 9. K. J. Button ed., Academic Press, 1983.

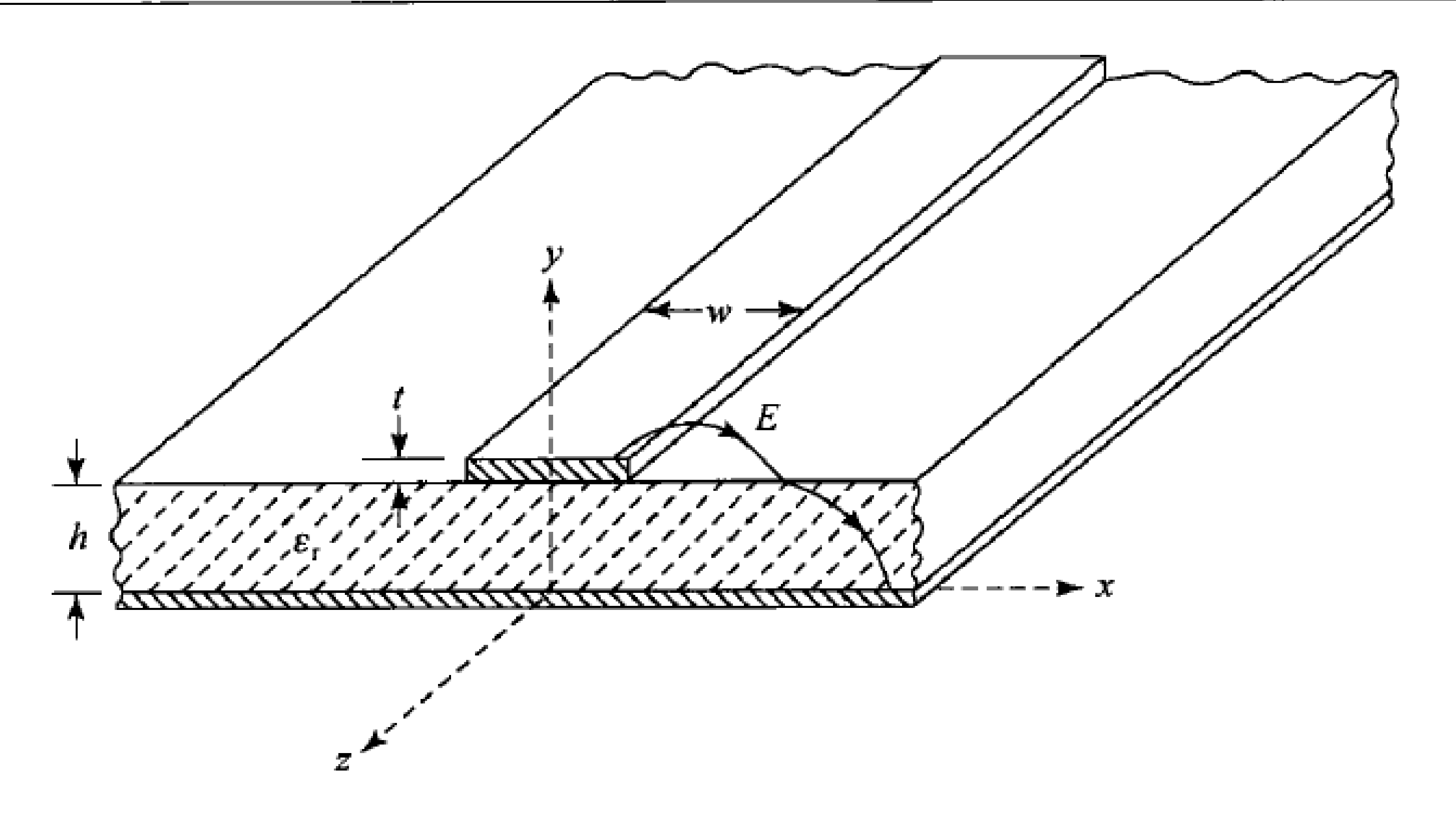


图 3.29 微带线的结构

的平面结构,以微带线为代表,图 3.29 示出了微带线的结构. 由图可见,微带线是由金属底板和印制在介质基片上的薄导体带构成的二导体传输线,从概念上它可以从平行双导线传输线演变而来,图 3.30 示出了演变过程. 双圆截面平行导线传输线(图(a))传输 TEM 波,场具有准静态性质,图中示出了电力线和磁力线. 当圆截面导线变成薄导体带时(图(b)),上、下导体带相对于两平面之间的对称平面互为镜像. 如果将对称平面换成无限大的导体薄板,下导体带可由上导体带的镜像代替(图(c)). 在变形为图(b)和图(c)时,图(a)传输波的 TEM 性质保持不变. 为了支撑上导体带,在金属底板和上导体带之间填充以介质基片,微带线就此形成(图(d)).

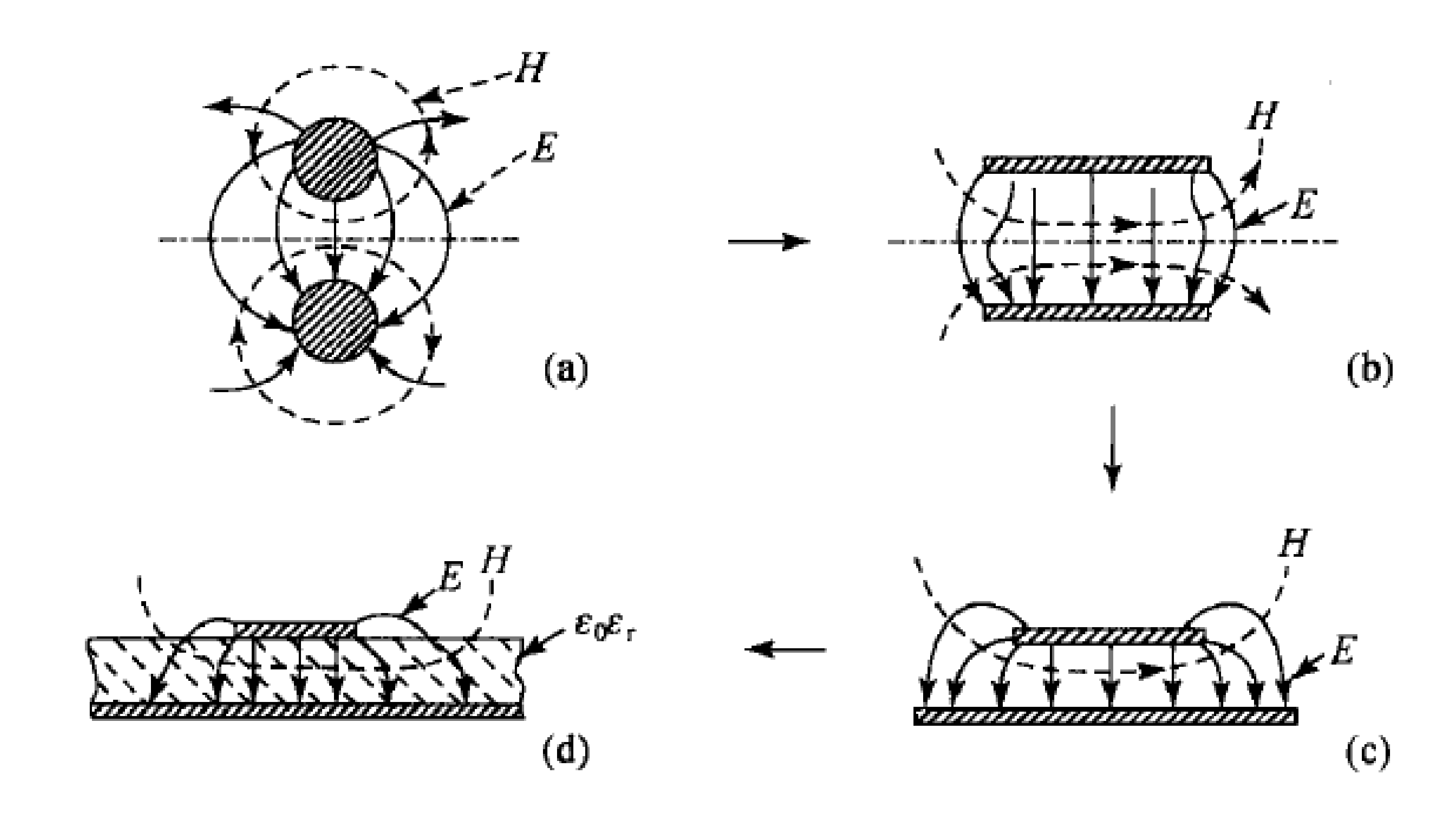


图 3.30 平行双导线传输线演变为微带线

电介质基片的引入有两方面的作用. 一是对微带线制作和使用带来的便利,可以用印刷电路技术或光刻技术在介质基片上制作导体带,同时导体带易于连接基片上的其他电路元、器件,组成功能性集成电路. 但介质基片却破坏了空间

在横向的均匀性，金属底板以上的半空间被分成两个区域：导体带以上为空气；导体带与金属底板之间为均匀介质区. 因此，被微带线导引的波便失去了 TEM 波的准静态性质，这不难用波导理论论证. 设介质区为区域 1，空气区为区域 2，介质和导体均无耗. 若传播 TEM 波，由(3.1.14)应有 $\gamma_1 = \mathrm{j}\beta_1 = \mathrm{j}k_1$，$\gamma_2 = \mathrm{j}\beta_2 = \mathrm{j}k_2$，以及 $\gamma_1^2 + k_1^2 = 0$，$\gamma_2^2 + k_2^2 = 0$. 现在，两个区域中的波的传播常数须相同，$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2$，便须有 $\gamma^2 + k_1^2 = \gamma^2 + k_2^2$，但 $k_1^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2$，$k_2^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$，$\gamma$ 不可能有解. 所以 TEM 波不可能在这样的结构中传播.

从场分量看，在电介质与空气的分界面上电力线会发生曲折(图 3.29)，就会导致纵向场分量，这不难从场方程和边界条件予以论证. 在图 3.29 所示的坐标系中，分界面两侧电场的切线分量 E_x 应连续：

$$E_{x1} = E_{x2}. \tag{3.7.1}$$

由 Ampère 定律 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，分界面两侧的磁场切线分量应满足

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_{x1} = \kappa_e (\nabla \times \boldsymbol{H})_{x2}, \tag{3.7.2}$$

这里 $\kappa_e = \varepsilon_r$ 为介质基片的相对介电常数. 计算出旋度的 x 分量，得

$$\kappa_e \frac{\partial H_{z2}}{\partial y} - \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} = (\kappa_e - 1) \frac{\partial H_y}{\partial z}, \tag{3.7.3}$$

这里使用了分界面两侧磁场法线分量连续的条件，即 $H_{y1} = H_{y2} = H_y$. (3.7.3)式右侧的 $\partial H_y / \partial z$ 不能为零，左侧的两项也不能为零，所以 $H_{z1} \neq 0$，$H_{z2} \neq 0$，磁场必定有纵向分量. 用类似的方法可以论证 $E_{z1} \neq 0$，$E_{z2} \neq 0$，电场的纵向分量必定也存在. 所以微带线导引的不是 TEM 型波，而是由 TE 型和 TM 型波合成的混合模. 由于微带线结构的开放性，这种混合模传播的严格理论分析十分困难. 但是，由于电场主要集中在介质区中并以 y 分量为主，E_x 分量相对于 y 分量是小量，由它引起的 H_z 分量也是小量，所以微带线导引的主模仅略微偏离 TEM 模，可视为准 TEM 模. 使用准静态分析方法可获得这个准 TEM 模的基本参量和特性.

准静态近似认为传输线的主模为 TEM 波，在此近似下微带线的传输特性可由每单位长度电容 C_m 和每单位长度电感 L_m 这两个等效电路参量求出：

波相速　$v_m = 1/\sqrt{L_m C_m}$，

传输常数　$\beta = \omega / v_m = \omega \sqrt{L_m C_m}$，

波导波长　$\lambda_m = 2\pi/\beta = 2\pi / \omega \sqrt{L_m C_m}$，

特性阻抗　$Z_m = \sqrt{L_m / C_m} = 1 / v_m C_m$.

每单位长度电容 C_m 的求解是典型的静电学问题，在以下两种情况下可以严格求解. 设想把介质基片拿掉，在 $y > 0$ 半空间完全填满空气，当不考虑导体带的厚度时，导体带与其对于金属底板的镜像构成无填充介质的平行板电容器，其每

单位长度电容用保角变换方法可严格求解,设求出的值为 C_0. 此时 TEM 波的相速为真空中的光速 $v_0=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$,特性阻抗

$$Z_0 = 1/v_0 C_0. \tag{3.7.4}$$

如果让介质基片扩展,填充整个 $y>0$ 半空间,此时每单位长度电容 C_d 为填充有均匀介质的平行板电容器问题的解,于是有

$$v_d = v_0/\sqrt{\kappa_e},\quad C_d = \kappa_e C_0,\quad Z_d = Z_0/\sqrt{\kappa_e}. \tag{3.7.5}$$

实际微带线的参数必介于这两种极端情况之间:

$$v_d < v_m < v_0,\quad C_0 < C_m < C_d,\quad Z_d < Z_m < Z_0. \tag{3.7.6}$$

可以引入一个常数 q,$0\leqslant q\leqslant 1$,和等效相对介电常数 κ_{eff},$1\leqslant\kappa_{eff}\leqslant\kappa_e$. q 称为填充因子,κ_{eff} 可用 q 表示为

$$\kappa_{eff} = 1 + q(\kappa_e - 1), \tag{3.7.7}$$

微带线的各个参量都可用 κ_{eff} 表示:

$$C_m = C_0\kappa_{eff},\quad \lambda_m = \lambda_0/\sqrt{\kappa_{eff}},\quad \beta = 2\pi/\lambda_m,$$
$$v_m = v_0/\sqrt{\kappa_{eff}},\quad Z_m = Z_0/\sqrt{\kappa_{eff}}. \tag{3.7.8}$$

这样,只要求出了 q,就可由(3.7.7)和(3.7.8)求出微带线的参量. 在窄导体带($w/h<1$)和宽导体带($w/h>1$)情况下 Wheeler 已分别导出了 q 的表达式[①],这些公式为微带线的工程设计提供了基础.

然而,准 TEM 波只是微带线传输模式的一个近似. 在低频情况下微带线的最低阶模式与 TEM 模很相似,基于准静态近似计算的微带线参量适用. 随着频率的升高,微带线传输特性与 TEM 模的偏离也随之加大,需要采用适于高频的分析方法,这就是下面要介绍的全波分析方法. 但是,到目前为止全波分析方法还不能得出以公式形式表示的精确设计方程,以下的方法也只能通过积分方程的数值解求出 κ_{eff} 作为频率的函数.

2. 全波分析

在高频情况下沿微带线传播由 TE 和 TM 模构成的混合模. 由于微带结构的开放性,此时得不到对应于金属管波导模的离散本征值,微带结构的场需用具有连续本征值谱的本征函数表示. 在此我们要介绍 Denlinger 的积分方程方法[②],这种方法具有代表性,后来发展的其他方法大多与它相似.

---

① H. A. Wheeler, Transmission properties of paralled wide strips by a conformal mapping approximation, *IEEE Trans.*, vol. MTT-12, pp. 280—289, 1964; Transmission line properties of a strip on a dielectric sheet on a plane, *IEEE Trans.*, vol. MTT-13, pp. 172—185, 1965.

② E. J. Denlinger, A frequency dependent solution for microstrip transmission lines, *IEEE Trans.*, vol. MTT-19, pp. 30—39, 1971.

首先，需要略去微带导体的厚度，令 $t=0$(图 3.29)，这样 $y>0$ 半空间的求解区域便分为两个均匀介质区，它们的分界面 $y=h$ 上在 $|x|\leqslant w/2$ 范围流有面电流. 为方便起见我们将方程(3.1.8a,b)的解写作

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_z(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\,\frac{k^2-\beta^2}{\beta}\Psi^{\mathrm{e}}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \\ H_z &= H_z(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\,\frac{k^2-\beta^2}{\beta}\Psi^{\mathrm{h}}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{3.7.9}$$

这里 $\Psi^{\mathrm{e}}(x,y)$和 $\Psi^{\mathrm{h}}(x,y)$分别是 TM 和 TE 波的标势函数，由(3.1.7a,b)场的横向分量可简化为

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{t}} &= \left[\nabla_{\mathrm{t}}\Psi^{\mathrm{e}}(x,y) - \frac{\omega\mu_0}{\beta}(\boldsymbol{a}_z\times\nabla_{\mathrm{t}})\Psi^{\mathrm{h}}(x,y)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \\ H_{\mathrm{t}} &= \left[\frac{\omega\varepsilon}{\beta}(\boldsymbol{a}_z\times\nabla_{\mathrm{t}})\Psi^{\mathrm{e}}(x,y) + \nabla_{\mathrm{t}}\Psi^{\mathrm{h}}(x,y)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7.10}$$

式(3.7.9)和(3.7.10)应用到两个区域(1 或 2)时需缀以相应的脚标，在(3.7.10)中已略去时间因子. 势函数满足的方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_i^2-\beta^2\right)\Psi_i^{\mathrm{e,h}}(x,y) = 0 \quad (i=1,2), \tag{3.7.11}$$

式中 $k_1^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\kappa_{\mathrm{e}}$，$k_2^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$，为满足场的连续性条件，纵向波数 β 在两个区域中已取得相同.

为满足 $y=h$ 面上微带区域$|x|\leqslant w/2$ 的面电流条件，需要对势函数做 Fourier 变换：

$$\widetilde{\Psi}^{\mathrm{e,h}}(\alpha,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{\mathrm{e,h}}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha x}\,\mathrm{d}x, \tag{3.7.12}$$

对面电流分布也需做 Fourier 变换，因为在 Fourier 变换域上较容易满足面电流分布的边界条件.

对势函数方程(3.7.11)做 Fourier 变换，经两次部分积分后得

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\Psi_i^{\mathrm{e,h}}(x,y)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha x} - \Psi_i^{\mathrm{e,h}}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha x}\right\}_{-\infty}^{+\infty} + \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+k_i^2-\beta^2-\alpha^2\right)\widetilde{\Psi}_i^{\mathrm{e,h}}(\alpha,y) = 0.$$

为使花括号在$|x|\to\infty$的极限下取零值，可在介质(甚至真空)中引入小的损耗，使 α 含有适当的虚部. 若令

$$P_i^2 = k_i^2-\beta^2 \quad (i=1,2), \tag{3.7.13}$$

则势函数方程(3.7.11)变换为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+P_i^2-\alpha^2\right)\widetilde{\Psi}_i^{\mathrm{e,h}}(\alpha,y) = 0. \tag{3.7.14}$$

再令

$$\gamma_1 = (P_1^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = (\alpha^2 - P_2^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7.15}$$

得(3.7.14)在两个区域中的解

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\Psi}_1^e(\alpha,y) &= A(\alpha)\sin\gamma_1 y, \\ \widetilde{\Psi}_2^e(\alpha,y) &= B(\alpha)\exp[-\gamma_2(y-h)], \\ \widetilde{\Psi}_1^h(\alpha,y) &= C(\alpha)\cos\gamma_1 y, \\ \widetilde{\Psi}_2^h(\alpha,y) &= D(\alpha)\exp[-\gamma_2(y-h)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.7.16}$$

这个解已经满足 $y=0$ 和 $y\to\infty$ 处的边界条件. 为保证区域 2 中的波幅度离开 y 方向衰减,横向波数 γ_2 须取正值,这就要求 P_2^2 取负值,即 $\beta^2>\omega^2\mu_0\varepsilon_0$,真空区域中的波便是慢波型的表面波.

解(3.7.16)中的 4 个未知常数 $A(\alpha),B(\alpha),C(\alpha),D(\alpha)$ 可通过 $y=h$ 面上的边界条件确定:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{E}_{z1}(\alpha,h) &= \widetilde{E}_{z2}(\alpha,h), \\ \widetilde{E}_{x1}(\alpha,h) &= \widetilde{E}_{x2}(\alpha,h), \\ \widetilde{H}_{z1}(\alpha,h) - \widetilde{H}_{z2}(\alpha,h) &= -\widetilde{J}_x(\alpha), \\ \widetilde{H}_{x1}(\alpha,h) - \widetilde{H}_{x2}(\alpha,h) &= \widetilde{J}_z(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{3.7.17}$$

这里

$$\widetilde{J}_x(\alpha) = I_{x0}\widetilde{I}_x(\alpha), \quad \widetilde{J}_z(\alpha) = I_{z0}\widetilde{I}_z(\alpha) \tag{3.7.18}$$

分别为微带上的横向和纵向面电流密度的 Fourier 变换式,I_{x0} 和 I_{z0} 分别为其幅值. 由于面电流只在 x 坐标的导体带区域出现,通过 Fourier 变换后变量 x 已不出现,边界条件在 Fourier 变换域中变为(3.7.17)后要容易处理些. 将解(3.7.16)代入(3.7.9)和(3.7.10)式可求两个区域中场的纵向和横向分量的 Fourier 变换式,再代入(3.7.17)的 4 个方程式. 在前两个方程式中消去 $A(\alpha)$ 和 $C(\alpha)$,再代入后两个方程便可解出 $B(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 作为 $\widetilde{I}_x(\alpha)$ 和 $\widetilde{I}_z(\alpha)$ 的函数.

与准静态近似类似,通过纵向传输常数 β 引入 κ_{eff}:

$$\beta = 2\pi/\lambda_m = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\kappa_{\text{eff}}}. \tag{3.7.19}$$

$\beta(\omega)$,即 $\kappa_{\text{eff}}(\omega)$,须运用微带导体上的以下边界条件确定:

$$\left.\begin{aligned} &E_{z2}(x,h) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}H_{z2}(x,y)\bigg|_{y=h} = 0 \end{aligned} \quad (-w/2 \leqslant x \leqslant w/2). \right\} \tag{3.7.20}$$

为此要先通过逆变换求出 $\Psi^{e,h}(x,y)$:

$$\Psi^{e,h}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\Psi}^{e,h}(\alpha,y)e^{j\alpha x}\,d\alpha. \tag{3.7.21}$$

最重要的模是略偏离 TEM 模的基模，根据准静态分析所知 TEM 模的特征，基模的势函数对于 x 坐标应分别具有以下的奇偶性：

$$\Psi^{e}(x)：偶；\Psi^{h}(x)：奇.$$

考虑到以上奇偶性，由逆变换(3.7.21)求得真空区的纵向场分量为

$$E_{z2}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}\,\frac{P_2^2}{\beta}B(\alpha)\cos\alpha x\cdot\exp[-\gamma_2(y-h)]\mathrm{d}\alpha,\qquad(3.7.22)$$

$$H_{z2}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{P_2^2}{\beta}D(\alpha)\sin\alpha x\cdot\exp[-\gamma_2(y-h)]\mathrm{d}\alpha.\qquad(3.7.23)$$

上两式中的 $B(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 已经通过运用边界条件(3.7.17)由 $\tilde{J}_x(\alpha)$ 和 $\tilde{J}_z(\alpha)$ 表示，在(3.7.18)式中 $\tilde{I}_x(\alpha)$ 和 $\tilde{I}_z(\alpha)$ 为面电流的分布函数，须假定为已知，I_{x0} 和 I_{z0} 是与 α 无关的幅度常数. 将(3.7.22)和(3.7.23)式分别代入边界条件(3.7.20)的两式，得未知幅度常数 I_{x0} 和 I_{z0} 的二元联立方程组：

$$\left.\begin{aligned}&I_{x0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}}{\Delta}\left[F_1b_{22}+\frac{\beta\alpha}{P_1^2}b_{12}\right]\tilde{I}_x(\alpha)\cos\alpha x\cdot\mathrm{d}\alpha\\&\qquad-I_{z0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_{12}}{\Delta}\tilde{I}_z(\alpha)\cos\alpha x\cdot\mathrm{d}\alpha=0,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(|x|\leqslant w/2),\\&I_{x0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}\gamma_2}{\Delta}\left[\frac{\beta\alpha}{P_1^2}b_{11}-F_1b_{21}\right]\tilde{I}_x(\alpha)\sin\alpha x\cdot\mathrm{d}\alpha\\&\qquad-I_{z0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_2b_{11}}{\Delta}\tilde{I}_z(\alpha)\sin\alpha x\cdot\mathrm{d}\alpha=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.7.24)$$

其中

$$\begin{aligned}b_{11}&=-b_{22}=\alpha[(P_2/P_1)^2-1],\\b_{12}&=\frac{\omega\mu_0\gamma_1}{\beta}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2\tan\gamma_1h-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right],\\b_{21}&=\frac{\omega\kappa_e\varepsilon_0\gamma_1}{\beta}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2\cot\gamma_1h+\frac{1}{\kappa_e}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right],\\F_1&=\omega\mu_0\gamma_1\tan\gamma_1h/P_1^2,\\\Delta&=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}.\end{aligned}$$

在(3.7.24)式的积分号中含有未知函数 $\beta(\omega)$，所以这是一对耦合的积分方程，在电流分布函数 $\tilde{I}_x(\alpha)$ 和 $\tilde{I}_z(\alpha)$ 为已知的情况下求解这一对积分方程便可得 $\beta(\omega)$，以及 $\kappa_{\mathrm{eff}}(\omega)$.

通常微带线的宽度 w 远小于波长，此时可以忽略导体带上的横向电流，并且可以只要求在带的中心 $x=0$ 处满足边界条件(3.7.20). 在积分方程(3.7.24)

中设 $I_{x0}=0$ 和 $x=0$,这对耦合的积分方程便化为单个的积分方程:

$$\int_0^\infty \frac{\gamma_1 Z\tilde{I}_x(S)}{(YH)^2+\frac{\kappa_e Z}{\kappa_{eff}}\lambda_0^2\gamma_1\left(Q\cot\gamma_1 h-\frac{\gamma_2}{\kappa_e\gamma_1}\right)}\mathrm{d}S=0, \tag{3.7.25}$$

其中

$$S=\alpha w,\ H=\alpha\lambda_0,\ Z=Q\tan\gamma_1 h+\frac{\gamma_2}{\gamma_1},\ Y=\frac{\kappa_e-1}{\kappa_e-\kappa_{eff}},\ Q=\frac{\kappa_{eff}-1}{\kappa_e-\kappa_{eff}}.$$

运用数值方法求解积分方程(3.7.25),对于 $\kappa_e=11.7$,$w/h=0.96$,$h=0.317$ cm 的微带线,所得 $\kappa_{eff}(f)$ 曲线示于图 3.31,$f=\omega/2\pi$.

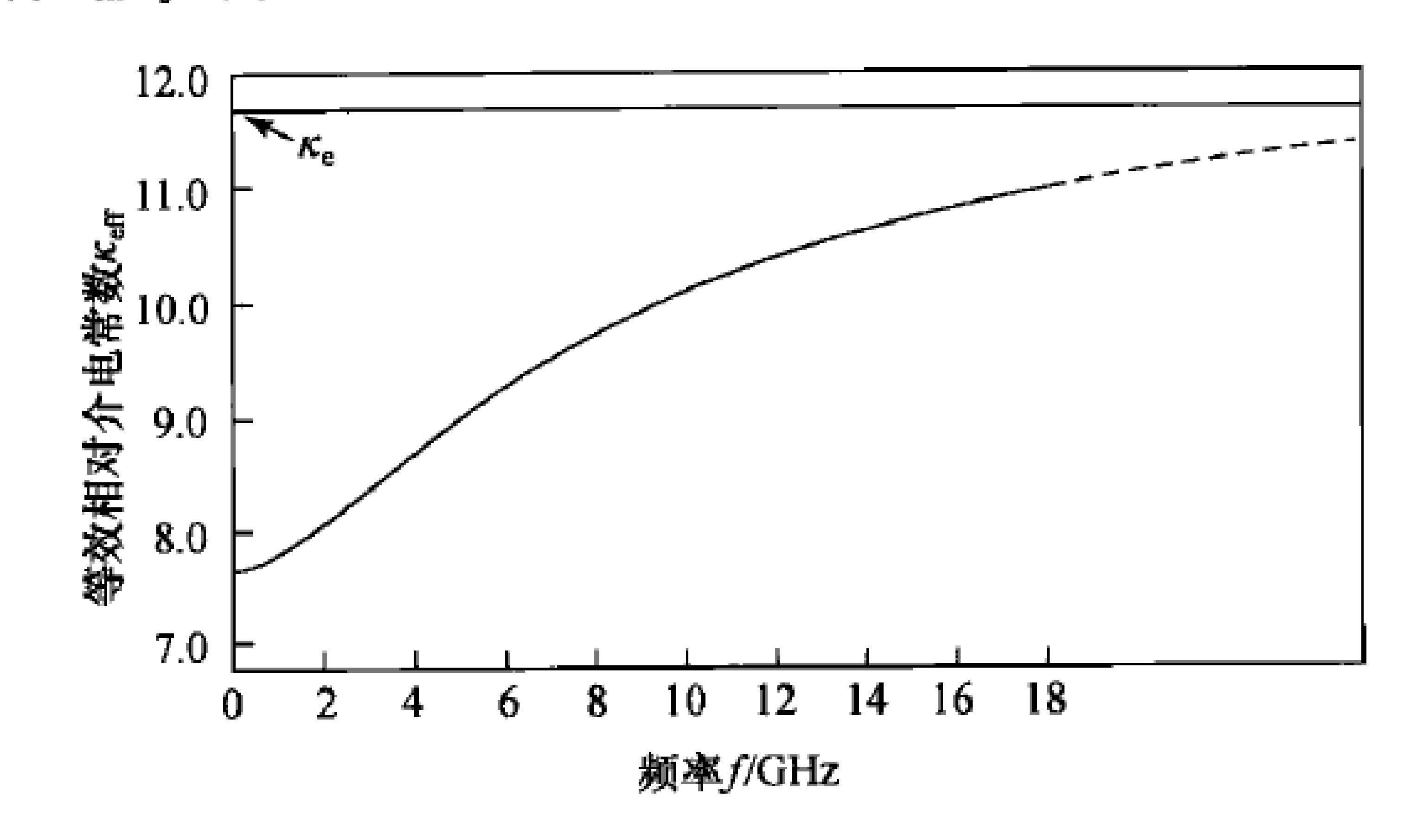


图 3.31 由积分方程(3.7.25)解出的微带线等效相对介电常数与频率的关系

参考文献

[1] Waldron R A. Theory of guided electromagnetic waves. §Ⅳ.B, Van Nostrand, 1969.[中译本:被导电磁波原理.徐鲤庭译.北京:人民邮电出版社,1977.]

[2] Collin R E. Foundations for microwave engineering. McGraw-Hill,1966: ch. 3.[中译本:微波工程基础.吕继尧译.北京:人民邮电出版社,1981.]

[3] Ishimaru A. Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering. Prentice-Hall,1991: §4.10.

[4] Collin R E. Field theory of guided waves. McGraw-Hill,1960: ch. 11.[中译本:导波场论. 侯元庆译. 上海:上海科学技术出版社,1966.]

[5] Wait J R. (Lectures on) Wave propagation theory. Pergamon Press,1981: ch. 5.

[6] Stratton J A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill,1941: §9.13.[中译本:电磁理论. 何国瑜译. 北京:北京航空学院出版社,1986.]

[7] Sommerfeld A. Electrodynamics. Academic Press,1952: §22, §23.

[8] Kong J A. Electromagnetic wave theory. John Wiley & Sons,1986：§3.6.
[9] Jackson J D. Classical electrodynamics, 2nd ed. John Wiley & Sons, 1975：§8.10.[中译本：经典电动力学. 朱培豫译. 北京：人民教育出版社,1978.]
[10] Adams M J. An introduction to optical waveguides. John Wiley & Sons,1981：ch.7.
[11] Marcuse D. Light transmission optics, 2nd ed. Van Nostrand, 1982：ch.8.
[12] 龚中麟,徐承和. 电磁理论研究导引. 北京：北京大学出版社,1994：第3章.
[13] Brillouin L. Wave propagation in periodic structures. Electric filters and crystal lattices, McGraw-Hill,1946.
[14] Watkings D A. Topics in electromagnetic theory, John Wiley & Sons,1958：ch.1.
[15] Collin R E. Foundations for microwave engineering. McGraw-Hill,1966：ch.8.[中译本：微波工程基础,吕继尧译. 北京：人民邮电出版社,1981.]
[16] Ishimaru A. Electromagnetic wave propagation, Radiation, and Scattering. Prentice-Hall,1991：ch.7.
[17] Watkings D A. Topics in electromagnetic theory. John Wiley & Sons,1958：ch.2.
[18] Kittel C. Introduction to solid state physics. 4th ed. John Wiley & Sons,1971：Advanced Topics A.
[19] Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals. John Wiley & Sons,1984：ch.6.
[20] Gupta K C. Garg R, Bahl I J. Microstrip lines and slotlines. Artech,1979：ch.1,ch.2.

第四章　电磁波的辐射

§4.1　电磁辐射的理论基础

1. 自由空间并矢 Green 函数. 辐射条件

电磁辐射的基本问题是局限于空间局部区域内的源在远离源的空间区域所产生的场的问题，这个问题原则上可以先利用自由空间三维标量波动方程的 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 由非齐次波动方程解出 Lorenz 势，然后再通过势函数求出电磁场. 但是在许多实际问题中常常希望直接得到电磁场的矢量表达式，为了直接给出电磁场的矢量表达式需要用到矢量波动方程的矢量点源影响函数，这种函数称为并矢 Green 函数(dyadic Green's functions)[1].

例如，考虑电型源在无界的自由空间区域产生的场，由 Maxwell 方程式

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\\&\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\end{aligned}\right\}\tag{4.1.1}$$

可导出电磁场矢量所满足的波动方程式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-k_0^2\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\tag{4.1.2}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}-k_0^2\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\tag{4.1.3}$$

其中 $k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$. 由于矢量波动方程(4.1.2)和(4.1.3)的直接求解相当困难，我们仍可以通过矢势 $\boldsymbol{A}$ 表示电磁场

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\left[1+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\\&\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\end{aligned}\right\}\tag{4.1.4}$$

而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 则可通过(1.2.20)式给出的自由空间标量 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的积分表示为(1.2.22)式，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\mu_0\iiint g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'.$$

现在设 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 是位于 $\boldsymbol{r}_0'$ 点的 x 方向点源

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0')\boldsymbol{a}_x,$$

代入(1.2.22)式积分可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega} g(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0') \boldsymbol{a}_x,$$

上式代入(4.1.4)第一式，求出的电场可用符号表示为

$$\boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[1 + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right] g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_x, \tag{4.1.5a}$$

这里为了方便起见已将源点坐标 $\boldsymbol{r}_0'$ 改为 $\boldsymbol{r}'$. (4.1.5a)式是矢量波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k_0^2\boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_x \tag{4.1.6a}$$

的解，$\boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 可以称为：当点源的指向沿 x 方向时矢量波动方程的矢量 Green 函数. 类似地也可以作出沿 y 方向和 z 方向取向的点源的矢量 Green 函数

$$\boldsymbol{G}_0^{(y)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[1 + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right] g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_y, \tag{4.1.5b}$$

$$\boldsymbol{G}_0^{(z)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[1 + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right] g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_z, \tag{4.1.5c}$$

它们分别是相应的矢量波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0^{(y)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k_0^2\boldsymbol{G}_0^{(y)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_y, \tag{4.1.6b}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0^{(z)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k_0^2\boldsymbol{G}_0^{(z)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_z \tag{4.1.6c}$$

的解.

用上面的三个矢量 Green 函数(4.1.5a,b,c)可以按如下方式构成一个并矢函数

$$\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{G}_0^{(y)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{G}_0^{(z)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{a}_z, \tag{4.1.7}$$

$\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 称为自由空间并矢 Green 函数. 将 $\boldsymbol{G}_0^{(x)}$, $\boldsymbol{G}_0^{(y)}$ 和 $\boldsymbol{G}_0^{(z)}$ 所满足的矢量波动方程(4.1.6a,b,c)分别从右方外乘以 $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，再将所得的三个方程相加就得到 $\mathbf{G}_0$ 所满足的方程式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k_0^2\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathbf{I}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{4.1.8}$$

这里 $\mathbf{I}$ 为单位并矢. 将(4.1.5a,b,c)式代入(4.1.7)式不难得到 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的表示式

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \left[1 + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right] g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathbf{I} \\ &= \left[\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right] g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}').\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

在下一小节中我们将用 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 构成矢量波动方程(4.1.2)的无界区域解.

值得注意的是波动方程在无界区域中的解不是唯一的，因为指数取 $e^{jk_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 形式的解仍然满足波动方程. 为保证波动方程在无界区域中解的唯一性，Sommerfeld 建议了一个在∞远处解应当满足的附加条件[2]，这个条件现在通称为 Sommerfeld 辐射条件. 例如，对于 $\boldsymbol{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 所满足的矢量波动方程(4.1.6a)，

辐射条件可写为

$$\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times \mathbf{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\mathrm{j}k_0\boldsymbol{a}_r\times \mathbf{G}_0^{(x)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=0, \tag{4.1.10}$$

这个条件只能被

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

形式的解满足,但不能被

$$\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

形式的解满足,所以辐射条件可保证解为物理上合理的出射球波.类似地,自由空间的并矢 Green 函数 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$所满足的并矢波动方程(4.1.8)的辐射条件为

$$\lim_{r\to\infty} r[\nabla\times \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\mathrm{j}k_0\boldsymbol{a}_r\times \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=0. \tag{4.1.11}$$

由于我们所选用的自由空间标量 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为出射球波解,故(4.1.9)式给出的 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足辐射条件(4.1.11)式.

2. 局域分布源的辐射

电场的矢量波动方程(4.1.2)

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-k_0^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

的无界区域解容易利用 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$得出,为此将上式右方的电流表示成

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=\iiint\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=\iiint\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V',$$

然后将方程式(4.1.8)代入上式,与(4.1.2)式比较后即可得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=-\mathrm{j}\omega\mu_0\iiint\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\\&=-\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right)\cdot\iiint\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'.\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

下面我们利用(4.1.12)式来求出分布于空间有限区域内的电型源的辐射场.当辐射源局限于小区域内而观察点远离源区时,由坐标原点引向观察点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和由源点 $\boldsymbol{r}'$引向观察点的矢径 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$几乎是平行的(图 4.1),在 $r\gg r'$的条件下有

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r-\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r. \tag{4.1.13}$$

图 4.1 局域分布源的辐射

将(4.1.13)式代入(4.1.12)式的积分,在 $k_0r\gg1$ 的条件下这个积分简化为

$$\iiint \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')dV' \approx \frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')e^{jk_0\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}dV', \tag{4.1.14}$$

得到这个近似式时对于指数项中的$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$保留了近似式(4.1.13)的第二项,但对于分母中的$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$则略去了第二项. 定义(4.1.14)式右方的矢量积分为

$$\boldsymbol{N}(\theta,\phi) = \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')e^{jk_0\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}dV', \tag{4.1.15}$$

$\boldsymbol{N}(\theta,\phi)$称为辐射积分. 满足条件 $r\gg r'$及 $k_0r\gg1$ 的空间区域称为远区,局域源在远区中产生的电场可用辐射积分表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_0\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right)\cdot\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}\boldsymbol{N}(\theta,\phi). \tag{4.1.16}$$

在 $k_0r\gg1$ 的条件下(4.1.16)式中求散度时可以只保留最大的项,即 $1/r$ 项,在这个近似下求散度的运算可简化为

$$\nabla\cdot\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}\boldsymbol{N}(\theta,\phi) \approx \frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}[-jk_0\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{N}(\theta,\phi)].$$

在远区场中也可仅保留 $1/r$ 项,利用辐射积分求远区电场的运算过程就很简单,结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &\approx -j\omega\mu_0\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}(\mathbf{I}-\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{a}_r)\cdot\boldsymbol{N}(\theta,\phi)\\ &= -j\omega\mu_0\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}[\boldsymbol{a}_\theta N_\theta(\theta,\phi)+\boldsymbol{a}_\phi N_\phi(\theta,\phi)].\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

远区中的磁场则可通过 Maxwell 方程式由(4.1.17)式求出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{-j\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E} \approx -jk_0\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_r\times(\boldsymbol{a}_\theta N_\theta+\boldsymbol{a}_\phi N_\phi)\\ &= -jk_0\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\phi N_\theta-\boldsymbol{a}_\theta N_\phi) = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{E},\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

其中

$$Z_0\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\,\Omega \approx 120\pi\,\Omega \tag{4.1.19}$$

为电磁场振幅之比,称为自由空间的波阻抗. (4.1.17)和(4.1.18)式表明 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 是彼此正交的,而 Poynting 矢量方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向一致,由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均仅含有 $1/r$ 项,电磁波所携带的能量最终可以离开源而辐射至无穷远处,所以称为辐射电磁波.

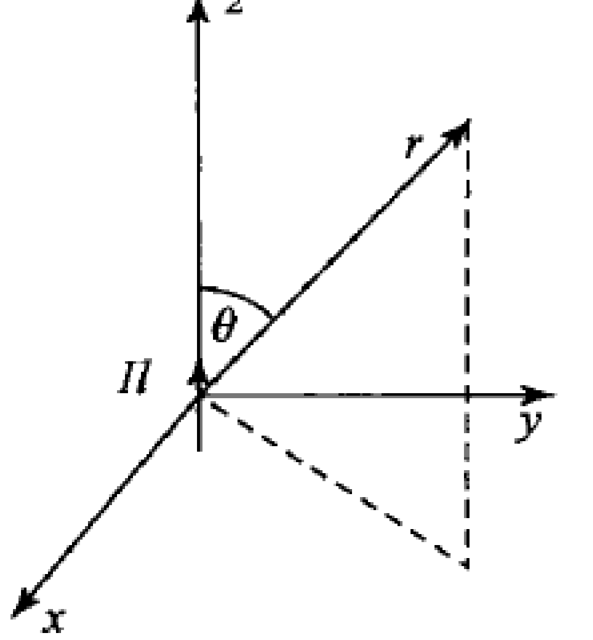


图 4.2 短线电流元的辐射

最简单的辐射源是相对于波长 λ_0 为极短的线电源元,$Il=I_0\cdot le^{j\omega t}$,$l\ll\lambda_0=2\pi c/\omega$. 短线电流元也可看作是由在线电流元两端集聚的异号点电荷$\pm q$ 组成的振荡电偶极子,电偶极矩 $p=ql$,$q=I/j\omega$,$Il=j\omega p=$

$\partial p/\partial t$,因此短电流元亦常常被称作 Hertz 电偶极振子(或电振子),它是一切形状复杂的线天线的基本单元.设电流元放在原点且沿 $+z$ 轴取向(图 4.2),则

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{a}_z I_0 l \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\delta(\boldsymbol{r}'), \tag{4.1.20}$$

上式代入(4.1.12)式可求出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right)\cdot\boldsymbol{a}_z\frac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\\ &= \frac{-\mathrm{j}\omega\mu_0 Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\left[\boldsymbol{a}_r\left(\frac{1}{k_0^2 r^2}+\frac{\mathrm{j}}{k_0 r}\right)2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\left(\frac{1}{k_0^2 r^2}+\frac{\mathrm{j}}{k_0 r}-1\right)\sin\theta\right].\end{aligned} \tag{4.1.21a}$$

通过 Maxwell 方程式由电场可求出磁场

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{j}k_0 Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi\left(1-\frac{\mathrm{j}}{k_0 r}\right)\sin\theta. \tag{4.1.21b}$$

(4.1.21a,b)式是在远区和近区都正确的场表达式.

对于远区中的辐射场,$k_0 r\gg 1$,在(4.1.21a,b)式中只需保留 $1/r$ 项,得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_\theta\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\sin\theta, \tag{4.1.22a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\phi\frac{-\mathrm{j}k_0 Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\sin\theta = \boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{Z_0}E_\theta. \tag{4.1.22b}$$

这就是熟知的电偶极子辐射场的表示式.

3. 天线的基本概念

天线是发射或接收定向电磁辐射的器件,为了表征天线的特性而定义了一些参量,这些参量主要是针对天线处于发射的工作状态而引入的,下面以 Hertz 电振子为例来说明这些参量的定义和意义.

天线的特性主要是由它的辐射场的空间分布决定的,用图形示出的辐射场(或时间平均能流密度)的空间分布称为天线的辐射图(radiation patterns),这是一种三维的空间图形.通常为了绘制的方便要分别作出在两个选定的正交平面内的分布图,这两个选定的平面分别称为 E 平面和 H 平面.E 平面是由辐射场的电矢量和最大辐射方向所确定的平面.在图 4.2 所示的坐标系中 Hertz 电振子的最大辐射方向为 $\theta=90°$方向,所以 E 平面是通过 z 轴的任意平面.H 平面定义为磁场矢量与最大辐射方向所确定的平面,不难看出 Hertz 电振子的 H 平面为 xy 平面,因为辐射场分布与 ϕ 角无关,辐射场在 H 平面内为各向同性分布,辐射图为一圆,如图 4.3(b)所示.通常辐射图所绘的场分布函数是归一化的,例如 Hertz 电振子的 E 平面辐射图函数为

$$\mathrm{F}(\theta,\phi) = \left|\frac{E_\theta(\theta,\phi)}{E_{\theta\max}}\right|_{\phi=\mathrm{const.}} = \sin\theta, \tag{4.1.23}$$

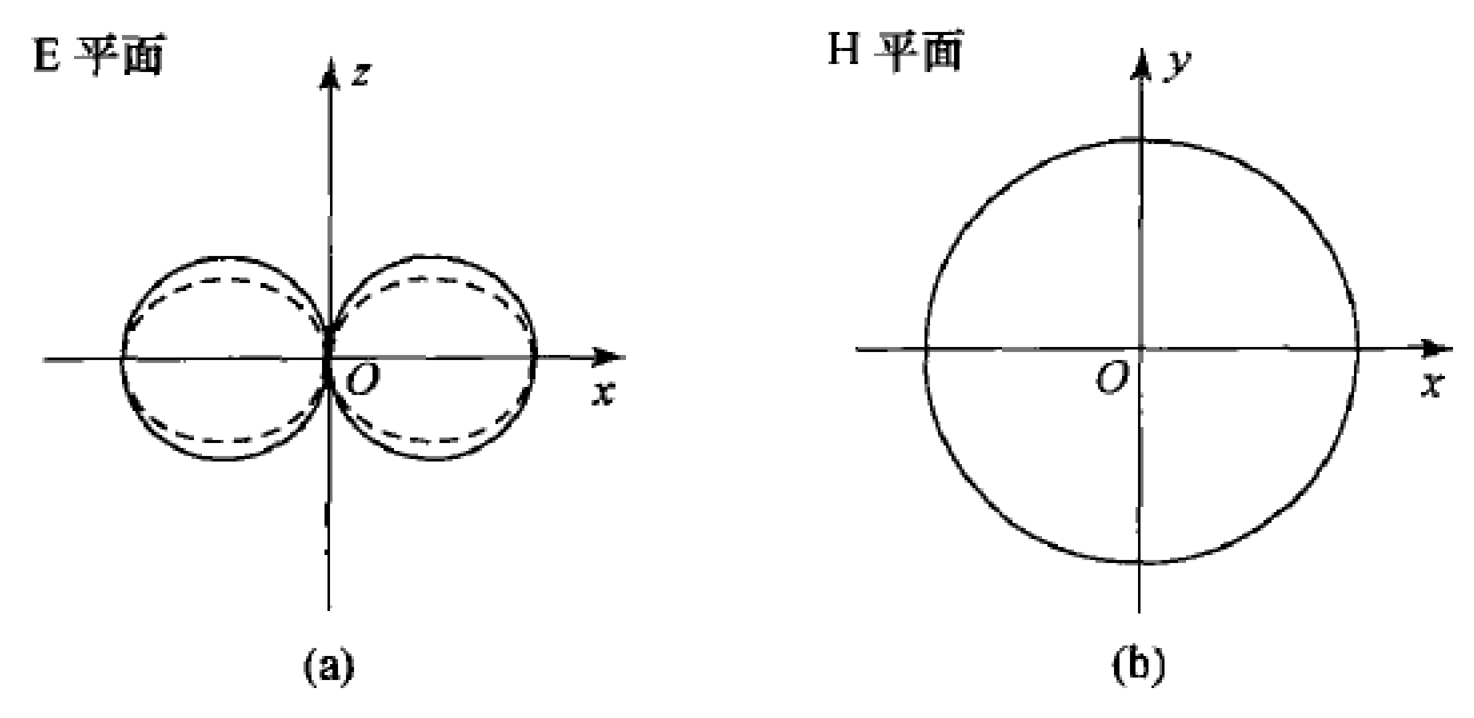


图 4.3 Hertz 电振子的 E 平面(a)和 H 平面(b)辐射图

这个函数在图 4.3(a)上用实线示出，自然，图 4.3(b)所示的 H 平面辐射图函数也是归一化的. 根据 E 平面和 H 平面辐射图就可绘出三维的辐射图，现在由于 H 面内的辐射图为一圆，将 E 平面辐射图绕 z 轴旋转所得的三维图形就是 Hertz 电振子的三维辐射图. 辐射图也可用时间平均能流密度的归一化空间分布函数绘出，Hertz 电振子的 E 平面辐射功率图的归一化分布函数是

$$U(\theta,\phi)=\left|\frac{\langle \boldsymbol{S}(\theta,\phi)\rangle}{\langle \boldsymbol{S}_{\max}\rangle}\right|_{\phi=\text{const.}}=\sin^2\theta, \tag{4.1.24}$$

这里 $\langle \boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$ 为复数 Poynting 矢量的实部，函数(4.1.24)式在图 4.3(a)上用虚线示出.

绝大多数天线的使用目的是希望将电磁能量集中地辐射到确定的方向上，表示辐射能量集中程度的参量称为方向性(directivity). 方向性为一空间分布函数 $D(\theta,\phi)$，定义为天线在远区半径为 r 的球面上确定的空间方向 (θ,ϕ) 的时间平均辐射功率密度与一总辐射功率相同的虚构的各向同性辐射器在该处的时间平均辐射功率密度之比：

$$D(\theta,\phi)=\frac{|\langle \boldsymbol{S}(r,\theta,\phi)\rangle|}{P_r/4\pi r^2}, \tag{4.1.25}$$

这里 $\langle \boldsymbol{S}(r,\theta,\phi)\rangle$ 为半径 r 的球面上 (θ,ϕ) 方向的时间平均辐射能流密度，P_r 为天线的时间平均总辐射功率. 对于 Hertz 电振子可计算出

$$P_r=\oiint_{\text{半径}r\text{球面}}\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=Z_0\,\frac{k_0^2(I_0 l)^2}{12\pi}, \tag{4.1.26}$$

代入(4.1.25)式可求出 Hertz 电振子的方向性函数为

$$D(\theta,\phi)=\frac{3}{2}\sin^2\theta. \tag{4.1.27}$$

通常感兴趣的是 $D(\theta,\phi)$ 的最大值并将它用分贝表示，由(4.1.27)式可求出

$$(D_{\max})_{\mathrm{dB}}=10\lg D_{\max}=10\lg 1.5=1.76\ \mathrm{dB}, \tag{4.1.28}$$

这个值称为最大方向性，通常简称为方向性.

由于天线导体的损耗，输入到天线上的部分功率将消耗在天线上，因此天线辐射的平均功率 P_r 总是小于天线的输入平均功率 P_{in} 而有

$$P_r = \eta P_{in}, \tag{4.1.29}$$

η 称为天线效率，$\eta \leqslant 1$. 天线的另一重要参量增益(gain) $G(\theta,\phi)$ 定义为

$$G(\theta,\phi) = \frac{|\langle \boldsymbol{S}(r,\theta,\phi)\rangle|}{P_{in}/4\pi r^2} = \eta D(\theta,\phi), \tag{4.1.30}$$

通常感兴趣的也是它的用分贝表示的最大值

$$(G_{max})_{dB} = 10\lg(\eta D_{max}), \tag{4.1.31}$$

增益的最大值通常也被简称为增益.

只有当天线与它的馈电系统之间匹配良好时，天线才能被有效地激励并辐射出电磁能，为研究天线与馈电系统之间的匹配需要引入天线的输入阻抗概念. 天线的输入阻抗定义为天线馈电端的复数电压与复数电流之比，它的实部和虚部分别称为输入电阻和输入电抗，它们通常是频率的复杂函数，而且是决定天线工作带宽的主要因素. 输入电阻由天线辐射的功率及天线上损耗功率之和决定，输入电抗则与天线附近的近区场中的储能有关(复数 Poynting 定理，见 § 1.1). 天线辐射的功率可用一个等效的电阻 R_r 表示，称为辐射电阻：

$$R_r = 2P_r/I_0^2, \tag{4.1.32}$$

这里 I_0 是天线馈电端的电流振幅. 由于天线存在损耗，R_r 并不等于天线的输入电阻，但对于低损耗的天线可以认为 R_r 近似等于输入电阻. 天线输入阻抗的计算由于涉及近区场，一般说来是个困难的问题，我们将在下一节中继续讨论.

4. 半波天线

实际中广泛应用的线天线是长度为半波长的半波天线，从中心对称地馈电(图 4.4). 当导线的半径远小于波长时可以认为天线上的电流是沿天线轴流动的线电流，而且可以假定电流沿天线轴线的分布为正弦形分布：

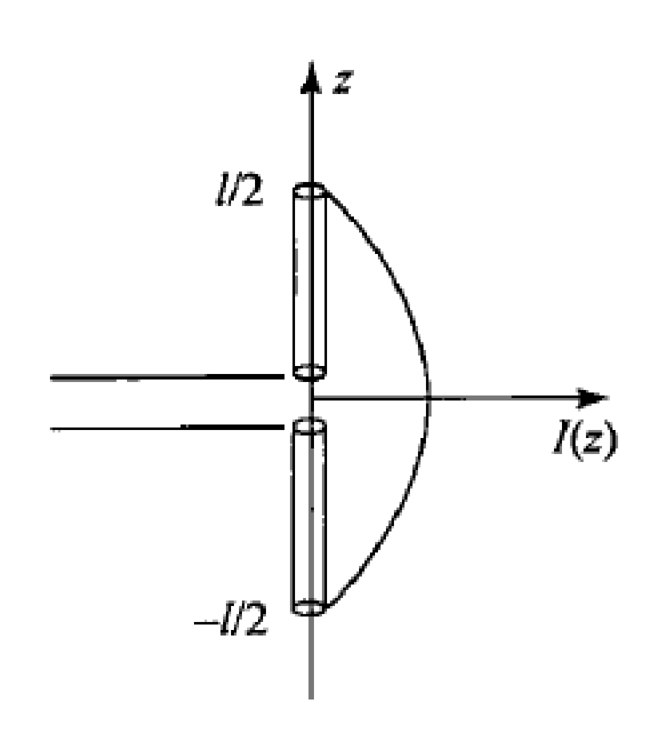


图 4.4 半波天线上的辐射电流分布

$$I(z) = I_0 \sin\left[k_0\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right], \tag{4.1.33}$$

在下一节中我们将会看到以上的假定是正确的. 对于图 4.4 所选定的坐标系，天线上的电流密度分布可写作

$$\boldsymbol{J}(z) = \boldsymbol{a}_z I_0 \sin\left[k_0\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right]\delta(x)\delta(y), \tag{4.1.34}$$

上式代入(4.1.15)式可求出辐射积分

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}_z\frac{2I_0}{k_0\sin^2\theta}\left[\cos^2\left(k_0\frac{l}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(k_0\frac{l}{2}\right)\right],$$

再以 $l=\lambda_0/2, k_0 l/2=\pi/2$ 代入得

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}_z\frac{2I_0}{k_0\sin^2\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right). \tag{4.1.35}$$

将(4.1.35)式给出的 $\boldsymbol{N}$ 分解为球坐标分量，代入(4.1.17)和(4.1.18)式后即得半波天线的辐射场

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{a}_\theta\frac{\mathrm{j}Z_0I_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r},\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{Z_0}E_\theta,\end{aligned}\right\} \tag{4.1.36}$$

半波天线的基本参量可由此求出.

显然，E 平面场辐射图函数为

$$F(\theta,\phi)=\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|, \tag{4.1.37}$$

不难看出最大辐射方向仍在 $\theta=\pi/2$. 辐射功率的计算则较为复杂，由于此问题至为重要，我们在这里给出详细的计算过程. 将(4.1.36)式代入(4.1.26)式得

$$P_r=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Z_0I_0^2}{(2\pi r)^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{Z_0I_0^2}{4\pi}2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$$

作变量替换，令 $\tau=\cos\theta, \mathrm{d}\tau=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，则上面的积分可化为

$$P_r=\frac{Z_0I_0^2}{2\pi}\int_1^0\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)}{1-\tau^2}(-\mathrm{d}\tau)=\frac{Z_0I_0^2}{4\pi}\int_0^1\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)}{1+\tau}+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)}{1-\tau}\right]\mathrm{d}\tau.$$

再令 $v=1-\tau, w=1+\tau$，得

$$P_r=\frac{Z_0I_0^2}{4\pi}\left[\int_1^0\frac{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\right)}{v}\mathrm{d}v+\int_1^2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{w}\mathrm{d}w\right]$$

$$=\frac{Z_0I_0^2}{4\pi}\int_0^2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\right)}{v}\mathrm{d}v=\frac{Z_0I_0^2}{4\pi}\int_0^2\frac{1-\cos\pi v}{2v}\mathrm{d}v.$$

再一次改换变量，令 $u=\pi v$，最后得

$$P_r=\frac{Z_0I_0^2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{u}\mathrm{d}u=\frac{Z_0I_0^2}{8\pi}\mathrm{Cin}(2\pi), \tag{4.1.38}$$

上式中的函数 $\mathrm{Cin}(x)$ 定义为

$$\mathrm{Cin}(x)=\int_0^x\frac{1-\cos u}{u}\mathrm{d}u, \tag{4.1.39}$$

这是一个已制成表的函数,它与另一已制成表的余弦积分 $\mathrm{Ci}(x)$函数的关系为

$$\mathrm{Cin}(x)=\gamma+\ln x-\mathrm{Ci}(x). \tag{4.1.40}$$

余弦积分 $\mathrm{Ci}(x)$定义为

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u, \tag{4.1.41}$$

而

$$\gamma=0.5772\cdots$$

为 Euler 常数. 经查表①求出 $\mathrm{Cin}(2\pi)=2.44$.

由(4.1.36)式和(4.1.38)式就不难求出半波天线的方向性和辐射电阻:

$$D_{\max}=\frac{|\langle \boldsymbol{S}(r)_{\max}\rangle|}{P_r/4\pi r^2}=\frac{(Z_0/8\pi^2)I_0^2}{(Z_0/8\pi)I_0^2(2.44)}4\pi=1.64, \tag{4.1.42}$$

$$R_r=\frac{2P_r}{I_0^2}=\frac{2(Z_0/8\pi)I_0^2(2.44)}{I_0^2}=73.2\,\Omega. \tag{4.1.43}$$

正如本节第 3 小节所指出的,从天线的远区辐射场不能得到天线输入电抗的知识. 对于细线天线求输入阻抗的一种有效方法是感应电动势法[3],由感应电动势法求出的半波细线天线的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}}=(73.2+\mathrm{j}42.5)\,\Omega, \tag{4.1.44}$$

关于天线辐射电阻的结果与根据辐射能计算的(4.1.43)式完全一致. (4.1.44)表明当天线的长度略小于半波长时天线的输入电抗可变为零,这时天线上激励的电流达到极大而产生最强的辐射.

5. 圆环上行波线电流的辐射

半波天线上的电流分布是驻波型的,电流波在天线两臂的开路端受到反射而形成驻波,电流幅值在谐振频率达到最大,这一类天线的工作带宽较窄. 另一类天线是行波天线,其上的行波电流产生辐射,由于不发生谐振,这类天线的工作带宽一般较宽,长线天线、菱形天线和螺旋天线属于行波天线.

作为行波电流辐射的例,我们计算圆环上均匀行波电流的辐射场. 圆环半径为 a,圆环面取作 xy 平面,原点取在圆心,坐标系示于图 4.5. 设导线截面很小,可视为线电流,电流在圆环上均匀,设为

$$I=I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_0 a\phi)}, \tag{4.1.45}$$

ϕ 为从 x 轴起始的 xy 平面上的方位角. 电流波在圆环上保持恒速,而且频率选

① $\mathrm{Ci}(x)$及 $\mathrm{Cin}(\pi x)$的数值表及公式(4.1.40)可见,例如,M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, ch. 5, Dover, 1965.

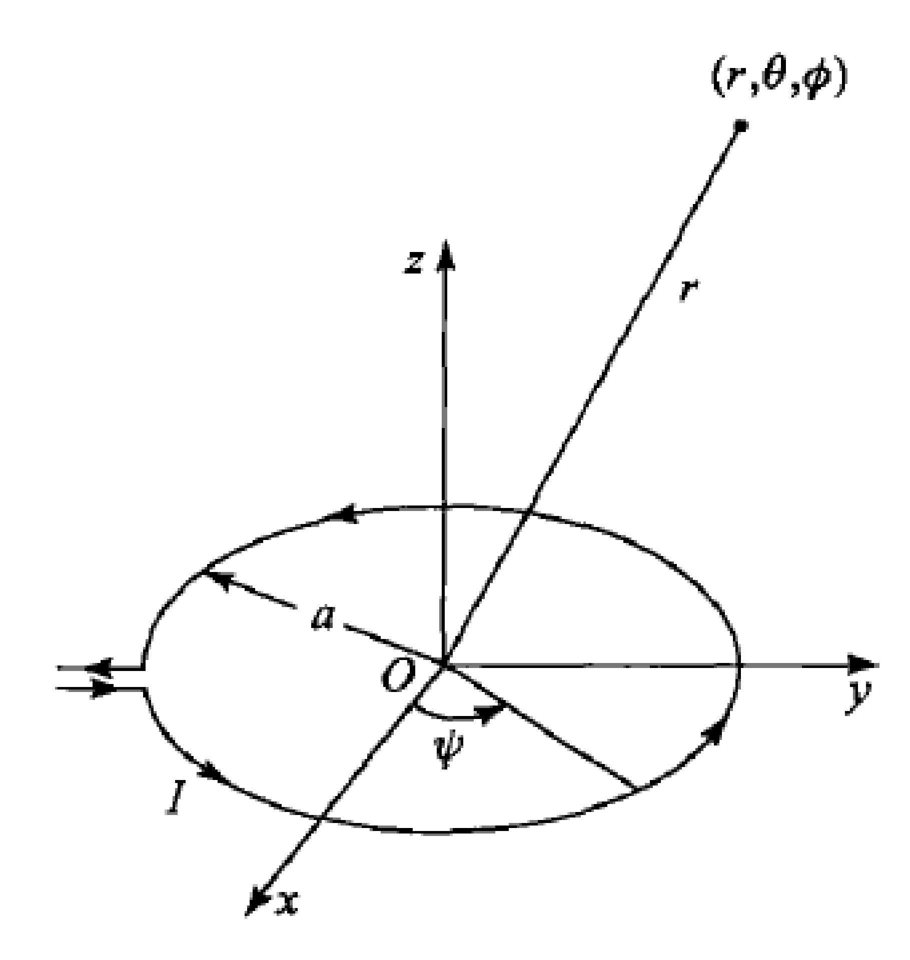


图 4.5　圆环上行波线电流的辐射

取使 $k_0a=1$，此条件是依据螺旋天线工作于轴模选取，如此设的圆环行波电流近似于螺旋天线一匝上的电流，在后面我们还会稍作解释.

远区的辐射电磁场由(4.1.17)和(4.1.18)式给出，为此需计算辐射积分的球坐标分量 $N_\theta(\theta,\phi)$ 和 $N_\phi(\theta,\phi)$. 由(4.1.15)式，先在圆环横截面上积分，变为线积分后将(4.1.45)式代入，得

$$N_\theta(\theta,\phi) = (-I_0a\cos\theta)\int_0^{2\pi}\sin(\psi-\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sin\theta\cdot\cos(\psi-\phi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}\mathrm{d}\psi$$
$$= (-I_0a\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})\int_{-\phi}^{2\pi-\phi}\sin(\psi-\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sin\theta\cdot\cos(\psi-\phi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\psi-\phi)}\mathrm{d}(\psi-\phi).$$

作变量变换 $\psi-\phi=\psi'$，然后再将 ψ' 改写作 ψ，考虑到被积函数的周期性，将积分限平移到区间[0,2π]，得

$$N_\theta(\theta,\phi) = (-I_0a\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})\int_0^{2\pi}\sin\psi\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sin\theta\cdot\cos\psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}\mathrm{d}\psi.$$

将被积函数中的复指数函数展开为三角函数，仅偶函数项积分不为零，最终得到

$$N_\theta(\theta,\phi) = (4\mathrm{j}I_0a\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\cdot\cos(\sin\theta\cdot\cos\psi)\mathrm{d}\psi. \quad (4.1.46)$$

同样有

$$N_\phi(\theta,\phi) = (4I_0a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\cdot\cos(\sin\theta\cdot\cos\psi)\mathrm{d}\psi. \quad (4.1.47)$$

我们来求出 $+z$ 轴方向的远区辐射场，在(4.1.46)和(4.1.47)式中设 $\theta=0$，容易求出

$$N_\theta(0,\phi) = \mathrm{j}I_0a\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi},\ N_\phi(0,\phi) = I_0a\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}. \quad (4.1.48)$$

将(4.1.48)代入(4.1.17)和(4.1.18)式得 $+z$ 轴方向的远区辐射电磁场

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \omega\mu_0I_0a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4r}(\boldsymbol{a}_\theta-\mathrm{j}\boldsymbol{a}_\phi),\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= k_0I_0a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4r}(\boldsymbol{a}_\phi+\mathrm{j}\boldsymbol{a}_\theta).\end{aligned}\right\} \quad (4.1.49)$$

不难看出 $+z$ 轴方向的远区辐射场为右旋圆极化波，因为 θ 和 ϕ 分量的幅值相等，但 ϕ 分量相位滞后 $\pi/2$，这是因为我们所设的电流是右旋的. 由于 $N_\theta(\theta,\phi)$ 的表示式(4.1.46)在积分号前面有 $\cos\theta$ 因子，$\theta=0°$ 和 $\theta=180°$，即 $\pm z$ 轴方向，为最大辐射方向. 这不难理解，因为在 $k_0a=1$ 的条件下，当电流在圆环上转过 180° 到达其对极点时电流的方向反转，同时电流的相位也反相，所以圆环上的各个电流元产生的辐射场在 z 轴上同相叠加，沿 z 轴的辐射达到极大. 当偏离 z 轴时，由于 $\cos\theta$ 因子，E_θ 比 E_ϕ 减小得快些，但它们之间仍有 $\pi/2$ 的相位差，辐射场变为椭圆极化，不过在 z 轴附近仍可认为是近似圆极化辐射. 显然辐射图形对于 z 轴具有轴对称性.

螺旋天线是一种有相当宽(略小于一个倍频程)工作带宽的圆极化天线，用途甚广. 螺旋天线由一段装置在平面导体板上的螺旋线构成，其轴线与导体板垂直，同轴线馈线的外导体与导体板相连，内导体穿过导体板上的孔对螺旋馈电. 螺旋的远端为开路，电流由馈点沿螺线向开路端传播，在行进中由于辐射能量，其幅度逐渐减弱，到达开路端时幅度已很小，反射波很弱，所以螺旋线上基本为行波电流. 当螺旋线的半径与工作波长满足条件 $k_0a\approx1$ 时，沿螺旋线传播的模式称为螺旋天线的轴模，此时螺距角须小于 19°，一般为 14°.

要了解螺旋天线的轴模，需参考螺旋带的色散曲线图 3.25. 设想在此图上由原点处引出色散曲线 $n=0$ 的切线，一直延伸到与第二个三角形区左边界的直线相交之后. 这条由原点引出的切线对应于波以自由空间光速沿螺旋线传播时产生的沿螺旋线轴向传播的慢波. 而三角形左边线对应的相速为自由空间光速. 这两条直线交点之下的一段曲线就是轴模的色散曲线，可用耦合模理论作出解释. 因此，轴模是慢波辐射模.

螺旋天线严格的理论分析相当困难. 由于螺距角取有限值，如果采用对电流元的辐射积分的方法，每个电流元的方向都是倾斜的，难于求积. 一种简化的分析方法是将螺旋的每一匝视为平面圆环，其上的电流行波与(4.1.45)式相同，将多匝螺旋视为彼此平行的等间距电流圆环构成的均匀直线阵. 每个阵单元圆环的辐射图函数(称为单元因子)可以求出，再乘以阵因子便得螺旋天线的辐射图函数. 因为螺距角较小，用这种近似方法基本上可以得正确结果. 实际上，螺距角的允许取值范围正是运用等间距直线阵的高方向性端射条件(称为 Hansen-Woodyard 端射条件)得出的. 对于螺旋天线的进一步了解需参考有关专著，关于天线阵的基本原理以及 Hansen-Woodyard 端射条件，我们将在 § 4.6 中讨论.

§4.2　柱形天线的积分方程

1. Pocklington 积分方程

在上一节中我们已在假定天线上的电流为沿天线轴线的线电流而且电流为正弦分布的情况下，计算了半波天线的辐射特性. 关于半波天线上电流分布的上述假定是建立在更严格的理论基础上的，有关的理论问题则是本节的主要内容. 截面有限的柱形导体天线上电流分布的严格确定实际上是个边值问题，即使天线是孤立的，周围没有其它的天线和物体，天线上的电流分布也会受到馈电结构的场以及天线上电流所产生的近场的影响，这就自然地导致用积分方程给出天线上的电流分布. 由于电流分布于柱形导体表面，柱形导体的截面积及截面形状对于天线的特性，特别是天线的输入阻抗，有着明显的影响. 线天线的积分方程理论可以将这些影响因素考虑进去，但在建立天线上电流分布的积分方程的过程中仍需对于天线的几何结构，特别是馈电结构做出简化的处理. 在建立了柱形天线的适当的几何模型之后，就可导出相应的积分方程.

(1) 矢势方程[4]

关于柱形天线上电流分布的积分方程式可由 Maxwell 方程式中的磁场旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{4.2.1}$$

及矢势的非齐次波动方程式

$$(\nabla^2+k_0^2)\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{4.2.2}$$

导出. 将 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 代入(4.2.1)式得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\mu_0\boldsymbol{J}-\mathrm{j}\omega\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \tag{4.2.3}$$

然后从(4.2.2)式和(4.2.3)式中消去 $\boldsymbol{J}$ 得出

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+k_0^2\boldsymbol{A}=\mathrm{j}\omega\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}. \tag{4.2.4}$$

以无界自由空间中的推迟矢势(1.2.22)式：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\mu_0\iiint_V\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

代入(4.2.4)式，消去 $\boldsymbol{A}$ 后得

$$(\nabla\nabla\cdot+k_0^2)\iiint_V\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}). \tag{4.2.5}$$

(4.2.5)式是关于天线上电流分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 的微分积分方程，由于是利用矢势导出的，称为矢势方程，它是关于柱形天线上电流分布的其它形式积分方程的基础.

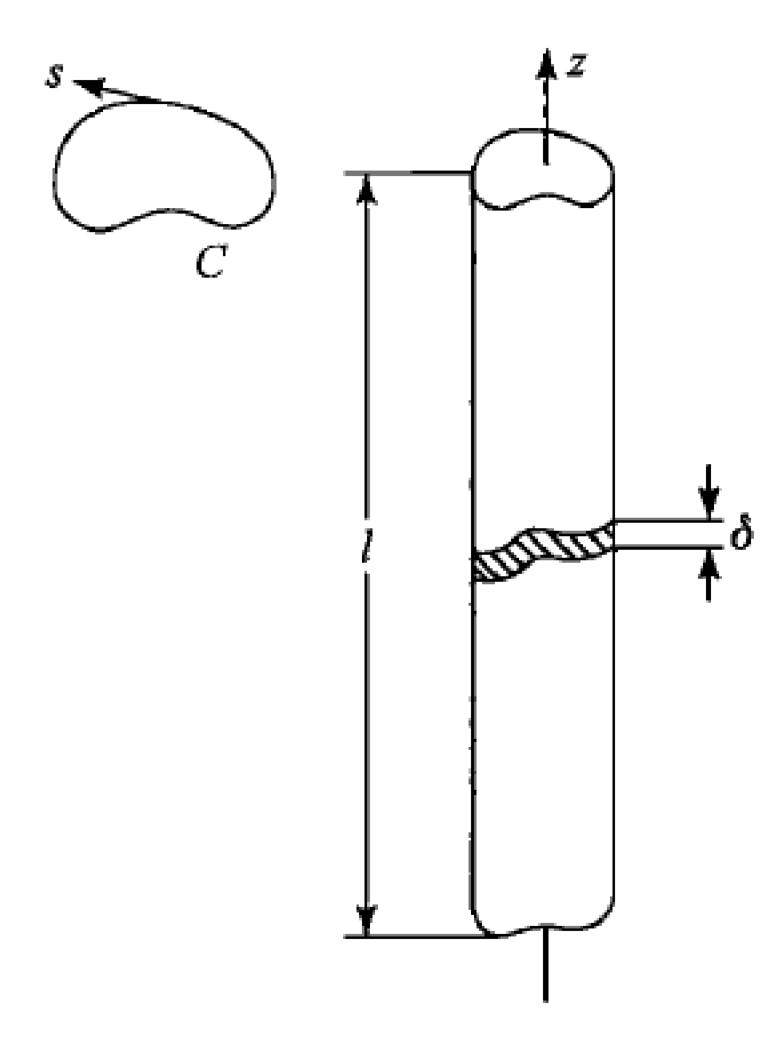


图 4.6 任意形状截面柱形天线

(2) 任意形状截面柱形天线的 Pocklington 积分方程[5]

在矢势方程(4.2.5)中积分区域 V 应包括所有有电流的区域,即应包括天线上的电流分布区域及馈电系统的电流分布区域. 另一方面,为导出天线上电流分布的积分方程,V 应当仅包含天线的电流,这就需要对于馈电系统的电流分布作一定的简化处理,通常是忽略馈电系统的电流分布. 为简化天线电流分布的积分方程还需对天线的几何结构作简化假定. 设天线为一截面形状任意的细直柱导体,满足条件 $k_0u \ll 1$ 及 $u \ll l$,这里 u 为截面周线总长,l 为天线长,s 为截面周线的弧长变量,如图 4.6 所示. 若天线用理想导体管制作,除端部外在管的内壁上没有电流,在管壁厚度很小的情况下端部的内壁电流也可以忽略,这样可以认为仅在管的外表面上流有电流,而且在细柱体的假定下管外表面的电流仅有轴向分量. 若天线由实心导体制作,在两个端面上会出现径向电流,在略去这部分端面径向电流的近似条件下,天线上的电流分布仍可看作是仅含有 z 分量的面电流.

在上述近似下矢势方程(4.2.5)便化为下面的标量方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\iint\limits_S \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}J_{sz}(s',z')\mathrm{d}s'\mathrm{d}z' = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_z(s,z), \quad (4.2.6)$$

这里积分面积 S 为天线导体柱的外表面,J_{sz} 为 z 方向的面电流密度. 将面积分分离为沿截面周线 C 的积分和沿轴线 z' 的积分,我们有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\int_{-l/2}^{+l/2}\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}J_{sz}(s',z')\mathrm{d}s'\mathrm{d}z' = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_z(s,z). \quad (4.2.7)$$

由于 z 不是积分变量,对 z 求微商可移到积分号内,如果令

$$G(s,z;s',z') = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \quad (4.2.8)$$

方程式(4.2.7)就可简写为

$$\int_{-l/2}^{+l/2}\oint_C G(s,z;s',z')J_{sz}(s',z')\mathrm{d}s'\mathrm{d}z' = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_z(s,z). \quad (4.2.9)$$

方程式(2.4.9)右方的 $E_z(s,z)$ 是天线表面的电流分布在天线表面 (s,z) 点产生的轴向电场分量,除此之外在天线表面还存在着其它源产生的外场,其轴向分量用 $E_z^i(s,z)$ 表示. 当天线工作于发射状态时外场是由馈源产生的,当天线工作于接收状态时外场则是由远处的源产生的入射场,或者两种外源同时存在. 天

线电流及外源产生的场 $E^{\mathrm{i}}(s,z)$ 这两者的轴向分量之和在天线表面应满足理想导体的边界条件

$$E_z(s,z) + E_z^{\mathrm{i}}(s,z) = 0, \tag{4.2.10}$$

由上式可解出

$$E_z(s,z) = - E_z^{\mathrm{i}}(s,z). \tag{4.2.10a}$$

以(4.2.10a)式代入(4.2.9)式，最终我们得到

$$\int_{-l/2}^{+l/2}\oint_C G(s,z;s',z')J_{sz}(s',z')\mathrm{d}s'\mathrm{d}z' = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_z^{\mathrm{i}}(s,z). \tag{4.2.11}$$

(4.2.11)式称为广义 Pocklington 方程. 如能正确地给出外场 $E_z^{\mathrm{i}}(s,z)$，求解这个方程便可得到天线表面的电流分布. 在(4.2.11)式中天线导体的截面周界 C 可取任意形状，因此它不仅适用于柱形导体线天线，而且也适用于微带类型的天线.

在积分方程的理论中函数 G 称为积分方程的核，现在核函数(4.2.8)式有最高达 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-3}$ 的奇异性，因此(4.2.11)式是奇异型积分方程. 在积分方程分类中未知函数的积分为定积分的方程称为 Fredholm 型方程，方程式右侧如不含有未知函数则称为第一类方程，故(4.2.11)式属于第一类 Fredholm 方程.

(3) 圆截面细天线的 Pocklington 积分方程及其近似解[6]

对于圆形截面的细柱形天线，广义 Pocklington 积分方程(4.2.11)可以化简，并且容易求出它的近似解. 设天线处于发射状态，为了能求出方程式的解需对于馈源作出进一步的假定，使得可确切地给出方程式右方的非齐次项. 假定馈源是一种理想的馈源，它所产生的场局限于图 4.6 所示的高为 δ 的柱形区域中，因此可以假定在天线的外表面上处处有

$$E_z^{\mathrm{i}}(s,z) = 0. \tag{4.2.12}$$

对于图 4.7 所示的圆截面柱形天线，细天线条件相当于 $2\pi a \ll \lambda_0$ 及 $a \ll l$，如果进一步假定馈源的场分布具有轴对称性就可以认为电流在天线截面的圆周上是均匀分布的，这样(4.2.7)式中的面积分可简化为

$$\int_{-l/2}^{+l/2}\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}J_{sz}(s',z')\mathrm{d}s'\mathrm{d}z' = \int_{-l/2}^{+l/2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 D}}{4\pi D}J_{sz}(z')a\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'$$

这里

$$D = \left[(z-z')^2 + \left(2a\sin\frac{1}{2}\phi'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.13}$$

于是广义 Pocklington 积分方程(4.2.11)便简化成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{-l/2}^{+l/2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 D}}{4\pi D}I(z')\mathrm{d}z' = 0, \tag{4.2.14}$$

其中

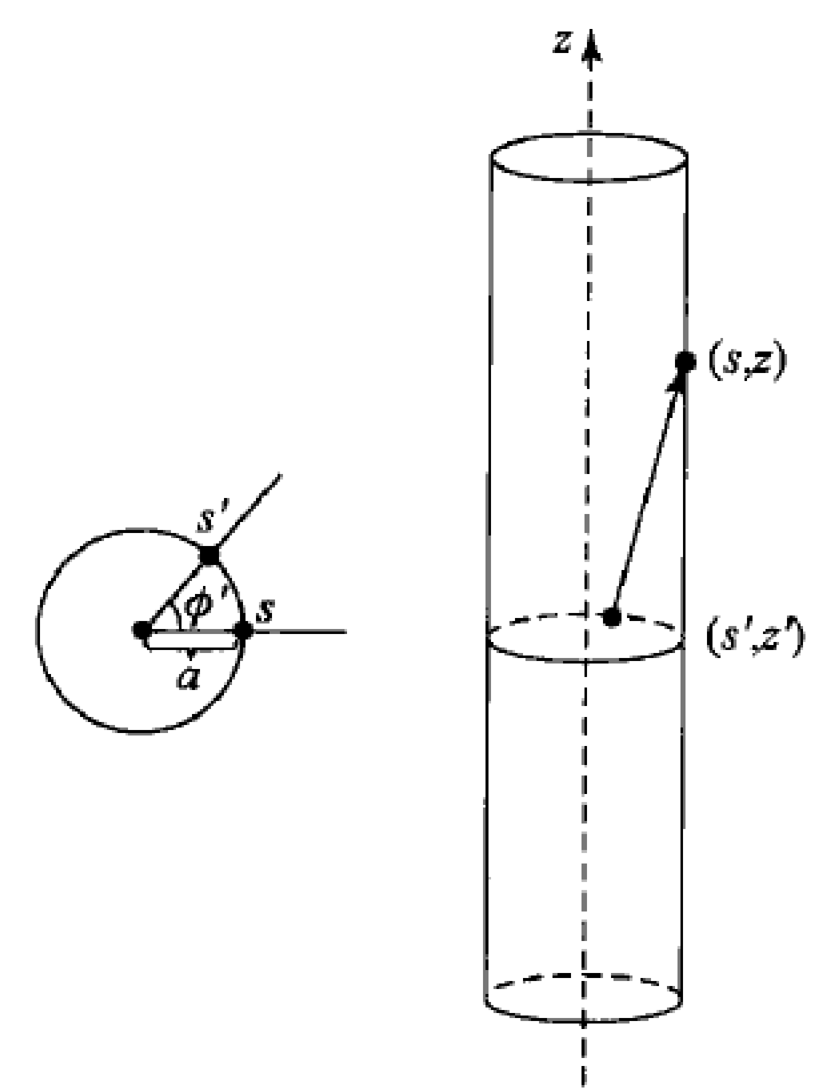


图 4.7 圆截面柱形天线

$$I(z') = 2\pi a J_{sz}(z') \tag{4.2.15}$$

为天线表面上的总电流.(4.2.14)式正是 Pocklington 所导出的积分方程的原形(1897).

下面来求出积分方程(4.2.14)的近似解.由于 a 为小量,不难看出对于(4.2.14)式中的积分的主要贡献是来自 $z'=z$ 的邻近线段的积分,因此这个积分可近似写作

$$\frac{I(z)}{2\pi}\int_{z-b}^{z+b}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'}{4\pi\left[(z-z')^2+4a^2\sin^2\frac{1}{2}\phi'\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.2.16}$$

这里 b 是常数且 $b\gg a$.积出上面的积分得

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{z-b}^{z+b}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'}{\left[(z-z')^2+4a^2\sin^2\frac{1}{2}\phi'\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2b}{a},$$

于是积分方程(4.2.14)便化成微分方程

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2b}{a}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k_0^2\right)I(z)=0. \tag{4.2.17}$$

求解(4.2.17)式便得出天线上的电流分布

$$I(z)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}+B\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z}. \tag{4.2.18}$$

这个解表明天线上的电流是沿天线轴线以真空中的光速传播的正反两个方向的行波合成的驻波分布.在天线的端点电流应为零,由此可确定常数 A 与 B 之间的关系,对于半波天线(4.2.18)式则化为(4.1.33)式给出的正弦电流分布.

在细导线近似下天线面上的面电流在天线表面上产生的场可等效为沿天线轴线流动的线电流在天线表面产生的场,这个沿轴的等效线电流值等于总面电流.这样,(4.2.13)式中的 D 就可简化为

$$D=[(z-z')^2+a^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.13a}$$

从而将(4.2.14)式中的二重积分简化为线积分:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{-l/2}^{+l/2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0D}}{4\pi D}I(z')\mathrm{d}z'=\int_{-l/2}^{+l/2}I(z')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0[(z-z')^2+a^2]^{\frac{1}{2}}}}{4\pi[(z-z')^2+a^2]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}z'.$$

可以证明,当 $a\ll l$ 时上述近似足够好①.令

$$\psi(z,z')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0[(z-z')^2+a^2]^{\frac{1}{2}}}}{4\pi[(z-z')^2+a^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.2.19}$$

① 见[5]附录 E,进一步的讨论见 R. E. Collin, Equivalent line current for cylindrical antennas and its asymptotic behavior, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. AP-32, pp. 200—204, Feb., 1984.

则广义 Pocklington 积分方程(4.2.11)可简化为

$$\int_{-l/2}^{+l/2} I(z')\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(z,z') + k_0^2\psi(z,z')\right]\mathrm{d}z' = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_z^{\mathrm{i}}(z), \quad (4.2.20)$$

这是在实际计算中常使用的圆截面细导线天线的 Pocklington 积分方程.

2. Hallén 积分方程

在柱形天线的理论中存在着几种关于馈源的模型,其中最简单的一种为一理想单位电压发生器.在这个模型中馈源的场 $\boldsymbol{E}_g$ 仅存在于图 4.6 所示的高为 δ 的柱形馈电隙中,对于图 4.7 所示的半径为 a 的圆柱形天线,$\delta \ll a$,而且假定 $\boldsymbol{E}_g$ 仅含有 z 分量并在馈电隙的截面上均匀分布.这样,对于圆形截面的馈电隙,馈源的场分布可表示为

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} E_g(z)\mathrm{d}z = 1 \quad (\rho \leqslant a); \\ &E_g(z) = 0 \quad (|z| > \delta/2, \quad \rho > a). \end{aligned}\right\} \quad (4.2.21)$$

利用这种简单的馈源模型,圆截面细导线的 Pocklington 方程(4.2.20)可化为一个更便于计算的积分方程,这就是 Hallén 积分方程(1938).

在建立馈源场分布的模型之后,以(4.2.21)式给出的 $E_g(z)$ 代入(4.2.20)式右方的 $E_z^{\mathrm{i}}(z)$,(4.2.20)式便可看成一个微分方程式

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2\right)a(z) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_g(z) \quad (4.2.22)$$

和一个积分方程式

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \psi(z,z')I(z')\mathrm{d}z' = a(z). \quad (4.2.23)$$

由微分方程式(4.2.22)解出未知函数 $a(z)$,则天线上未知的电流分布 $I(z')$ 便可由一个比较简单的积分方程(4.2.23)求出.

我们先来求出微分方程(4.2.22)的解.在馈电隙的高 $\delta \to 0$ 的极限下,在 $z \neq 0$ 区域中方程(4.2.22)变为齐次方程,它的解为

$$\left.\begin{aligned} a(z) &= A\cos k_0 z + B\sin k_0 z \quad (z > 0), \\ a(z) &= C\cos k_0 z + D\sin k_0 z \quad (z < 0), \end{aligned}\right\} \quad (4.2.24)$$

这两个解需在 $z=0$ 处连接.在方程(4.2.22)中,由于 $a(z)$ 是有界函数,$k_0^2 a(z)$ 项并不能产生方程式右方 $E_g(z)$ 在 $z=0$ 点的奇异行为,这个奇异性只能来自 $\mathrm{d}^2 a(z)/\mathrm{d}z^2$ 项.对于方程式(4.2.22)在 δ 狭缝内积分得

$$-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} E_g(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2}\frac{\mathrm{d}^2 a(z)}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = \left.\frac{\mathrm{d}a(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{-\delta/2}^{+\delta/2},$$

这表明 $a(z)$ 的一阶微商 $\mathrm{d}a(z)/\mathrm{d}z$ 在通过 $z=0$ 点时有 $-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0$ 的突变.由解(4.2.24)式求出 $\mathrm{d}a(z)/\mathrm{d}z$,代入上式,在 $\delta \to 0$ 的极限下得

$$k_0 B - k_0 D = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0. \tag{4.2.25}$$

当天线从中心对称地馈电时,天线上的电流沿天线轴的分布在馈电隙的两侧是对称的,

$$I(z') = I(-z'), \tag{4.2.26}$$

由方程(4.2.23)不难知道 $a(z)$也是 z 的偶函数,

$$a(z) = a(-z). \tag{4.2.27}$$

以齐次方程的解(4.2.24)式代入关系式(4.2.27)可确定其中的常数有下面的关系:

$$A = C, \tag{4.2.28a}$$

$$B = -D. \tag{4.2.28b}$$

因此,解(4.2.24)式在 $z=0$ 点是连续的,但一级微商不连续. 以(4.2.28b)式代入(4.2.25)式可求出

$$B = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{2k_0}. \tag{4.2.29}$$

上式和(4.2.28)式代入(4.2.24)式后便得到微分方程(4.2.22)的解

$$a(z) = C\cos k_0 z - \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{2k_0}\sin k_0|z|, \tag{4.2.30}$$

这里 C 为待定的积分常数.

将解(4.2.30)式代入方程(4.2.23),便得到天线上未知电流分布 $I(z')$的积分方程

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \psi(z,z')I(z')\mathrm{d}z' = C\cos k_0 z - \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{2k_0}\sin k_0|z|, \tag{4.2.31}$$

这就是 Hallén 方程,其中的积分常数 C 需由天线端电流为零的条件

$$I\left(\pm\frac{l}{2}\right) = 0 \tag{4.2.32}$$

确定. 显然,Hallén 方程较之 Pocklington 方程要简单些,故在柱形天线的研究中较多地使用 Hallén 方程. 值得注意的是,尽管关于馈源的 δ 狭缝单位电压发生器的模型很粗糙而且显然不实际,但是根据 Hallén 方程计算的结果与实验数据之间却符合得相当好. 对于其原因的讨论有兴趣的读者可参考[7],§2.12. 关于 Hallén 方程的有效的数值求解方法则是下一节要讨论的主要内容.

§4.3 细圆柱天线 Hallén 积分方程的矩量法解

1. 矩量法的一般原理和步骤[8]

关于 Hallén 型积分方程的求解问题进行过广泛的研究,提出了一些求解方

法，但现今公认的、最为有效的求解方法则是一种数值方法，称为矩量法(method of moments). 矩量法的基本思想是将泛函方程(积分方程就是一种泛函方程)化成矩阵方程，即线性联立方程组，再进行数值求解. 高维数的线性联立方程组数值解的主要困难在于求解逆矩阵，要求有大的计算机内存和高运算速度. 由于大容量高速计算机技术的进展，这个困难已不成其为障碍，因此矩量法遂成为求解电磁场问题的一种最为有效的数值方法. 我们先来介绍矩量法的一般原理，然后再具体讨论 Hallén 积分方程的求解问题.

Hallén 方程(4.2.31)属于下面的一般形式泛函方程

$$L(f) = g, \tag{4.3.1}$$

这里 f 是未知函数，g 是已知函数，而 L 是已知的线性算子，对于(4.2.31)式 L 为积分算子

$$L = \int_{-l/2}^{+l/2} \psi(z,z')\mathrm{d}z'. \tag{4.3.2}$$

化泛函方程(4.3.1)为矩阵方程的基本方法是将未知函数 $f(z')$ 展开为级数式

$$f(z') = \sum_n a_n f_n(z'), \tag{4.3.3}$$

$f_n(z')$ 称为展开函数(expansion functions)或基函数(basis functions)，a_n 为待定系数. 显然，为精确地逼近未知函数 $f(z')$，级数展开式(4.3.3)通常需取无穷多项，但为使矩阵方程的维数有限，展开式的级数实际上只能取有限项，因此只能在近似的意义上逼近未知函数. (4.3.3)式代入(4.3.1)式，由于算子 L 的线性可得

$$\sum_n a_n L(f_n) = g, \tag{4.3.4}$$

对于 Hallén 方程(4.2.31)

$$L(f_n) = \int_{-l/2}^{+l/2} \psi(z,z') f_n(z')\mathrm{d}z'. \tag{4.3.5}$$

$L(f_n)$ 称为核函数 $\psi(z,z')$ 对于基函数 $f_n(z')$ 的矩量，这是矩量法这个名称的来源①.

如果选择一个正交函数族 w_m，并且以适当的方式定义两个函数 f 与 g 之间的内积(用 $\langle f,g\rangle$ 表示)，然后做出 w_m 与方程(4.3.4)之间的内积，便得到一组线性方程

$$\sum_n a_n \langle w_m, L(f_n)\rangle = \langle w_m, g\rangle \quad (m = 1,2,\cdots). \tag{4.3.6}$$

---

① 用矩量法求解积分方程的工作最早由苏联 Н. М. Крылов 院士开启，见 Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные Методы Высшего Анализа, § 2.4, PTTИ, 1952. 应用于电磁场问题则首先由 R. F. Harrington 进行，见[8]及其中引用的 Harrington 的论文.

函数 w_m 称为权函数(weighting functions)或试探函数(testing functions).

定义矩阵

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1)\rangle & \langle w_1, L(f_2)\rangle & \cdots \\ \langle w_2, L(f_1)\rangle & \langle w_2, L(f_2)\rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{4.3.7}$$

$$[a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{4.3.8}$$

$$[g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g\rangle \\ \langle w_2, g\rangle \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{4.3.9}$$

则线性方程组(4.3.6)可以写成矩阵形式

$$[l_{mn}][a_n] = [g_m]. \tag{4.3.10}$$

若矩阵$[l]$是非奇异的,逆矩阵$[l^{-1}]$存在,那么解$[a_n]$就可形式上写作

$$[a_n] = [l_{mn}^{-1}][g_m]. \tag{4.3.11}$$

上式代入展开式(4.3.3)就得到用矩阵形式表示的泛函方程(4.3.1)的解

$$f = [\tilde{f}_n][a_n] = [\tilde{f}_n][l_{mn}^{-1}][g_m], \tag{4.3.12}$$

这里$[\tilde{f}_n]$是展开函数列矩阵的转置矩阵,为一行矩阵

$$[\tilde{f}_n] = [f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots]. \tag{4.3.13}$$

由于 m 和 n 实际上只能取有限值,故解(4.3.12)式只是近似解.下面引用 Harrington 给出的一个简单例子以说明矩量法的求解过程.

【例】 常微分方程的边值问题. Galerkin 方法.

考虑如下的常微分方程边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 1 + 4x^2, \quad f(0) = f(1) = 0. \tag{4.3.14}$$

这个问题的已知精确解为

$$f(x) = \frac{5x}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3}. \tag{4.3.15}$$

现在用矩量法来求解.

在泛函方程(4.3.14)中 L 是微分算符,$L = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$.选择展开函数族为

$$f_n(x) = x - x^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots, N), \tag{4.3.16}$$

所选择的展开函数已满足边界条件.(4.3.16)式代入(4.3.3)式得未知函数 $f(x)$的展开式

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n (x - x^{n+1}). \tag{4.3.17}$$

进一步选择权函数与展开函数相同，

$$w_n(x) = f_n(x), \tag{4.3.18}$$

以这种方式选择权函数的矩量法称为 Galerkin 方法.

现定义内积为

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x, \tag{4.3.19}$$

求出矩阵元

$$l_{mn} = \langle w_m, L(f_n) \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})[(n+1)nx^{n-1}]\mathrm{d}x = \frac{mn}{m+n+1} \tag{4.3.20a}$$

$$g_m = \langle w_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1+4x^2)\mathrm{d}x = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)}. \tag{4.3.20b}$$

将(4.3.20a,b)式代入(4.3.11)式，求出 a_n 后就可得微分方程(4.3.14)的解.

现在来作具体的计算，先取 $N=1$，然后再逐渐增加 N 的值.

$N=1$：$l_{11} = \frac{1}{3}$，$g_1 = \frac{11}{30}$，$a_1 = \frac{11}{10}$.

$$f = \frac{11}{10}(x - x^2).$$

$N=2$：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{21} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$f = \frac{1}{10}(x - x^2) + \frac{2}{3}(x - x^3).$$

$N=3$：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$f = \frac{1}{2}(x - x^2) + \frac{1}{3}(x - x^4) = \frac{5x}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3}.$$

到此已得到了精确解，进一步增加 N 仍得到精确解.

2. 细圆柱天线 Hallén 积分方程的矩量法解. 点匹配法[5]

所要求解的 Hallén 方程(4.2.31)属于下列一般形式的第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_a^b K(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = g(z), \tag{4.3.21}$$

这里 $f(z')$为未知函数,$K(z,z')$为积分方程的核,$g(z)$为已知函数.在 $f(z')$的展开式(4.3.3)中若只取有限项只能得到近似等式

$$f(z') \approx \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z'), \tag{4.3.3a}$$

代入积分方程后也只能近似满足

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\left[\int_a^b K(z,z')f_n(z')dz'\right] \approx g(z). \tag{4.3.22}$$

现在,内积仍可定义为与方程式的积分区间相同的区间上对于 z 的积分,

$$\langle \cdot \rangle = \int_a^b \cdot\ \mathrm{d}z, \tag{4.3.23}$$

"·"代表积分项.若将区间$[a,b]$等分为 M 个子区间,z_m 为第 m 个子区间的内点,则最简单的权函数是在这些子区间上取值的 δ 函数:

$$w_m(z) = \delta(z - z_m) \quad (m = 1,2,\cdots,M). \tag{4.3.24}$$

利用上式给出的 w_m 做出对积分方程(4.3.21)的内积,而且要求等式严格成立,得

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\langle w_m, L(f_n)\rangle = \langle w_m, g\rangle \quad (m = 1,2,\cdots,M), \tag{4.3.25}$$

写成显式为

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\left\{\int_a^b\left[\int_a^b K(z,z')f_n(z')\mathrm{d}z'\right]\delta(z-z_m)\mathrm{d}z\right\} = \int_a^b \delta(z-z_m)g(z)\mathrm{d}z. \tag{4.3.25a}$$

再利用 δ 函数的性质积出上面的积分后便得到 M 个线性联立方程式

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\left[\int_a^b K(z_m,z')f_n(z')\mathrm{d}z'\right] = g(z_m) \quad (m = 1,2,\cdots,M). \tag{4.3.26}$$

因此,选择 δ 函数为权函数可以保证积分方程在区间$[a,b]$内选定的 M 个内点严格成立,所以称为点匹配法.

现在我们就用点匹配法来具体地求解细圆柱天线的 Hallén 积分方程.由于天线上的电流分布 $I(z')$是对称的,可以只求解天线的半长度区间上的电流分布,为此我们把方程(4.2.31)改写成

$$\int_0^{l/2} K(z,z')I(z')dz' = C\cos k_0 z - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}Y_0\sin k_0 z, \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}, \tag{4.3.27}$$

这里

$$K(z,z') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0[a^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}}{4\pi[a^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0[a^2+(z+z')^2]^{\frac{1}{2}}}}{4\pi[a^2+(z+z')^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.3.28}$$

而 $Y_0=\omega\varepsilon_0/k_0=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$ 为自由空间波导纳. 将区间 $[0,l/2]$ 分成 N 个等长的子区间，令

$$z_1=0,\quad z_{N+1}=\frac{l}{2},\quad z_n=(n-1)\frac{l}{2N},\tag{4.3.29}$$

第 n 个子区间 Δz_n 则表示为

$$z_n\leqslant\Delta z_n\leqslant z_{n+1}.\tag{4.3.30}$$

一种最简单的展开函数是定义于这些子区间上的单位脉冲函数 $p_n(z)$：

$$p_n(z)=\begin{cases}1, & 当\ z\in\Delta z_n,\\ 0, & 当\ z\notin\Delta z_n.\end{cases}\tag{4.3.31}$$

上面的这种定义于子区间上的展开函数称为子域基函数；而像(4.3.16)式那样的定义于整个求解区间上的展开函数则称为整域基函数.

用脉冲函数(4.3.31)式展开 $I(z')$，

$$I(z')=\sum_{n=1}^{N}a_np_n(z'),\tag{4.3.32}$$

由于取了有限项，这个展开式所含有的近似是明显的(见图 4.8). 若选择每个子区间的中点

$$z_m=\frac{2m-1}{4}\frac{l}{N}\quad(m=1,2,\cdots,N)\tag{4.3.33}$$

为匹配点，在这 N 个点上匹配积分方程(4.3.27)得出 N 个线性联立方程式

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^{l/2}K(z_m,z')p_n(z')\mathrm{d}z'=C\cos k_0z_m-\frac{1}{2}\mathrm{j}Y_0\sin k_0z_m$$
$$(m=1,2,\cdots,N).\tag{4.3.34}$$

当用单位脉冲函数为子域基函数时，矩阵元就简单地是核函数在子区间上的积分：

$$l_{mn}=\int_{z_n}^{z_{n+1}}K(z_m,z')\mathrm{d}z'.\tag{4.3.35}$$

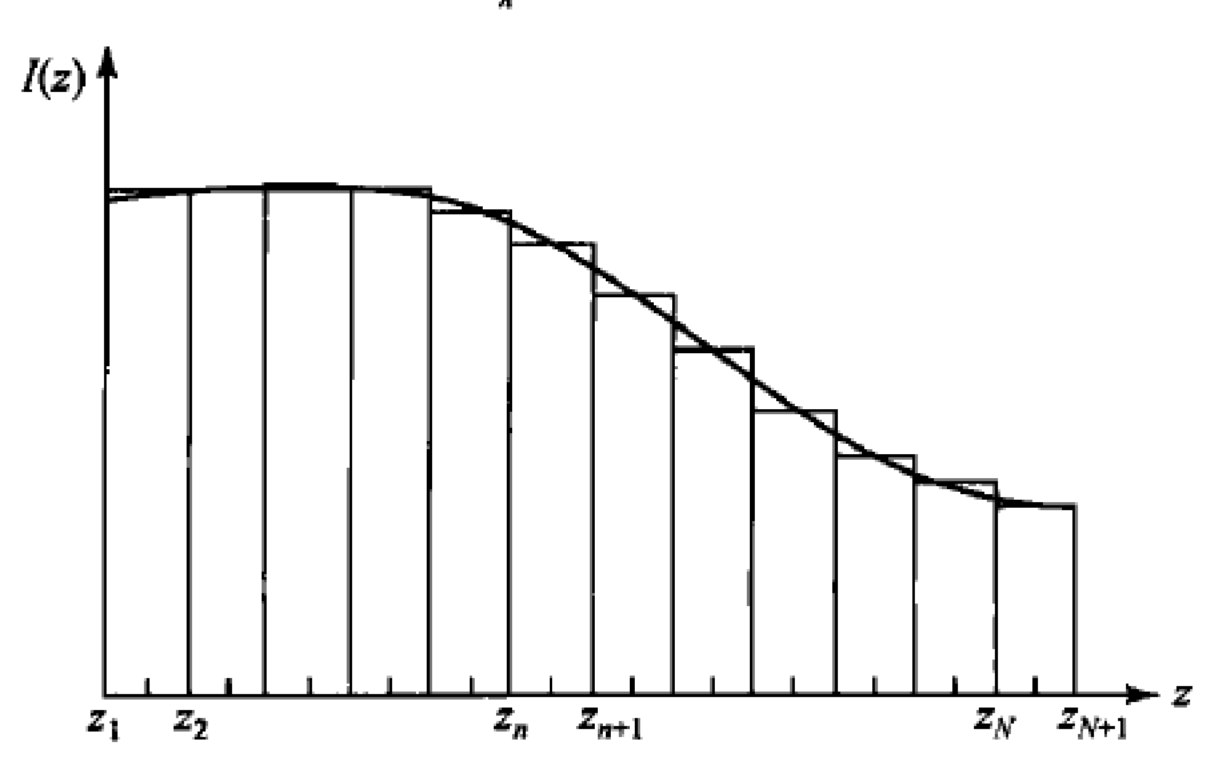


图 4.8　线天线上的电流分布用单位脉冲函数的有限级数和近似表示

剩下的一个问题是让所求出的电流分布满足天线端电流为零的条件,即 $I(l/2)=0$. 这就要求预先取定 $a_N=0$,而在线性方程组(4.3.34)中就少了一个未知常数,需要把方程式右侧的未知常数 C 移到方程左侧以取代 a_N. 把 $C\cos k_0 z$ 项移到方程左侧后再令

$$\left.\begin{aligned} d_m &= -\cos k_0 z_m, \\ b_m &= -\frac{1}{2}\mathrm{j}Y_0\sin k_0 z_m \end{aligned} \quad (m=1,2,\cdots,N),\right\} \tag{4.3.36}$$

线性方程组(4.3.34)就可写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1,N-1} & d_1 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2,N-1} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{N,N-1} & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}. \tag{4.3.37}$$

整个计算工作可在计算机上进行,由解出的 $a_1,\cdots,a_{N-1}$ 可得天线上的电流分布,而天线的输入阻抗 $Z_{\text{in}}=1/a_1$,也就是说 a_1 是天线的输入电纳值. 关于半波天线的具体计算结果可参考[5],§7.6.

一般说来用矩量法求解积分方程所能达到的精度与下列三个因素有关. 一是所选择的匹配方程式的方法,例如点匹配法是一种常用的方法. 另一因素是基函数的选择,这里又有整域基函数与子域基函数之分,子域基函数中除了最简单的脉冲函数之外更常用的还有分段正弦函数. 以分段正弦函数作为子域基函数求解 Hallén 方程的例子可参见[5],§7.7,求解 Pocklington 方程的例子则可在[9]中找到. 第三个因素则是权函数的选择,Galerkin 方法是一种可能,更好的方法则是下面要介绍的最小平方逼近法(method of least squares).

3. 最小平方逼近法[7]

为了解权函数的选择对计算精度的影响,我们来回顾一下矩量法对泛函方程的求解过程. 未知函数 $f(u)$ 的有限级数展开式代入泛函方程后在近似的意义下得到等式

$$\sum_{n=1}^{N} a_n L(f_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n F_n = g(u), \tag{4.3.38}$$

这里我们将自变量改用归一化的变量 u,而为了下面叙述的方便令 $F_n=L(f_n)$. 然后用权函数做出展开方程的内积,这意味着要求函数

$$\left[\sum_{n=1}^{N} a_n F_n(u) - g(u)\right]$$

被 $w_m(u)$ 加权积分后为零,所以矩量法又称为加权余数法(method of weighted

residuals). 而点匹配法则是强制余数在若干个离散点为零，但在其它点差值甚至可以是很大. 图 4.9 上示出了用脉冲函数作为展开函数时，用点匹配法计算的中心馈电半波天线表面的归一化切线电场实部和虚部的分布[10]. 由图可以看出，除了在匹配点之外天线表面其余点切线电场分量均不为零，在有些点甚至很大. 所以，点匹配法可看作是对于边界条件的弛豫，但并不是最佳的逼近.

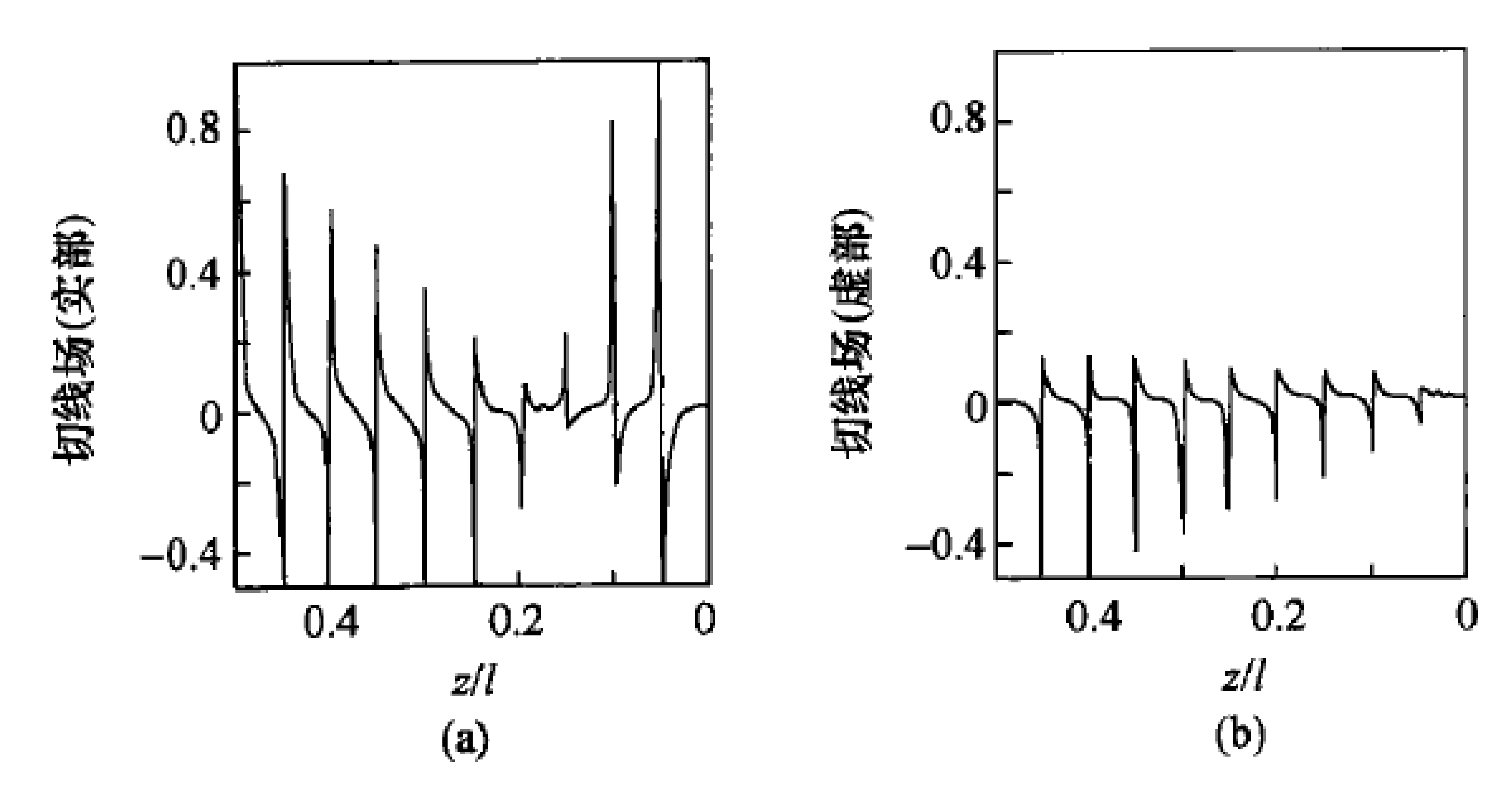


图 4.9　用点匹配法计算的中心馈电半波天线表面的归一化切线电场的实部(a)和虚部(b)

可以借助于矢量空间的几何直观来说明权函数的选择对于逼近的影响. 函数 $g(u)$ 可看作是无穷维空间中的矢量，权函数 $w_m(u)$ 可看作是这个空间中的单位基矢量，而内积

$$G_m = \int_0^1 g(u) w_m(u) \mathrm{d}u$$

则是函数 $g(u)$ 在第 m 个正交单位基矢方向上的投影. 为了适合于上面的几何图象我们需将权函数归一化：

$$\int_0^1 w_m(u) w_n(u) \mathrm{d}u = \delta_{mn}.$$

要得到矢量 $g(u)$ 的精确表示式就要给出它的所有分量，当使用有限个权函数时只能得到近似式

$$g(u) \approx \sum_{m=1}^{N} G_m w_m(u),$$

这相应于仅求出了矢量 $g(u)$ 在由 N 个单位基矢量构成的子空间内的投影. 矩量法相当于作出矢量 $g(u)$ 和 $a_n F_n(u)$ 在 N 维子空间内的投影，而且通过调整 a_n 使矢量 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n F_n(u)$ 和 $g(u)$ 在这 N 个正交基矢上的投影分量相等. 不同的权函数的选择可以导致矢量 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n F_n(u)$ 和 $g(u)$ 在与 N 维子空间相垂直的方向上

可能有很不相同的分量,尽管这两者在 N 维子空间内的投影相等.

为说明怎样可作出权函数的优化选择,现在来看一个直观的例子,设

$$L(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{g} = (2-\mathrm{j})\boldsymbol{a}_x - (1+\mathrm{j})\boldsymbol{a}_y + (4+3\mathrm{j})\boldsymbol{a}_z.$$

将 $\boldsymbol{f}$ 展开为两项:

$$\boldsymbol{f} = a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2,$$

而且假设

$$L(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{F}_1 = (1+\mathrm{j})\boldsymbol{a}_x + (2-\mathrm{j})\boldsymbol{a}_y,$$

$$L(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y + (3+2\mathrm{j})\boldsymbol{a}_z.$$

现在泛函方程在近似的意义下表示为下面的矢量方程

$$a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{g}, \tag{4.3.39}$$

由于 $\boldsymbol{f}$ 是未知矢量,现在 a_1,a_2 是未知的.设子空间为 $\boldsymbol{a}_x$ 及 $\boldsymbol{a}_y$ 所张的二维空间,将矢量方程(4.3.39)投影于此二维子空间,并使其匹配得

$$a_1\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{a}_x + a_2\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{a}_x,$$

$$a_1\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{a}_y + a_2\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{a}_y,$$

解出 a_1 和 a_2 后即可求出误差矢量

$$\boldsymbol{g} - (a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2) = (1+\mathrm{j})\boldsymbol{a}_z, \tag{4.3.40}$$

此误差矢量的模为 1.414.

权函数的优选问题相当于调整 a_1 和 a_2 使得误差矢量的模取极小值的问题.设

$$\begin{aligned} E &= |a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{g}|^2 \\ &= (a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{g})\cdot(a_1^*\boldsymbol{F}_1{}^* + a_2^*\boldsymbol{F}_2{}^* - \boldsymbol{g}^*), \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

分离 a_1,a_2 的实部和虚部,令

$$a_1 = a_{1\mathrm{r}} + \mathrm{j}a_{1\mathrm{i}}, \quad a_2 = a_{2\mathrm{r}} + \mathrm{j}a_{2\mathrm{i}},$$

脚标 r 和 i 分别表示实部和虚部.因为

$$\frac{\partial}{\partial a_{1\mathrm{r}}} = \frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_{1\mathrm{r}}} = \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial}{\partial a_{1\mathrm{i}}} = \frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_{1\mathrm{i}}} = \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial a_1}$$

以及对于 a_2 的类似公式,不难知道对于 a_1^*,a_2^* 求偏微商的公式为对 a_1,a_2 求偏微商的上述公式取复共轭.这样,(4.3.41)式取极小值的条件可由对 a_1,a_2 求偏微商或者对于 $a_1{}^*,a_2{}^*$ 求偏微商两者之一得出.如用后者,E 取极值的条件为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_1{}^*} &= \boldsymbol{F}_1{}^*\cdot(a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{g}) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial a_2{}^*} &= \boldsymbol{F}_2{}^*\cdot(a_1\boldsymbol{F}_1 + a_2\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{g}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.42}$$

(4.3.42)式表明当选取 $\boldsymbol{F}_1{}^*,\boldsymbol{F}_2{}^*$ 作为权函数时误差矢量的模取极小值,所以 $\boldsymbol{F}_1{}^*,\boldsymbol{F}_2{}^*$ 是最优权函数.

回到前面的简单例子. 当用

$$\boldsymbol{F}_1{}^* = (1-\mathrm{j})\boldsymbol{a}_x + (2+\mathrm{j})\boldsymbol{a}_y, \quad \boldsymbol{F}_2{}^* = \boldsymbol{a}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y + (3-2\mathrm{j})\boldsymbol{a}_z$$

作为权函数代入(4.3.42)式后,解出新的 a_1, a_2,则误差矢量(4.3.40)式可求出为$(0.0864-\mathrm{j}0.0578)\boldsymbol{a}_x+(-0.1826-\mathrm{j}0.3366)\boldsymbol{a}_y+(0.6922-\mathrm{j}0.3078)\boldsymbol{a}_z$,其模为 0.855,较之优化前显著减小.

现在回到 Hallén 积分方程(4.3.21),用归一化变量 u 它可以写作

$$\int_0^1 K(u,u')f(u')du' = g(u), \tag{4.3.43}$$

用优化的权函数 $F_m{}^*(u)$加权积分后得到的线性方程组为

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^1 F_m{}^*(u) F_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 F_m{}^*(u) g(u)\mathrm{d}u \quad (m = 1,2,\cdots,N), \tag{4.3.44}$$

这里

$$F_n(u) = \int_0^1 K(u,u') f_n(u')\mathrm{d}u'. \tag{4.3.45}$$

线性方程组(4.3.44)的解将使得积分方程(4.3.43)的两侧在

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} a_n F_n(u) - g(u) \right|^2 \mathrm{d}u$$

取极小值的意义下匹配,所以称为最小平方逼近法(或最小平方差法). 用最小平方逼近法求解细圆柱天线 Hallén 方程的例子可在[7]的 § 2.11 中找到.

§ 4.4 电磁波通过孔的辐射

1. 场等效原理应用于孔辐射问题

前面讨论过的柱形导体天线以及由它们组成的天线阵可代表实用辐射系统的一大类,在这里辐射源是导体上的传导电流. 大多数工作于 UHF 及其以下频段的天线属于这一类. 辐射系统的另一大类是孔型天线,亦称为口面天线,这里辐射源是导体孔面上的电磁场分布,各种形式的喇叭、隙缝以及抛物面反射天线均属于这一类,它们是工作于微波及其以上频段的天线的主要类型. 口面电磁场分布型的辐射源常被称为二次源,由场等效原理(§ 1.3)知道,口面上的电磁场分布等效于口面上的面电流和(或)面磁流分布,这样,等效源所产生的辐射场的计算问题便又归结为与(4.1.15)式类似的辐射积分的求值问题.

在实际的口面天线问题中孔的线度(至少其最大的一个线度)通常是大于甚至若干倍于波长,因此衍射效应可以略去(衍射的影响将在第六章中讨论). 口面

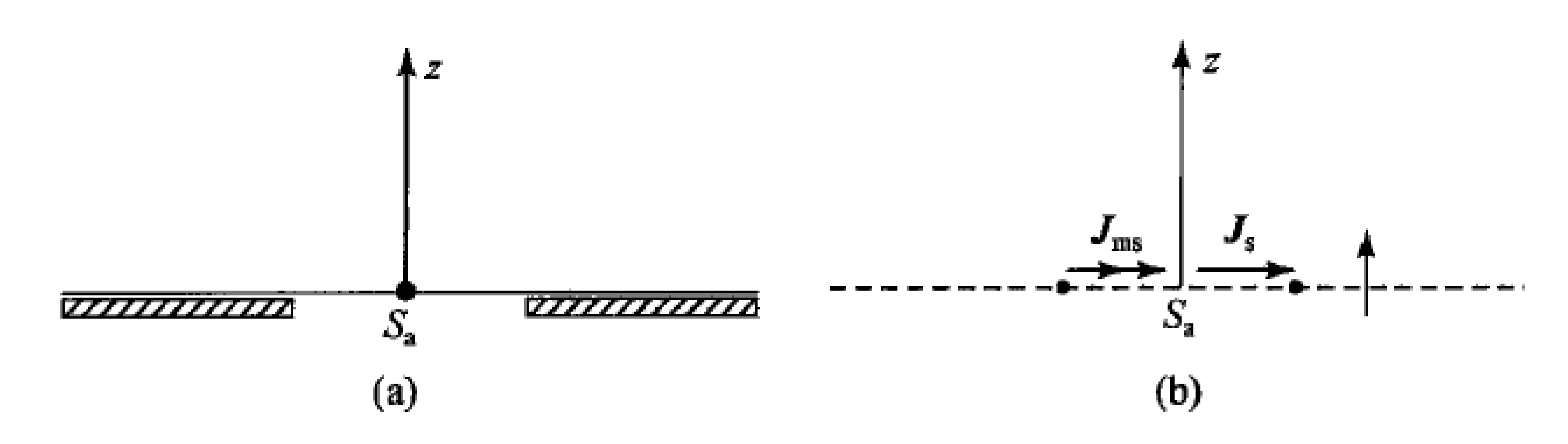


图 4.10 被入射波照射的平面导体孔(a)及其等效辐射源分布(b)

场的分布可以根据几何光学求出,例如对于图 4.10(a)所示的具有孔 S_a 的平面导体,可以认为孔面 S_a 上的电磁场等于入射波电磁场,而在导体不被照射的背面可以认为电磁场处处为零.应用场等效原理的第一种形式,即 Love 的场等效原理,孔面 S_a 上存在着等效面电流和面磁流

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_a, \quad \boldsymbol{J}_{ms} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_a, \tag{4.4.1}$$

这里 $\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{H}_a$ 为孔面 S_a 上入射波电、磁场的切线分量,$\boldsymbol{n}$ 为指向 $+z$ 方向的 S_a 面的单位法线.在 $z=0$ 平面的其余部分由于入射波的场为零而不存在等效源,因此等效源就是如图 4.10(b)所示的局限于 S_a 面上的由(4.4.1)式给出的等效面电流和面磁流分布.由于我们所关心的只是图 4.10(a)中 $z>0$ 半空间的场,等效源(4.4.1)式在这个区域中产生的电磁场与它在无界的区域中产生的场相同,因而可以很方便地用自由空间并矢 Green 函数给出.由(4.1.12)式,等效面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 在 $z>0$ 半空间产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{4.4.2a}$$

通过 Maxwell 方程式可求出磁场

$$\boldsymbol{H}_e(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{E}_e = \nabla \times \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'. \tag{4.4.2b}$$

等效面磁流 $\boldsymbol{J}_{ms}$ 产生的场可根据对偶原理写出:

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_{ms}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{4.4.3a}$$

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r}) = -\nabla \times \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_{ms}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'. \tag{4.4.3b}$$

等效面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 和等效面磁流 $\boldsymbol{J}_{ms}$ 的场合起来等于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r}) \\ &= -\mathrm{j}\omega\mu_0 \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' - \nabla \times \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_{ms}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S',\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \\
&= \nabla\times\iint_{S_a}\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\iint_{S_a}\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S',
\end{aligned}
\tag{4.4.5}
$$

这里

$$
\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right)\frac{1}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.1.9a}
$$

对于辐射问题中感兴趣的远区，近似关系(4.1.13)式仍然成立，这样，等效面电流在 $z>0$ 半空间中的远区辐射场可利用辐射积分 $\boldsymbol{N}(\theta,\phi)$ 表示为

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\theta N_\theta+\boldsymbol{a}_\phi N_\phi), \tag{4.4.6a}
$$

$$
\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}k_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\phi N_\theta-\boldsymbol{a}_\theta N_\phi); \tag{4.4.6b}
$$

等效面磁流的辐射场则可类似地表示为

$$
\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\theta L_\theta+\boldsymbol{a}_\phi L_\phi), \tag{4.4.7a}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}k_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\phi L_\theta-\boldsymbol{a}_\theta L_\phi), \tag{4.4.7b}
$$

现在辐射积分为

$$
\boldsymbol{N}(\theta,\phi)=\iint_{S_a}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}\mathrm{d}S', \tag{4.4.8a}
$$

$$
\boldsymbol{L}(\theta,\phi)=\iint_{S_a}\boldsymbol{J}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}\mathrm{d}S'. \tag{4.4.8b}
$$

由(4.4.6a,b)及(4.4.7a,b)式，孔面 S_a 上的等效源在 $z>0$ 半空间的辐射场的球坐标分量可表示为

$$
\left.\begin{aligned}
E_\theta &= -\mathrm{j}\omega\mu_0\left(N_\theta+\frac{1}{Z_0}L_\phi\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}, \quad H_\phi=\frac{1}{Z_0}E_\theta, \\
E_\phi &= -\mathrm{j}\omega\mu_0\left(N_\phi-\frac{1}{Z_0}L_\theta\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}, \quad H_\theta=\frac{-1}{Z_0}E_\phi.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.9}
$$

下面我们来看一个简单的例子.

【例】 平面波单元的辐射场.

考虑图 4.11 所示的位于坐标原点的微分面积元 $\mathrm{d}S'=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$，设此面积元上的孔场为平面波

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{a}_x E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \\
\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{a}_y H_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\boldsymbol{a}_y\frac{1}{Z_0}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.10}
$$

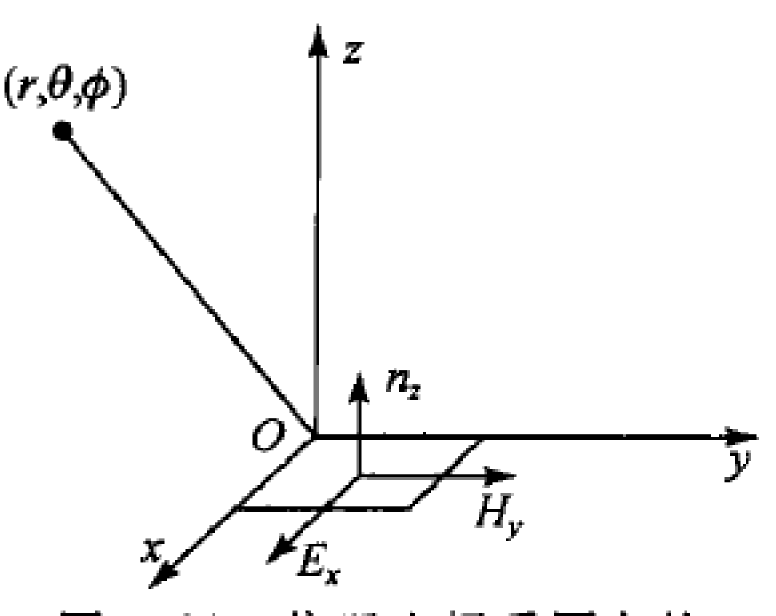


图 4.11 位于坐标系原点的平面波单元的辐射

我们来计算此平面波单元的辐射场.

(4.4.10)式代入(4.4.1)式求出等效面电流和面磁流为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}_s &= \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{H}_a = -\boldsymbol{a}_x \frac{1}{Z_0} E_0 e^{j\omega t}, \\ \boldsymbol{J}_{ms} &= -\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_a = -\boldsymbol{a}_y E_0 e^{j\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{4.4.11}$$

将上式代入(4.4.8a,b)式,取 $\boldsymbol{r}'=0$,容易求出辐射积分为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{N}(\theta,\phi) &= -\boldsymbol{a}_x \frac{1}{Z_0} E_0 dS' = \frac{1}{Z_0} E_0 dS'(-\boldsymbol{a}_\theta \cos\phi\cos\theta + \boldsymbol{a}_\phi \sin\phi), \\ \boldsymbol{L}(\theta,\phi) &= -\boldsymbol{a}_y E_0 dS' = E_0 dS'(-\boldsymbol{a}_\theta \sin\phi\cos\theta - \boldsymbol{a}_\phi \cos\phi).\end{aligned}\right\} \tag{4.4.12}$$

上式代入(4.4.9)式便求得辐射场

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= jk_0 E_0 dS'(1+\cos\theta)[\boldsymbol{a}_\theta \cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi \sin\phi] \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}, \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{Z_0} \boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\right\} \tag{4.4.13}$$

由(4.4.13)式求出的时间平均能流密度为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S} \rangle &= \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*) = \frac{E_0^2 (dS')^2}{8 Z_0 \lambda_0^2 r^2}(1+\cos\theta)^2 \boldsymbol{a}_r \\ &= \frac{E_0^2 (dS')^2}{2 Z_0 \lambda_0^2 r^2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \boldsymbol{a}_r \ (\mathrm{W/m^2}).\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

辐射功率的归一化方向分布函数

$$U(\theta,\phi) = \cos^4 \frac{\theta}{2} \tag{4.4.15}$$

如图 4.12 所示为一心形线. 最大辐射方向在正向法线方向 $\theta=0$,而在反方向 $\theta=\pi$ 辐射功率为零.

平面波辐射单元可看作为某些复杂的孔场分布的基本单元,如同短电流元作为线天线的辐射单元一样,通过对于平面波单元的辐射函数求积分便可近似求得复杂孔场分布的辐射.

2. 平面孔的辐射场[11]

对于许多实际的微波天线,例如喇叭、矩形波导开口以及抛物面反射天线等,孔面 S_a 是平面,这时使用面磁流+理想电导体面的等效形式更为方便. 仍然参考图 4.10(a),这时问题等效于 $z=0$ 平面上的理想导体平面和在 $z>0$ 一侧的孔平面 S_a 上分布的等效面磁流

$$\boldsymbol{J}_{ms} = -\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_a, \tag{4.4.16}$$

这个面磁流对于导体平面的镜像磁流与(4.4.16)式相同,结果 $z>0$ 半空间的电

磁场等于等效面磁流(4.4.16)式与它的镜像磁流之和

$$\boldsymbol{J}_{ms}=-2\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}_a \qquad (4.4.16a)$$

在自由空间中产生的电磁场. 由(4.4.7b)式可立即得出用辐射积分表示的辐射场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}k_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}(\boldsymbol{a}_\phi L_\theta-\boldsymbol{a}_\theta L_\phi). \qquad (4.4.17)$$

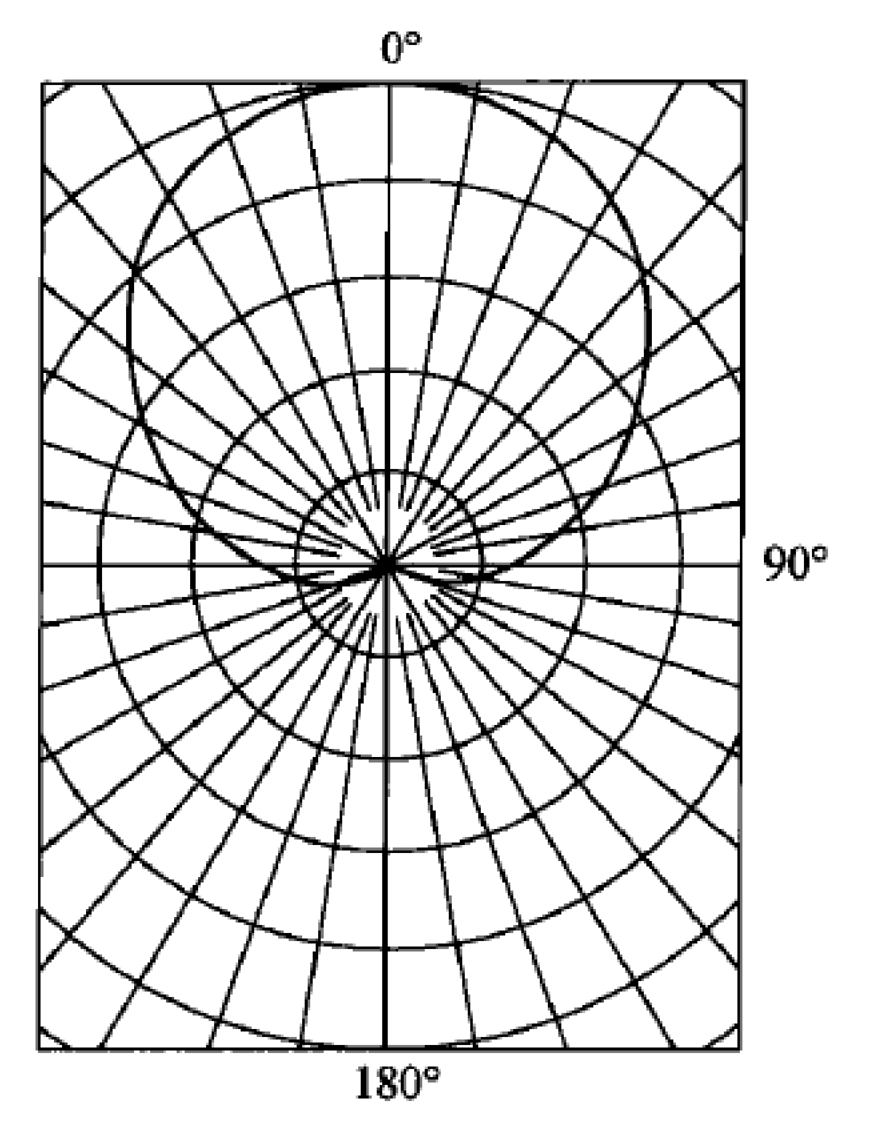


图 4.12　平面波单元的归一化辐射功率方向分布

现在用直角坐标计算孔平面 S_a 上的辐射积分较为方便. 将(4.4.16a)式代入(4.4.8b)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=-2\boldsymbol{a}_z\times\iint_{S_a}\boldsymbol{E}_a(x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\boldsymbol{a}_r\cdot(\boldsymbol{a}_x x'+\boldsymbol{a}_y y')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&=-2\boldsymbol{a}_z\times\iint_{S_a}\boldsymbol{E}_a(x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{0x}x'+\mathrm{j}k_{0y}y'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.\end{aligned}$$

由于已假定在整个 $z=0$ 平面上除孔面积 S_a 以外的区域切线电场处处为零,上式的积分可扩展到整个 $z=0$ 平面,上面的辐射积分就可写成

$$\boldsymbol{L}(\theta,\phi)=-2\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{F}_t(k_{0x},k_{0y}), \qquad (4.4.18)$$

其中

$$\boldsymbol{F}_t(k_{0x},k_{0y})=\iint_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}_a(x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{0x}x'+\mathrm{j}k_{0y}y'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \qquad (4.4.19)$$

是孔平面上的切线电场的二维 Fourier 变换式. 利用直角坐标与球坐标间的变换关系

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_x&=\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_r\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta\sin\phi+\boldsymbol{a}_\phi\cos\phi,\\\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_y&=-\boldsymbol{a}_x=-\boldsymbol{a}_r\sin\theta\cos\phi-\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta\cos\phi+\boldsymbol{a}_\phi\sin\phi,\end{aligned}\right\} \qquad (4.4.20)$$

可以将辐射积分 $\boldsymbol{L}$ 的球坐标分量用 $\boldsymbol{F}_t$ 的直角坐标分量表示为

$$L_\theta(\theta,\phi)=2(F_y\cos\phi-F_x\sin\phi)\cos\theta, \qquad (4.4.21a)$$

$$L_\phi(\theta,\phi)=-2(F_x\cos\phi+F_y\sin\phi), \qquad (4.4.21b)$$

这里为了简单起见已将 $\boldsymbol{F}_t$ 的下脚标 t 略去不写. (4.4.21a,b)式代入(4.4.17)式便得到辐射场的球坐标分量用 $\boldsymbol{F}_t$ 的直角坐标分量给出的简单表示式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}k_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{2\pi r}[\boldsymbol{a}_\theta(F_x\cos\phi+F_y\sin\phi)+\boldsymbol{a}_\phi(F_y\cos\phi-F_x\sin\phi)\cos\theta]. \qquad (4.4.22)$$

(4.4.22)式表明平面孔的辐射图形是孔场分布的二维 Fourier 变换式.

自然,计算平面孔的辐射问题也可以用场等效原理的第三种形式,即面电流

十理想磁导体面的等效形式,这时与(4.4.19)式相仿可定义

$$\boldsymbol{G}_t(k_{0x},k_{0y}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}_a(x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{0x}x'+\mathrm{j}k_{0y}y'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \tag{4.4.23}$$

孔的辐射场则相应地用孔切线磁场的二维 Fourier 变换式 $\boldsymbol{G}_t$ 的直角坐标分量表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}k_0 Z_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{2\pi r}[\boldsymbol{a}_\theta(G_y\cos\phi - G_x\sin\phi)\cos\theta - \boldsymbol{a}_\phi(G_y\sin\phi + G_x\cos\phi)]. \tag{4.4.24}$$

当使用场等效原理的第一种形式,即面电流十面磁流的等效形式时,平面孔的辐射场则由(4.4.22)式和(4.4.24)式之和之半给出:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\{\boldsymbol{a}_\theta[(F_x\cos\phi + F_y\sin\phi) + Z_0(G_y\cos\phi - G_x\sin\phi)\cos\theta] + \boldsymbol{a}_\phi[(F_y\cos\phi - F_x\sin\phi)\cos\theta - Z_0(G_y\sin\phi + G_x\cos\phi)]\}. \tag{4.4.25}$$

这样,对于平面孔场分布的辐射场我们可以用(4.4.22),(4.4.24)和(4.4.25)诸式之中的任一个进行计算,显然由于在(4.4.22)和(4.4.24)式中只用了一种形式的等效源,计算较为简单.但如果孔面 S_a 不是平面而是曲面,镜像面电流或面磁流不能简单地求出,而且对于非平面孔也不能作出二维 Fourier 变换式(4.4.19)或(4.4.23),计算公式(4.4.22),(4.4.24)和(4.4.25)便不能应用.因此曲面孔的辐射问题只能用(4.4.9)式进行计算.另一方面,对于平面孔的辐射问题由(4.4.22),(4.4.24)和(4.4.25)这三个公式所计算的结果显然不会相同.自然就会提出这样的问题,这三种等效形式之间是否完全等效.由§1.3中对于场等效原理的推导可知,这三种等效形式之间的等效是无疑的,问题在于确定孔场时不得不作近似.显然假定导体平面的背影区导体面上磁场的切线分量为零是不够合理的,而且假定孔面上的场等于入射场而不受孔边缘的扰动也不合理.由于对孔场的近似假定在这三种等效形式中所产生的影响不完全相同,就造成了这三种计算公式计算结果上的差别.实际的计算表明,在主辐射方向(即 z 轴)附近的小角度范围内由这三种表达式计算的结果是一致的,但对于偏离主辐射方向较大角度区域的辐射场,这三个公式的计算值有一定的差别.更为精确的公式则必需包括孔边缘的衍射效应,有关的讨论将在第六章中给出.

3. 平面波均匀照射的圆形孔的辐射

我们来考虑一个典型的平面孔的辐射问题,即被平面波均匀照射的圆形孔的辐射.图4.13所示为一无限大导电屏,其上开有半径为 a 的圆孔,设屏 $z<0$ 一侧被垂直入射的线极化平面波均匀照射,波的电场沿 x 轴方向.在 $z>0$ 一侧

的屏平面上的切线电场可假设为零，孔平面上的切线电场则为平面波的照射场：

$$\boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{a}_x E_0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant a. \tag{4.4.26}$$

上式代入(4.4.19)式得

$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{a}_x E_0 \iint_{S_a} e^{jk_{0x}x'+jk_{0y}y'} dx'dy'. \tag{4.4.27}$$

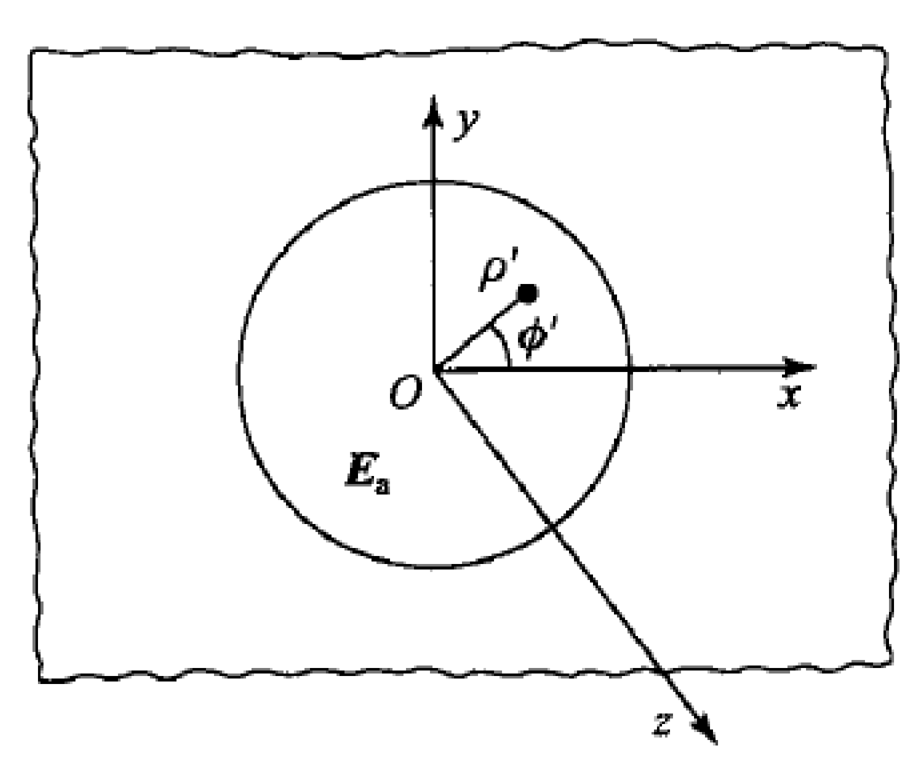


图 4.13　被平面波均匀照射的平面导体上圆形孔的辐射

为简化积分(4.4.27)式的计算，引入 xy 平面上的极坐标(ρ',ϕ')：

$$x' = \rho'\cos\phi', \quad y' = \rho'\sin\phi', \tag{4.4.28}$$

而将 $\boldsymbol{k}_0$ 的直角坐标分量用球坐标表示，

$$k_{0x} = k_0\sin\theta\cos\phi, \quad k_{0y} = k_0\sin\theta\sin\phi. \tag{4.4.29}$$

(4.4.28)式和(4.4.29)式代入(4.4.27)式得

$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{a}_x E_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{jk_0\rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} \rho' d\rho' d\phi'. \tag{4.4.30}$$

利用 Bessel 函数的积分表示式①

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jx\cos\alpha} d\alpha \tag{4.4.31}$$

及积分关系

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x), \tag{4.4.32}$$

(4.4.30)式中对于 $d\phi'$的积分及 $d\rho'$的积分可先后积出：

$$\int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} e^{jk_0\rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi\int_0^a \rho' J_0(k_0\rho'\sin\theta) d\rho' = \frac{2\pi a}{k_0\sin\theta} J_1(k_0 a\sin\theta).$$

这里 $J_0(x)$和 $J_1(x)$分别为零阶及一阶第一类 Bessel 函数. 于是，本问题中孔场的 Fourier 变换式就是个很简单的表示式，仅有 F_x 分量

$$\boldsymbol{F}_t = \frac{2\pi a E_0}{k_0\sin\theta} J_1(k_0 a\sin\theta)\boldsymbol{a}_x = F_x\boldsymbol{a}_x. \tag{4.4.30a}$$

上式代入(4.4.22)式便得辐射场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{jk_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} F_x [\boldsymbol{a}_\theta\cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi\sin\phi\cos\theta] \\ &= j\,\frac{2\pi a^2 E_0}{\lambda_0 r}\,\frac{J_1(k_0 a\sin\theta)}{k_0 a\sin\theta} e^{-jk_0 r}[\boldsymbol{a}_\theta\cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi\sin\phi\cos\theta],\end{aligned} \tag{4.4.33}$$

① (4.4.31)和(4.4.32)可分别由 I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik 所著 Table of Integrals, Series, and Products 中的 8.411(7)和 5.52(1)式导出，见该书的 1980 年版，Academic Press.

时间平均辐射能流密度则为

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{2\pi^2 a^4 E_0^2}{Z_0\lambda_0^2 r^2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi\cos^2\theta)\left[\frac{\mathrm{J}_1(k_0 a\sin\theta)}{k_0 a\sin\theta}\right]^2 \boldsymbol{a}_r \quad (单位：\mathrm{W/m^2}), \tag{4.4.34}$$

可见辐射的极大方向在孔平面的正法线方向，即 $\theta=0$ 方向.

另一方面，均匀照明的圆孔的时间平均辐射功率也可利用平面波单元的辐射的已知结果求出.考虑到各个平面波单元的相位对于辐射积分的影响，利用(4.4.14)式，均匀照明的圆孔的时间平均辐射功率可写作

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0\lambda_0^2 r^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 \boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\right]^2 \boldsymbol{a}_r. \tag{4.4.35}$$

因为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_x\rho'\cos\phi' + \boldsymbol{a}_y\rho'\sin\phi',$$

利用(4.4.20)式可得

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r = \rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi').$$

于是(4.4.35)式方括号中的积分变得与(4.4.30)式中的积分相同，因此得

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{2\pi^2 a^4 E_0^2}{Z_0\lambda_0^2 r^2}\left(\cos^4\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{\mathrm{J}_1(k_0 a\sin\theta)}{k_0 a\sin\theta}\right]^2 \boldsymbol{a}_r \quad (\mathrm{W/m^2}). \tag{4.4.36}$$

(4.4.34)和(4.4.36)两式圆括号中的角分布因子不同，这是由于在这两种计算方法中使用了不同的等效源，但在极大辐射方向附近，即 $\theta\approx 0$ 的小角区域内，这两个表示式则化成相同的形式.

由(4.4.34)式和(4.4.36)式，在 $\theta\approx 0$ 的小角区域内辐射图函数为

$$U(\theta,\phi) = \left[\frac{\mathrm{J}_1(k_0 a\sin\theta)}{k_0 a\sin\theta}\right]^2. \tag{4.4.37}$$

$[U(\theta,\phi)]^{\frac{1}{2}}$ 作为 $k_0 a\sin\theta$ 的函数关系示于图 4.14，由于这个函数存在着许多零点，故辐射波束分裂成许多波瓣.

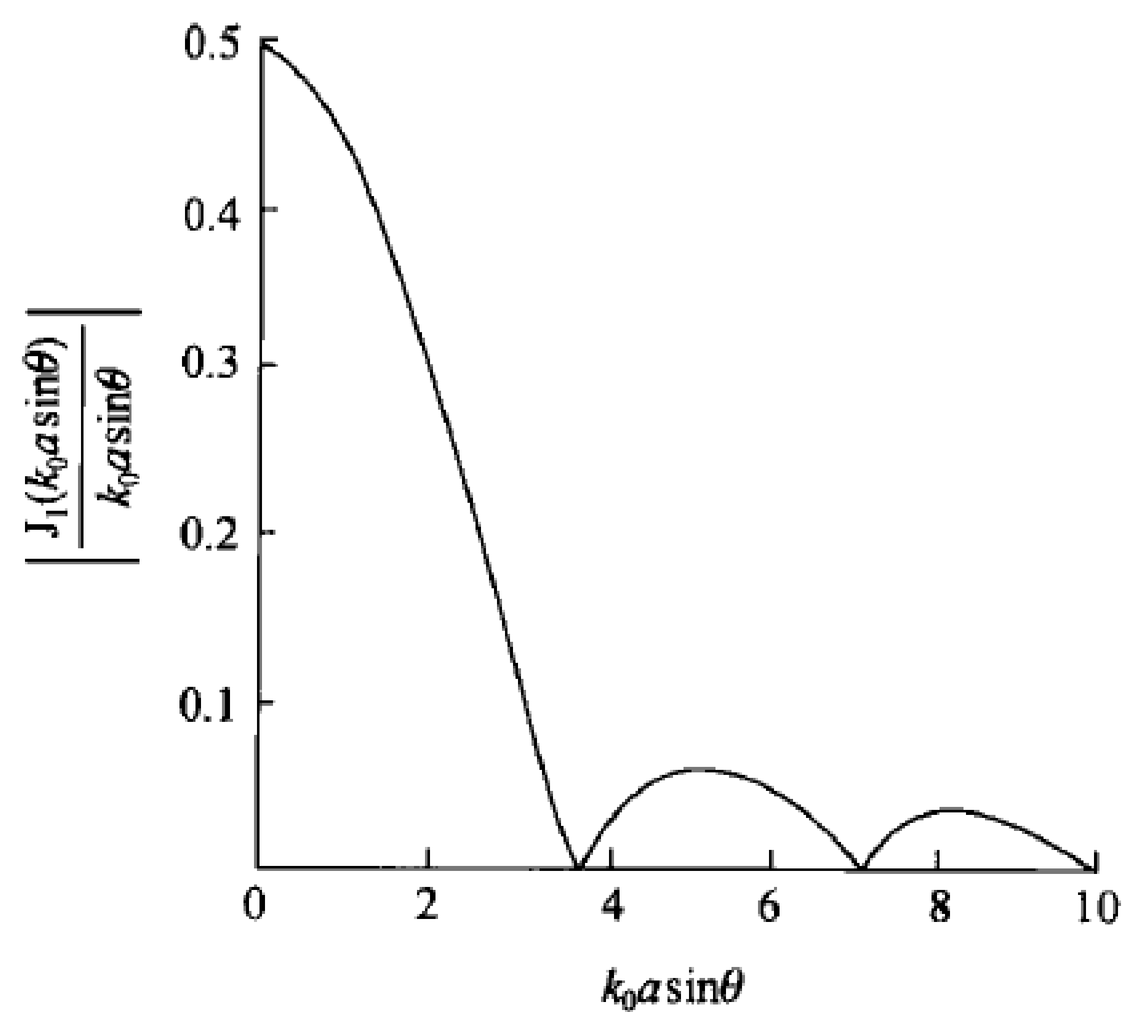


图 4.14 被平面波均匀照射的圆孔极大辐射方向附近的辐射图函数

让我们来计算主波瓣的宽度. 辐射图函数(4.4.37)式的零点由

$$\mathrm{J}_1(k_0 a\sin\theta) = 0$$

确定. $\mathrm{J}_1(x)$的第一个根为 $x=k_0 a\sin\theta_0=3.832$，由此解出

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{1.22\lambda_0}{2a}\right)\approx 69.9^\circ\,\frac{\lambda_0}{2a}. \tag{4.4.38}$$

θ_0 的这个值给出主波瓣的极大点与零点之间的半角宽. 主波瓣的半功率半束宽 θ_{HP}由关系式

$$k_0 a\sin\theta_{\mathrm{HP}} = 1.6 \tag{4.4.39}$$

确定，由此解出

$$\theta_{\mathrm{HP}} = \arcsin\left(\frac{1.6\lambda_0}{2\pi a}\right)\approx 29.2^\circ\,\frac{\lambda_0}{2a}. \tag{4.4.40}$$

(4.4.38)式和(4.4.40)式可用来近似估计抛物面反射天线的辐射主波瓣的特性.

抛物面反射天线是一种使用得最为广泛的口面天线，处于抛物面主焦点的馈源，例如喇叭或波导开口，发射的电磁波在导体抛物面上受到反射. 在射线光学近似下从抛物面上反射的电磁波在垂直于抛物面轴线的平面上将形成圆形的口面场分布. 根据这个口面场分布来计算抛物面天线的辐射特性，这就是分析抛物面天线的口面场方法. 自然这只是一种近似方法，但用这种方法对于主瓣和近旁瓣的计算还是很准确的. 由于主焦点的馈源不是理想的点源，而且实际上希望减弱抛物面边缘的照射场以降低旁瓣电平，所以抛物面的孔场分布实际上是不均匀的. 由于这些实际因素，(4.4.38)式所给出的 θ_0 值实际上接近于抛物面天线主波瓣的 θ_{HP}值，抛物面反射天线的精确计算是一项十分困难的工作，还需要使用较口面积分法更为严格的面电流积分法.

§4.5 微带天线[12]

1. 谐振腔模型

敷在电介质基片上的薄导体片(贴片)和衬在基片下的接地金属板连同它们之间的基片构成微带天线，也称为贴片天线，贴片的形状可以是矩形、圆形、菱形、三角形或其他形状. 由于可以使用印刷电路技术，制作成本低，以及低轮廓、轻重量等优点，这种天线单元已获得广泛应用. 更为重要的是，可以使用集成电路技术将天线与发送或接收固态电路制作在一起构成有很多单元的有源天线阵，例如相控阵天线系统.

关于微带天线的辐射机理已有相当多的研究，形成了多种理论模型和分析

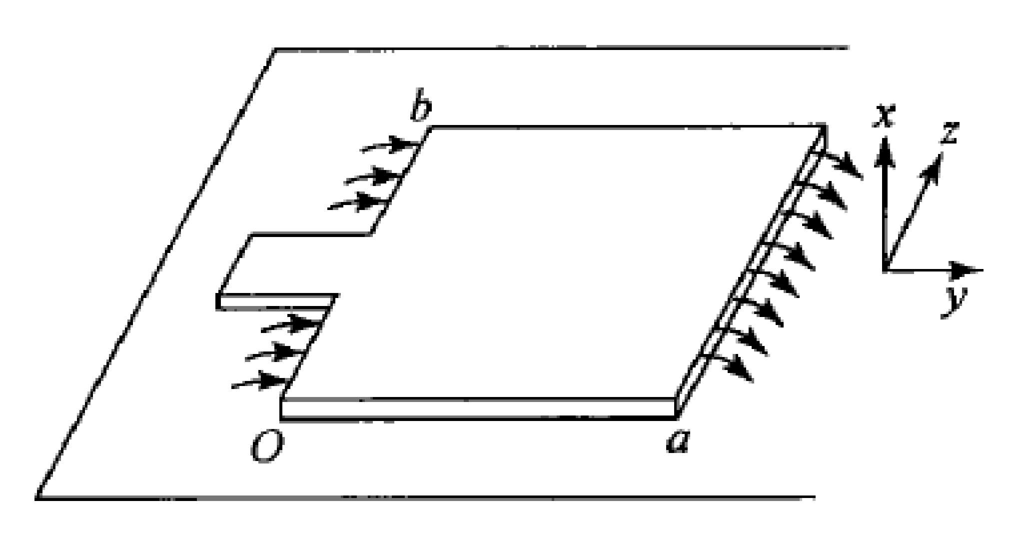


图 4.15 微带天线的传输线模型

方法，本节仅就其基本原理作一简单介绍，欲进一步了解须参考专著或代表性论文[①]. 较简单的是传输线模型，如图 4.15 所示，沿馈电传输线传播的准 TEM 模在贴片与接地导体板构成的平行板传输线上继续保持 TEM 模，在 $y=0,a$ 两处的上下导体板间隙中形成如图所示的电力线分布. 由于 $a\sim\lambda_g/2$，λ_g 为介质填充的传输线的波导波长，这两处缝隙场的 y 分量反相，辐射相消，但电场的 x 分量产生同相辐射，其和构成贴片天线的辐射场. 用传输线模型解释矩形贴片天线的辐射已获得成功，但解释其他形状贴片天线的辐射有一定困难.

有更广泛适用性的是谐振腔模型，与传输线模型相同，谐振腔模型仍然认为辐射源是贴片边缘与接地导体板之间的缝隙中形成的孔场，但在求孔场时使用谐振腔模型. 由矩形贴片和接地导体板构成的谐振腔示于图 4.16，这个扁平的谐振腔的上、下盖板由电导体担任($x=0$，导体板；$x=h$，贴片)，在贴片的四边与导体板垂直的四个狭长矩形面为理想磁导体面(称为磁壁)，充当谐振腔的侧壁.

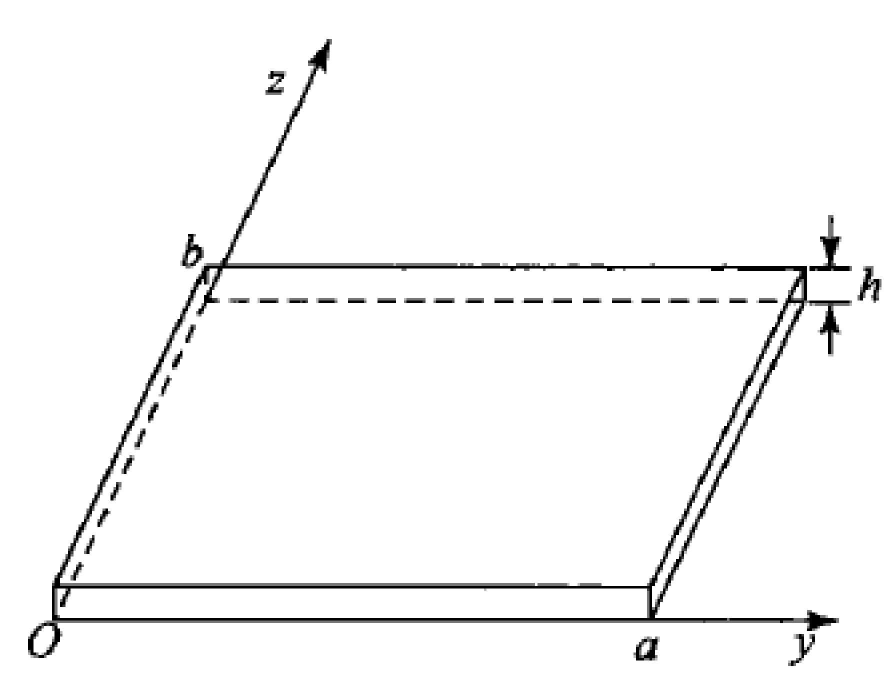


图 4.16 微带天线的谐振腔模型

因为在贴片边缘电流为零，相当于开路端，分别满足条件

$$H_z\big|_{y=0,a}=0 \text{ 和 } H_y\big|_{z=0,b}=0, \tag{4.5.1}$$

切线磁场为零要求这四个侧面为理想磁导体面.

设谐振腔由同轴探针激励，探针通过导体板上的开孔伸入腔内，同轴线外导体在孔边缘与导体板相连，内导体(探针)沿 x 轴正向位于(y_0，z_0)点. 这样的探针将在腔内激励相对于 x 方向的 TM 模，我们来求它的电磁场.

因为介质基片的厚度 $h\ll\lambda_g$，可以认为腔场沿 x 方向均匀，$\partial/\partial x=0$. 由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

可知 E_y，E_z 与 E_x 无关. 考虑到 $\partial/\partial x=0$ 还有

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_y\frac{\partial E_x}{\partial z}-\boldsymbol{a}_z\frac{\partial E_x}{\partial y},$$

① 例如，K. R. Carver and J. W. Mink，Microstrip antenna technology，*IEEE Trans.*，vol. AP-29，pp. 2—24，Jan. 1981.

此式说明 $\boldsymbol{H}$ 仅与 E_x 有关，而与 E_y,E_z 无关. 因此，可以认为 $E_y=E_z=0$，TM 模式仅有 E_x,H_y,H_z 三个分量.

电场满足的波动方程现在具体写作

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x+k^2E_x=\begin{cases}\mathrm{j}\omega\mu_0 J_x, & \text{激励源区}(y_0,z_0)\text{点附近},\\ 0, & \text{激励源区外},\end{cases} \tag{4.5.2}$$

$k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon$，$\varepsilon$ 为介质基片的介电常数. E_x 在腔的四个侧壁面上应满足的条件，可由(4.5.1)式求出：

$$\left.\begin{aligned} H_y|_{z=0,b}=0 \quad &\text{导致}\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0,b}=0,\\ H_z|_{y=0,a}=0 \quad &\text{导致}\left.\frac{\partial E_x}{\partial y}\right|_{y=0,a}=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.5.3}$$

方程(4.5.2)满足边界条件(4.5.3)的解为

$$E_x=A_{mn}\cos\frac{m\pi y}{a}\cdot\cos\frac{n\pi z}{b}\quad(m,n=0,1,2,\cdots), \tag{4.5.4}$$

但 m,n 不能同时为零，谐振频率

$$(f)_{\mathrm{TM}_{mn}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_0\varepsilon}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5.5}$$

磁场分量

$$\left.\begin{aligned} H_y&=-\mathrm{j}\frac{n\pi}{\omega\mu_0 b}\cos\frac{m\pi}{a}y\cdot\sin\frac{n\pi}{b}z,\\ H_z&=\mathrm{j}\frac{m\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{m\pi}{a}y\cdot\cos\frac{n\pi}{b}z.\end{aligned}\right\} \tag{4.5.6}$$

解(4.5.4)是齐次方程的解，由所有可能解的线性组合

$$E_x=\sum_{m,n}A_{mn}\cos\frac{m\pi y}{a}\cdot\cos\frac{n\pi z}{b} \tag{4.5.7}$$

来满足(4.5.2)的非齐次(激励)条件.

然而谐振腔模型也只是近似理论，目前实际上还没有精确的微带天线理论，不过由谐振腔模型计算的辐射场与实验测量结果符合得相当好，可用于工程设计. 下面来看用谐振腔模型的具体计算.

2. 矩形贴片天线的辐射

设 $a>b$，最低次 TM 模为 TM_{10} 模，其谐振频率

$$(f)_{\mathrm{TM}_{10}}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\varepsilon}}, \tag{4.5.8}$$

电场分量

$$E_x=A_{10}\cos\frac{\pi y}{a}. \tag{4.5.9}$$

贴片四周隙缝面上的等效面磁流密度

$$\boldsymbol{J}_{ms}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{n}E_x,\tag{4.5.10}$$

$\boldsymbol{n}$ 为腔的四个侧壁面的外法线. 对于导体底板上方半空间的辐射问题,面磁流(4.5.10)再加上它的镜像磁流后导体板便可移去. 求出等效磁流分布

$$\boldsymbol{J}_{ms}=\begin{cases}-2A_{10}\boldsymbol{a}_z,\ y=0,a;\\ 2A_{10}\cos\dfrac{\pi y}{a}\boldsymbol{a}_y,\ z=0;\\ -2A_{10}\cos\dfrac{\pi y}{a}\boldsymbol{a}_y,\ z=b.\end{cases}\tag{4.5.11}$$

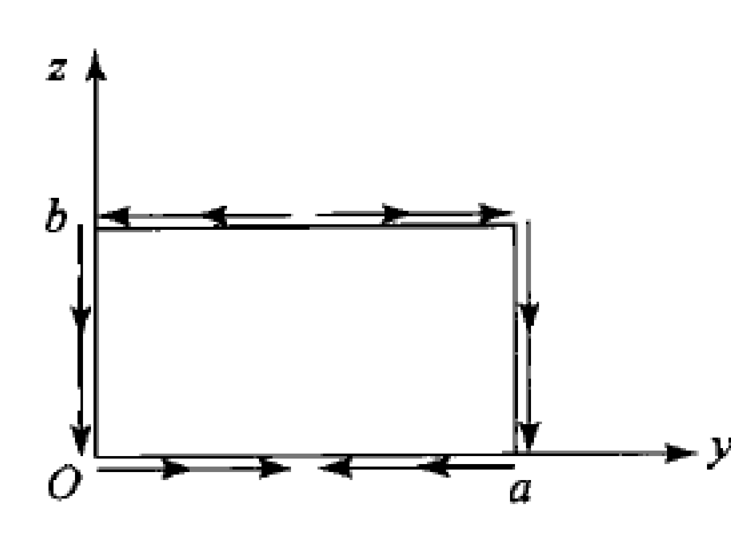


图 4.17 微带天线谐振腔模型中的等效辐射磁流分布

沿带状侧面流动的磁流 $I_m=hJ_{ms}$,由于 h 很小,可视为线磁流. 线磁流的分布及流向在图 4.17 示出. 可以看出,两个长边上磁流的流向彼此相反,辐射场相消. 两条短边上的线磁流的辐射在 x 方向同相叠加,这实际上是两根平行的线磁流构成的二元侧射阵(见 § 4.6).

磁流的辐射场用(4.4.8b)式的辐射积分 $\boldsymbol{L}(\theta,\phi)$ 计算,现在 $\boldsymbol{L}$ 只有 z 分量,可分解出 θ 分量,$L_\theta=-\sin\theta\cdot L_z$. 由(4.4.7b)式得辐射电场

$$E_\phi=\mathrm{j}k_0L_\theta\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}=-\mathrm{j}k_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{4\pi r}L_z.\tag{4.5.12}$$

利用(4.4.8b)计算出 L_z:

$$\begin{aligned}L_z&=-2hA_{10}\left[\int_0^b\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z'\cos\theta}\mathrm{d}z'+\int_0^b\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\boldsymbol{a}_r\cdot(a\boldsymbol{a}_y+z'\boldsymbol{a}_z)}\mathrm{d}z'\right]\\&=-2hA_{10}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0a\sin\theta\sin\phi})\int_0^b\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z'\cos\theta}\mathrm{d}z'\\&=-4bhA_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta\sin\phi+\mathrm{j}k_0\left(\frac{b}{2}\right)\cos\theta}\cos\left(k_0\frac{a}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\frac{\sin\left[k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta\right]}{k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta},\end{aligned}\tag{4.5.13}$$

第二个等式积分号前圆括号内为二元阵的阵因子. 上式代入(4.5.12)式,得矩形贴片天线的远区辐射场(图 4.18)

$$\begin{aligned}E_\phi=&\ \mathrm{j}k_0bhA_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta\cdot\sin\phi+\mathrm{j}k_0\left(\frac{b}{2}\right)\cos\theta}\cdot\cos\left(k_0\frac{a}{2}\sin\theta\cdot\sin\phi\right)\\&\cdot\frac{\sin\left[k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta\right]}{k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta}\cdot\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{\pi r}.\end{aligned}\tag{4.5.14}$$

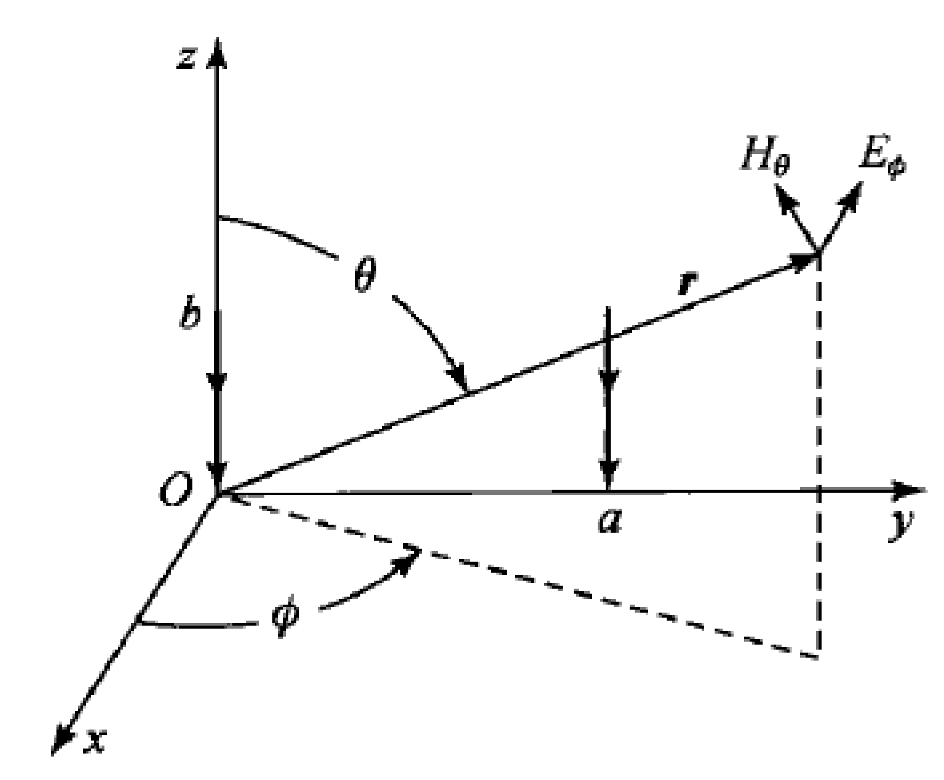


图 4.18　微带天线谐振腔模型的辐射等效于线磁流二元侧射阵的辐射

磁场只有 θ 分量，

$$H_\theta = -\frac{1}{Z_0}E_\phi = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 bhA_{10}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta\cdot\sin\phi+\mathrm{j}k_0\left(\frac{b}{2}\right)\cos\theta}$$

$$\cdot\cos\left(k_0\,\frac{a}{2}\sin\theta\cdot\sin\phi\right)\frac{\sin\left[k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta\right]}{k_0\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta}\cdot\sin\theta\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{\pi r}. \quad (4.5.15)$$

天线辐射的主瓣指向与贴片垂直的上方，即 x 轴方向，为一宽侧射瓣，无可视旁瓣. 最大辐射在 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\phi=0$ 方向，在此方向(4.5.14)和(4.5.15)式简化为

$$\left.\begin{aligned} E_\phi &= \mathrm{j}k_0 bhA_{10}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{\pi r}, \\ H_\theta &= -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 bhA_{10}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{\pi r}. \end{aligned}\right\} \quad (4.5.16)$$

§ 4.6　天线阵理论基础[13]

1. 方向图相乘原理

到现在为止，我们对天线的讨论基本上限于单个天线，例如短偶极子、半波天线、辐射孔、微带贴片等. 除了大口径的抛物面反射天线外，这些单元天线的方向性相当有限，而许多实际工程应用要求天线具有更高的方向性，以产生具有高度集中的定向波束，例如点对点的通信. 提高方向性的方法之一是扩大天线的辐射孔径或尺度，对于抛物面反射天线这种方法是有效的，但对其他类型的天线其效果有限，例如由不足 1/10 波长长度的短偶极子加长到半波天线时，增益的提高不足 0.5 dB. 提高辐射器方向性的另一种方法是使用多个简单天线单元组成阵天线，虽然每个天线单元的尺度没有增大，但由多个单元辐射的叠加可形成具

有高方向性的波束.现代的阵天线单元数目可以达到千、万甚至更高,用阵技术构建了多种类型功能强大的天线系统,具有波束扫描功能的相控阵天线就是阵技术的杰作.天线阵技术已成为天线技术十分重要的组成部分,本节仅就其基本原理作简单介绍.

考虑由分布在三维空间有限区域的 N 个辐射单元组成的天线阵,取定一球坐标系,尽管其原点可任取,为方便起见将它取在辐射单元分布的空间区域内,每个辐射单元参考点的位置用矢量 $\boldsymbol{r}_n(n=1,2,\cdots,N)$ 表示.设所有辐射单元都相同,而且具有相同的空间取向,激励于同一频率,但可以有不同的相对激励幅度 A_n 和相位 β_n.不论实际是否存在,可以设坐标原点有一作为参考的辐射单元,激励于单位幅度和零相位.由 §4.1 和 §4.4,此参考辐射单元远区辐射场的角分布由辐射积分 $\boldsymbol{N}(\theta,\phi)$(对于电流源)或 $\boldsymbol{L}(\theta,\phi)$(对于磁流源)确定,其远区辐射电场可以写作

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r},\tag{4.6.1}$$

这里 $\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)$ 为辐射场的方向分布函数,如果忽略阵单元之间的互耦,$\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)$ 便表示所有阵单元都相同的辐射场方向分布.

这个 N 元阵的辐射场由各个单元辐射场的矢量和构成,对于远区的场点可以认为由各单元引向场点的矢径彼此平行,但由于空间距离的差别而导致第 n 个单元的辐射场相对于参考单元有相差 $k_0\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{r}_n$.因此,远区的辐射场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{N}A_ne^{j\beta_n}\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)\frac{e^{-jk_0r+jk_0\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{r}_n}}{4\pi r}\\&=\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r}\sum_{n=1}^{N}A_ne^{j\beta_n+jk_0\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{r}_n}=\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)F_a(\theta,\phi)\frac{e^{-jk_0r}}{4\pi r},\end{aligned}\tag{4.6.2}$$

这里

$$F_a(\theta,\phi)=\sum_{n=1}^{N}A_ne^{j\beta_n+jk_0\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{r}_n}.\tag{4.6.3}$$

由方向性的定义(4.1.25),这个 N 元阵的方向性

$$D(\theta,\phi)=\frac{1}{8\pi Z_0P_r}|\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)|^2\ |F_a(\theta,\phi)|^2\propto|\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)|^2\ |F_a(\theta,\phi)|^2.\tag{4.6.4}$$

可见,阵天线的方向性与两个角分布函数的乘积成正比,$|\boldsymbol{F}_e(\theta,\phi)|^2$ 是阵单元的辐射功率密度角分布函数,称为单元因子;(4.6.3)式定义的 $F_a(\theta,\phi)$ 表示阵对辐射方向分布的影响,称为阵因子.式(4.6.4)表明阵天线的方向性由单元因子和阵因子的乘积决定,称为方向图相乘原理.

根据方向图相乘原理,对于阵天线的研究自然就侧重于阵因子,即阵单元的几何位置及阵单元的激励幅度和相位对阵辐射方向分布的影响.在研究阵因子

时可以假设阵单元是具全向辐射特性的点源，使问题简化.

2. 一维等间距线阵

现在来具体讨论天线阵，我们限于考虑一维阵，此时所有阵元均排列在一条直线上. 设阵元为辐射点源，将阵元所在直线取作 z 轴，并取第一个阵元所在点为坐标原点. 阵元之间保持等间距，间距为 d；所有阵元的激励幅度均相等，$A_n=A$；而且相邻阵元之间激励的相位差也相等，$\beta_{n+1}-\beta_n=\beta$，这样的阵天线称为一维等间距均匀激励阵，由每一阵元引向远区场点的矢径彼此平行，它们与 z 轴的夹角为 θ，如图 4.19 所示.

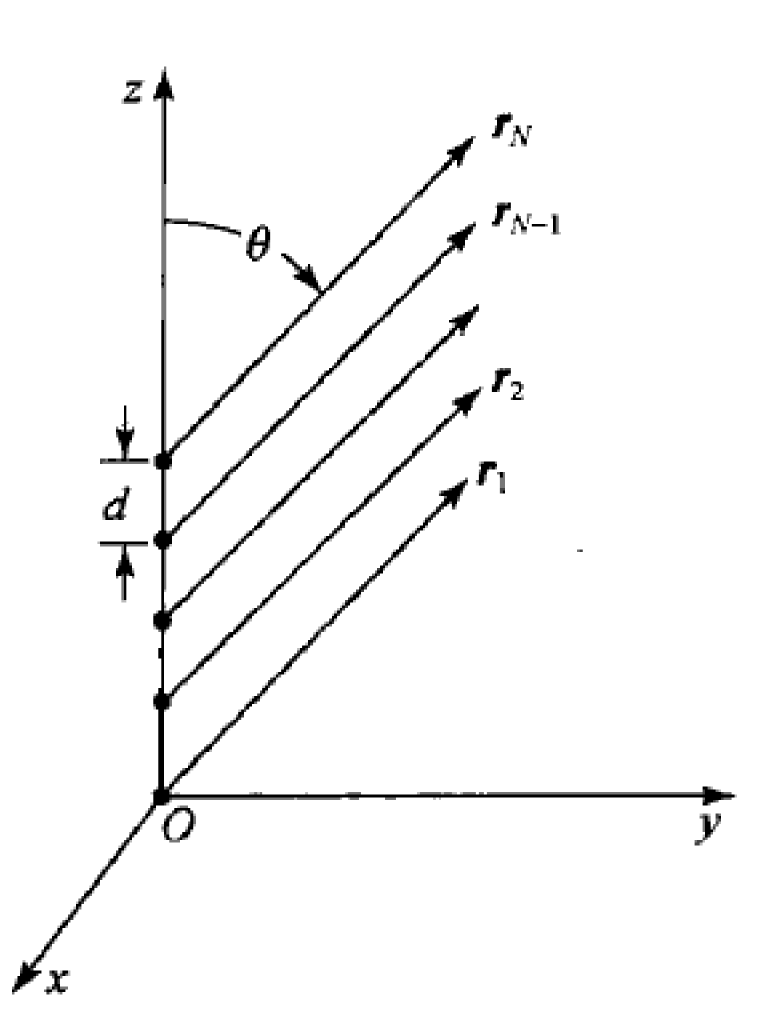


图 4.19　一维等间距线阵的辐射

由式(4.6.3)，上述 N 元线阵的阵因子为

$$F_a(\theta,\phi)=A\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-1)(k_0 d\cos\theta+\beta)}. \quad (4.6.5)$$

令 $\psi=k_0 d\cos\theta+\beta$，利用几何级数的求和公式，上式可写作

$$F_a(\theta,\phi)=A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\psi}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}-1}=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[(N-1)\psi/2]}\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}. \quad (4.6.6)$$

在(4.6.4)式中我们看到，决定辐射方向分布的是阵因子的模，上式取模后得

$$|F_a(\theta,\phi)|=A\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}. \quad (4.6.7)$$

为了方便，研究方向分布时常使用归一化的阵因子，上式分式的最大值为 N，上式归一化后写作

$$(AF)_n=\frac{\sin(N\psi/2)}{N\sin(\psi/2)}. \quad (4.6.8)$$

当 $\frac{1}{2}\psi=\frac{1}{2}(k_0 d\cos\theta+\beta)=\pm m\pi(m=0,1,2,\cdots)$ 时，$(AF)_n=1$ 达到最大值，对应的辐射方向

$$\theta_m=\arccos\left[\frac{\lambda_0}{2\pi\mathrm{d}}(-\beta\pm 2m\pi)\right] \quad (4.6.9)$$

为波束的主极大方向. 实际的物理空间称为可视空间，它限制在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 范围内，这要求 $-k_0 d\leqslant k_0 d\cos\theta\leqslant k_0 d$，为使可视空间内只有一个辐射主极大（主瓣），$d$ 的选取受到限制，通常要求 d 足够小，使其余主极大不出现于可视空间内.

在两个相邻的主极大之间有一些零点，当(4.6.8)式右侧的分子为零但分母不为零时形成零点，即 $\left(\frac{1}{2}N\psi\right)=\left[\frac{1}{2}N(k_0 d\cos\theta+\beta)\right]=\pm n\pi$，但 $n\neq N, 2N$，

$3N,\cdots$. 对应的空间角

$$\theta_n = \arccos\left[\frac{\lambda_0}{2\pi d}\left(-\beta \pm \frac{2n}{N}\pi\right)\right]. \tag{4.6.10}$$

在这些零点之间出现次极大，称为辐射的旁瓣，为求出最大旁瓣相对于主瓣的强度，我们使用(4.6.8)的近似式

$$(AF)_n = \frac{\sin(N\psi/2)}{\frac{1}{2}N\psi}, \tag{4.6.8a}$$

此式在 $\psi=0$ 附近成立. 旁瓣的峰值发生于上式的分子达到极大时，即在 $\sin\left(\frac{1}{2}N\psi\right)=\sin\left[\frac{1}{2}N(k_0 d\cos\theta+\beta)\right]=\pm 1$ 时，相应的空间角

$$\theta_s = \arccos\left\{\frac{\lambda_0}{2\pi d}\left[-\beta \pm \left(\frac{2S+1}{N}\pi\right)\right]\right\} \quad (S = 1,2,3,\cdots), \tag{4.6.11}$$

第一旁瓣峰值的空间角

$$\theta_1 = \arccos\left[\frac{\lambda_0}{2\pi d}\left(-\beta \pm \frac{3\pi}{N}\right)\right],$$

对应于 $N\psi/2=\pm 3\pi/2$. 代入(4.6.8a)式，求得第一旁瓣的幅值 $(AF)_n \approx 2/3\pi = 0.212$，换算成分贝，第一旁瓣的方向性较主瓣降低了 13.5 dB.

3. 侧射阵

在阵天线的实际应用中有两种重要的设计方案是经常使用的，现在用一维等间距线阵来说明. 一种阵设计方案是使最大辐射方向与阵轴线垂直，对于图 4.19 所示一维阵，在 $\theta=\pi/2$ 方向产生最大辐射，这种阵称为侧射阵. 由于 $\psi=k_0 d\cos\theta+\beta=0$ 时有最大辐射，这就要求 $\beta=0$，也就是说所有阵元同相激励，这样在与阵轴线垂直的方向上所有阵元的辐射能同相叠加. 实际的阵元辐射有方向性，在设计侧射阵时须安排使阵元的最大辐射方向指向 $\theta=\pi/2$. 在上一节中我们看到了矩形贴片天线的辐射就是两根同相激励的线磁流构成的二元侧射阵的辐射. 须限制阵元间距 d 略小于 λ_0，否则在可视空间会出现另外的辐射主瓣.

辐射主极大两侧的辐射零点之间的角宽决定辐射主瓣的角宽，这两个零点发生于 $\frac{1}{2}N\psi=\frac{1}{2}Nk_0 d\cos\theta=\pm\pi$. 设 $\theta=\frac{\pi}{2}+\Delta\theta$，得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\Delta\theta\right)=\pm\sin\Delta\theta=\pm\frac{\lambda_0}{Nd}.$$

当 N 很大时近似有

$$\Delta\theta = \frac{\lambda_0}{Nd} \approx \frac{\lambda_0}{L},$$

这里 L 为阵的总长. 因此,主波瓣零点之间的角宽

$$\mathrm{BW} = 2\Delta\theta = \frac{2\lambda_0}{L}, \tag{4.6.12}$$

主波瓣的角宽度随以波长度量的阵长度的增加而减小.

现在来计算侧射阵的方向性,当阵元为全向性的点源时,由(4.6.4)式

$$D(\theta,\phi) = \frac{|F_a(\theta,\phi)|^2}{8\pi Z_0 P_r} = \frac{4\pi\,|F_a(\theta,\phi)|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|F_a(\theta,\phi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}$$

$$= \frac{4\pi(AF)_n^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}, \tag{4.6.13}$$

分母中的积分来自辐射总功率 P_r,现在须求出这个积分.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 2\pi\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

当 N 很大时辐射功率集中于主瓣附近,计算这个积分时可以使用 $(AF)_n$ 的近似式(4.6.8a),我们有

$$\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nk_0 d\cos\theta\right)}{\frac{1}{2}Nk_0 d\cos\theta}\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

令

$$u = \frac{1}{2}Nk_0 d\cos\theta, \quad \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}Nk_0 d\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

上面的积分变换为

$$\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{Nk_0 d}\int_{-Nk_0 d/2}^{Nk_0 d/2}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u.$$

当 N 很大时可以将上式的积分限扩展至∞远处,再利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u = \pi$$

便求得(4.6.13)式分母中的积分:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi^2}{Nk_0 d}.$$

因此,当 N 很大时侧射阵的方向性近似为

$$D(\theta,\phi) = \frac{Nk_0 d}{\pi}(AF)_n^2 = 2N\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)(AF)_n^2. \tag{4.6.14}$$

最大方向性

$$D_{\max}\left(\frac{\pi}{2},\phi\right) = 2N\left(\frac{d}{\lambda_0}\right) \approx 2\left(\frac{L}{\lambda_0}\right). \tag{4.6.14a}$$

4. 端射阵

另一种实际应用的线阵天线，其最大辐射指向 $\theta=0$ 方向，即沿着阵轴线方向，称为端射阵. 此时要求 $\psi=k_0d\cos\theta+\beta=k_0d+\beta=0$，相邻阵元间的激励相位差 $\beta=-k_0d$，这个相位差正好补偿了沿着轴线传播的路程差导致的相位差，所有阵元沿轴线的辐射同相叠加而形成主极大辐射. 端射阵的阵元间距须小于 $\lambda_0/2$，以避免在可视空间出现第二个主极大辐射. 当 $d=\lambda_0/2$ 时在 $\theta=\pi$ 方向也会形成主极大辐射.

对于端射阵，归一化的阵因子仍然为(4.6.8)式，但现在 $\psi=(k_0d\cos\theta+\beta)=k_0d(\cos\theta-1)$，主波束的零点发生于 $\frac{1}{2}N\psi=\frac{1}{2}Nk_0d(\cos\theta-1)=\pm\pi$. 零点对应的空间角在 $\theta=0$ 附近，设 $\theta=\Delta\theta$，当 N 很大时 $\cos\theta=\cos(\Delta\theta)=1-(\Delta\theta)^2/2$，所以 $(\Delta\theta)^2/2=2\pi/Nk_0d$，辐射主瓣零点之间的角宽

$$\mathrm{BW}=2\Delta\theta=2\left(\frac{2\lambda_0}{Nd}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 2\left(\frac{2\lambda_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.6.15)$$

端射阵的方向性仍然由式(4.6.13)给出，现在需要计算积分

$$\int_0^\pi (AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi\left[\frac{\sin\left[\frac{1}{2}Nk_0d(\cos\theta-1)\right]}{\frac{1}{2}Nk_0d(\cos\theta-1)}\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

令

$$u=\frac{1}{2}Nk_0d(\cos\theta-1),\quad \mathrm{d}u=-\frac{1}{2}Nk_0d\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

将上面的积分变换为

$$\int_0^\pi (AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{Nk_0d}\int_0^{Nk_0d}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u.$$

将积分上限扩展至∞远，积出积分，得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi (AF)_n^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\frac{2\pi^2}{Nk_0d}.$$

当 N 很大时端射阵的方向性近似为

$$D(\theta,\phi)=\frac{2Nk_0d}{\pi}(AF)_n^2=4N\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)(AF)_n^2, \qquad (4.6.16)$$

最大方向性

$$D_{\max}(0,\phi)=4N\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)\approx 4\left(\frac{L}{\lambda_0}\right). \qquad (4.6.16a)$$

可见，端射阵的方向性高于侧射阵.

5. Hansen-Woodyard 端射条件

Hansen 和 Woodyard 发现①,如果相邻阵元间的激励相位差略微增加,可使端射阵获得更高的方向性,这个条件现在称作 Hansen-Woodyard 端射条件:

$$\beta = -(k_0 d + 2.94/N) \approx -(k_0 d + \pi/N). \tag{4.6.17}$$

他们原来的研究是对于长度无限的连续分布线源天线,其结果也适用于长度有限但很长的离散线阵,且要求阵元间的间距很小.

可以从方向性取最大值的条件导出(4.6.17).设阵元间的相移 $\beta = -pd$,p 为常数.阵因子

$$(AF)_n = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}Nd(k_0\cos\theta - p)\right]}{\frac{1}{2}Nd(k_0\cos\theta - p)} = \frac{\sin u}{u}, \tag{4.6.18}$$

现在

$$u = \frac{1}{2}Nd(k_0\cos\theta - p). \tag{4.6.19}$$

令

$$U_0 = [(AF)_n^2]|_{\theta=0} = \left[\frac{\sin\left[\frac{1}{2}Nd(k_0 - p)\right]}{\frac{1}{2}Nd(k_0 - p)}\right]^2 = \left[\frac{\sin v}{v}\right]^2, \tag{4.6.20}$$

式中

$$v = \frac{1}{2}Nd(k_0 - p). \tag{4.6.21}$$

由(4.6.13)式,$\theta=0$ 方向的方向性

$$D(0,\phi) = \frac{1}{\frac{1}{2U_0}\int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}. \tag{4.6.22}$$

积分

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}Nk_0 d}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\cos(2v) - 1}{2v} + \mathrm{Si}(2v)\right],$$

$\mathrm{Si}(x)$为正弦积分,令

$$g(v) = \left[\frac{v}{\sin v}\right]^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\cos(2v) - 1}{2v} + \mathrm{Si}(2v)\right], \tag{4.6.23}$$

---

① W. W. Hansen and J. R. Woodyard, A new principle in directional antenna design, *Proc. IRE*, vol. 26. no. 3. pp. 333—345, Mar. 1938.

当 $v=Nd(k_0-p)/2=-1.47$ 时 $g(v)$ 达到最小值,由此求出最大方向性所要求的阵元间激励相位差

$$\beta=-pd=-\left(k_0 d+\frac{2.94}{N}\right)\approx-\left(k_0 d+\frac{\pi}{N}\right), \tag{4.6.24}$$

由于函数 $g(v)$ 在其最小值附近的变化相当平缓,写成后一等式不会引起很大的误差. 若采用上面的后一等式,即 $v=-\pi/2$,可求得 $g(-\pi/2)=0.878$,得

$$D_{\max}(0,\phi)=\frac{Nk_0 d}{0.878}=1.789\,\frac{2Nk_0 d}{\pi}=1.789\left[4N\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]. \tag{4.6.25}$$

较之普通端射阵,Hansen-Woodyard 端射阵的方向性提高了约 2.5 dB.

为实现 Hansen-Woodyard 条件导致的高方向性,阵元间距不能任取,实际上须取为 $d\approx\lambda_0/4$. 为何要对阵元间距作如此选取,可参阅[13]所引 Balanis 的著作.

§ 4.7 有耗的半空间上偶极子的辐射

1. 问题的概述

在本章的以上各节中我们所讨论的几个基本辐射问题均是辐射器处于无界空间区域的情况,而没有涉及物质边界存在的情况. 但实际问题中辐射器总是处于一定的物质边界环境中,本节要讨论的处于有耗的半空间介质之上的偶极子的辐射问题就是这类问题的一个代表. 这个问题首先是由 Sommerfeld 进行研究的(1909),他提出这个问题与当时对无线电波沿地球表面传播问题的实验及理论探索有关. 1901 年 Marconi 进行了无线电波从英国到北美横越大西洋传播的著名实验,接着 Zenneck(1907)发表了关于表面波传播问题的理论研究,关于 Zenneck 的表面波概念我们在 § 3.3 中已作了介绍. Sommerfeld 用一个简单的半空间模型来模拟地球及其上的大气环境. 在这个模型中把地球看作是一种均匀的有耗电介质填满了地平面以下的半空间(图 4.21),这里没有考虑到地面的曲率以及地球作为电磁介质的不均匀性,特别是实际上呈现的层状分布;对于地面以上的大气则认为是介质常数为 ε_0,μ_0 的半空间. 因为当时还没有认识到大气的电离层反射对于无线电波的远距离传播(例如 Marconi 的实验)的决定性作用,所以在这个模型中没有考虑到大气层的结构及其引起的反射. Sommerfeld 使用这个简化的半空间模型研究了处于地平面之上一定高度的竖直或水平电偶极子和磁偶极子的辐射问题,他的原意在于证明表面波的场可由他的求解方法中自动地引出,并由此试图计算表面波在无线电波沿地面传播问题中的作用. 这个问题现在常被称为 Sommerfeld 半空间问题,由他开始的研究引起了在以后

的许多年中对于这个问题的持续兴趣和研究，特别是关于 Zenneck 表面波是否确实被激励的问题曾经有过长期的争论. 关于 Sommerfeld 和其它学者对于这个问题的早期研究 Sommerfeld 本人[14] 和 Stratton[15] 均给出了很好的总结，我们在这里将着重地讲述这个问题的基本求解过程.

2. 球面波展开为柱面波

在 Sommerfeld 半空间问题中初级辐射源为无穷短的电流元或磁流元，在损耗介质内部及其表面上激起的感应电流称为二次源. 初级源和二次源所产生的电磁场之和需要满足在无穷远处和介质分界面上的相应边界条件. 我们已经知道(§1.2)自由空间中处于(x_0, y_0, z_0)点的点源的标势为自由空间标量 Green 函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

所表示的辐射球波，这个解已满足无穷远处的辐射条件. $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$是构成 Sommerfeld 半空间问题中场的初始激励的基本函数形式. 为使场能满足介质分界平面上的边界条件需要将球波函数(上式，即(1.2.20)式)展开为柱面波之和，这是求解此半空间问题的关键数学技巧. 在这里用较为直观的 Fourier 变换法来导出球面波展开为柱面波的表示式[16].

我们所需要的这个球面波的展开公式可以通过用 Fourier 变换法求解球面波所满足的波方程

$$(\nabla^2+k^2)g(x,y,z)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0) \tag{4.7.1}$$

得到，所使用的 Fourier 变换对为

$$\tilde{g}(x,y,\beta_z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z}\,\mathrm{d}z, \tag{4.7.2}$$

$$g(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(x,y,\beta_z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_z z}\,\mathrm{d}\beta_z. \tag{4.7.3}$$

对于方程式(4.7.1)做变换(4.7.2)得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z}-g(x,y,z)\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z}}{\partial z}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2-\beta_z^2\right)\tilde{g}(x,y,\beta_z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}\delta(x)\delta(y).$$

为使上式左侧的方括号取零值，可在空间介质中引入小的损耗使波数 β_z 含有适当的虚部，从而保证在$|z|\to\infty$的极限下方括号中的两项分别为零，这是在电磁理论中经常使用的一种技巧. 这样，经过一次 Fourier 变换后波方程(4.7.1)变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2-\beta_z^2\right)\tilde{g}(x,y,\beta_z)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}\delta(x)\delta(y). \tag{4.7.4}$$

如果对方程(4.7.4)继续作二维 Fourier 变换

$$\tilde{\tilde{g}}(\beta_x,\beta_y,\beta_z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(x,y,\beta_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta_x x+\beta_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.7.5}$$

可得

$$(k^2-\beta_x^2-\beta_y^2-\beta_z^2)\tilde{\tilde{g}}(\beta_x,\beta_y,\beta_z)=-(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0},$$

由此容易解出

$$\tilde{\tilde{g}}(\beta_x,\beta_y,\beta_z)=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{k^2-\beta^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}, \tag{4.7.6}$$

其中

$$\beta^2=\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2. \tag{4.7.7}$$

为求出方程(4.7.1)的解，我们可先通过(4.7.5)式的逆变换由(4.7.6)式求出 $\tilde{g}(x,y,\beta_z)$：

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,y,\beta_z)&=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\tilde{g}}(\beta_x,\beta_y,\beta_z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta_x x+\beta_y y)}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\&=-\frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta_x x+\beta_y y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}}{k^2-\beta^2}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y,\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

然后再通过逆变换式(4.7.3)由(4.7.8)式即可求出 $g(x,y,z)$.

(4.7.8)式为二维 $\boldsymbol{\beta}$ 空间中的平面波展开式，在求 $g(x,y,z)$ 之前我们可先将它变换到柱坐标系中. 横向空间坐标的变换关系为

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi; \tag{4.7.9}$$

以 $\boldsymbol{w}$ 表示横向波矢量，$w=\sqrt{\beta_x^2+\beta_y^2}$，$\delta$ 为 $\boldsymbol{w}$ 与 x 轴的夹角，横向波矢量的变换关系为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_x=w\cos\delta,\quad \beta_y=w\sin\delta,\\&\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y=w\mathrm{d}w\mathrm{d}\delta.\end{aligned}\right\} \tag{4.7.10}$$

这两个变换关系代入(4.7.8)式后得

$$\tilde{g}(x,y,\beta_z)=-\frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}}{k^2-w^2-\beta_z^2}w\mathrm{d}w\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}w\rho\cos(\delta-\phi)}\mathrm{d}\delta.$$

利用积分公式(4.4.31)将后一积分积出后我们有

$$\tilde{g}(x,y,\beta_z)=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{J}_0(w\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z_0}}{k^2-w^2-\beta_z^2}w\mathrm{d}w, \tag{4.7.11}$$

将上式代入逆变换式(4.7.3)就得到波方程(4.7.1)的解

$$\begin{aligned}g(x,y,z)&=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\mathrm{J}_0(w\rho)w\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_z(z-z_0)}}{k^2-w^2-\beta_z^2}\mathrm{d}\beta_z\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\mathrm{J}_0(w\rho)w\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_z(z-z_0)}}{\beta_z^2-(k^2-w^2)}\mathrm{d}\beta_z.\end{aligned} \tag{4.7.12}$$

上式中后一个积分可改写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\beta_z(z-z_0)}}{\beta_z^2-(k^2-w^2)}d\beta_z$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{k^2-w^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\beta_z(z-z_0)}}{\beta_z-\sqrt{k^2-w^2}}d\beta_z-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\beta_z(z-z_0)}}{\beta_z+\sqrt{k^2-w^2}}d\beta_z\right].$$

如果在复 β_z 平面上取如图 4.20 所示的沿实轴且绕过极点

$$\beta_z=\pm\sqrt{k^2-w^2}$$

的积分路径，然后用上半复平面上的无穷大半径半圆将沿实轴的积分路径闭合成回路，根据留数定理求出被积分回路包围的极点 $\beta_z=-\sqrt{k^2-w^2}$ 对于积分的贡献，可将上面的积分求出，得

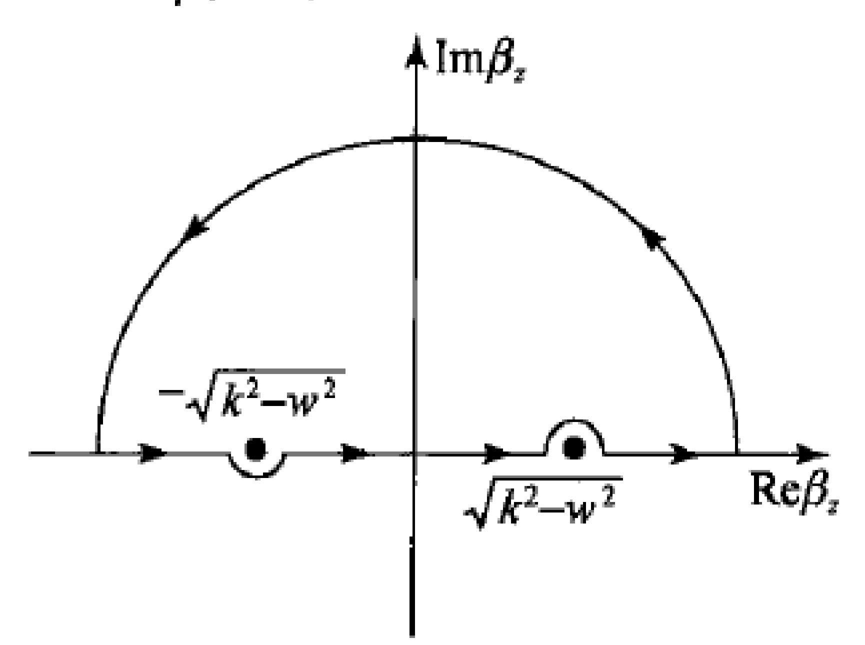


图 4.20 积分(4.7.13)求值所使用的复平面积分回路

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\beta_z(z-z_0)}}{\beta_z^2-(k^2-w^2)}d\beta_z=-\frac{\pi j}{\sqrt{k^2-w^2}}e^{-j\sqrt{k^2-w^2}(z-z_0)}. \tag{4.7.13}$$

将(4.7.13)式代入(4.7.12)式便得到用柱函数的积分表示的波动方程(4.7.1)的解

$$g(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{wJ_0(w\rho)e^{-\sqrt{w^2-k^2}(z-z_0)}}{\sqrt{w^2-k^2}}dw. \tag{4.7.14}$$

另一方面，波方程(4.7.1)的球波形式的解也可通过在适当的球坐标系中对于解(4.7.6)式作逆变换得出，当选择与图 4.20 所示相同的积分路径时便得到(1.2.20)式的球波解[16]

$$g(x,y,z)=\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \tag{4.7.15}$$

其中 $R=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$. 比较(4.7.14)式和(4.7.15)式便得

$$\frac{e^{-jkR}}{R}=\int_0^{\infty}\frac{wJ_0(w\rho)e^{-\sqrt{w^2-k^2}(z-z_0)}}{\sqrt{w^2-k^2}}dw. \tag{4.7.16}$$

(4.7.16)式就是 Sommerfeld 导出的著名的球面波展开为柱面波的表示式[14]，现在常称为 Sommerfeld 积分表示式. 在[15]中给出了由 Fourier-Bessel 积分公式导出(4.7.16)式的推导过程，也给出了 Weyl 展开球面波为平面波的路径积分的表示式.

3. 有耗半空间上竖直电偶极子的辐射

我们现在来求解有耗半空间上的竖直电偶极子的辐射问题. 如图 4.21 所

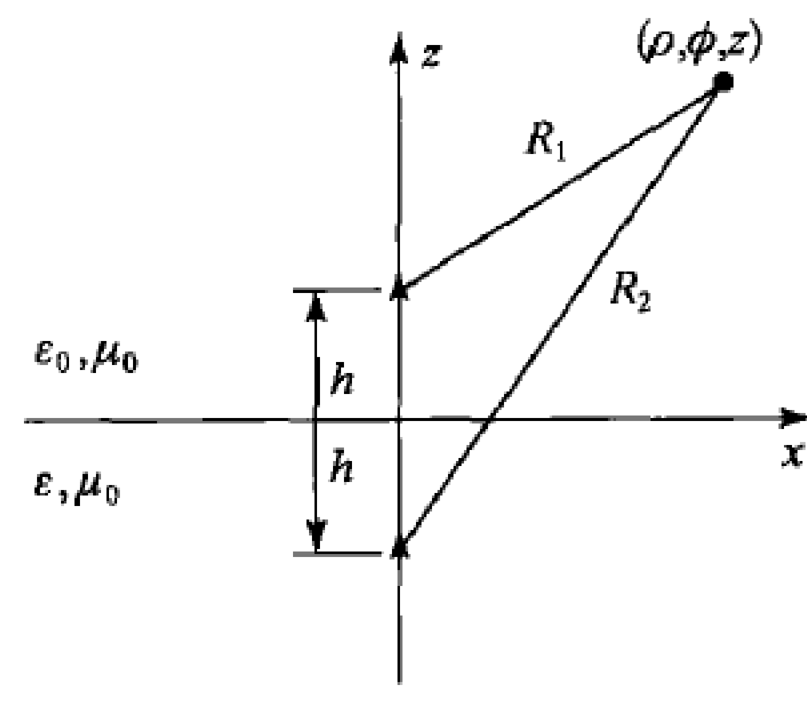


图 4.21 有耗半空间上竖直电偶极子的辐射

示，损耗介质与空气(真空)的分界面取作 $z=0$ 平面，损耗介质的介电常数

$$\varepsilon = \kappa\varepsilon_0 = (\kappa' - \mathrm{j}\kappa'')\varepsilon_0 = \left(\kappa' - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0, \tag{4.7.17}$$

磁导率取作 μ_0. 设偶极子为一无穷短竖直电流元，处于 z 轴上距地面 h 处，为简单起见我们将电流元的电流值取为 1 A，所设的偶极子的电流分布可表示为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{a}_z\delta(x)\delta(y)\delta(z-h). \tag{4.7.18}$$

由初级源(4.7.18)式产生的矢势 $\boldsymbol{A}$ 仅有 z 分量，相应地二次源的矢势也只有这个分量，在两个介质区域中矢势仅有的 z 分量满足的方程式分别为

$$\nabla^2 A_{z0} + k_0^2 A_{z0} = -\mu_0 J = -\mu_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-h) \quad (z \geqslant 0), \tag{4.7.19}$$

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0 \quad (z \leqslant 0), \tag{4.7.20}$$

其中 $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$，$k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon = \kappa\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = \kappa k_0^2$.

为了导出在 $z=0$ 平面上 A_z 需满足的边界条件，先写出切线分量电磁场与 A_z 的关系：

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}, \tag{4.7.21a}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{4.7.21b}$$

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}, \tag{4.7.21c}$$

$$E_y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}. \tag{4.7.21d}$$

由(4.7.21a,b)式可知磁场切线分量连续条件要求 A_z 是 x 和 y 的连续函数，因而有

$$A_{z0}\big|_{z=0^+} = A_z\big|_{z=0^-}. \tag{4.7.22}$$

在(4.7.21c,d)式中考虑到磁场切线分量连续的条件及(4.7.21a,b)式，则电场切线分量连续条件归结为要求

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial A_{z0}}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial A_z}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} \tag{4.7.23}$$

或

$$\varepsilon\frac{\partial A_{z0}}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = \varepsilon_0\frac{\partial A_z}{\partial z}\bigg|_{z=0^-}. \tag{4.7.23a}$$

矢势 A_z 的边界条件(4.7.22)式和(4.7.23a)式分别等效于磁场和电场切线分量连续条件.

现在我们便可用 Fourier 变换法来求解波方程(4.7.19)和(4.7.20). 设

$$A_{z0}(x,y,z) = \psi(x,y,z),$$
$$A_z(x,y,z) = \psi_3(x,y,z),$$

我们做出 ψ 及 ψ_3 的二维 Fourier 变换

$$\tilde{\psi}(\beta_x,\beta_y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y,z)e^{j\beta_x x+j\beta_y y}dxdy, \tag{4.7.24}$$

$$\tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\psi_3(x,y,z)e^{j\beta_x x+j\beta_y y}dxdy. \tag{4.7.25}$$

波方程(4.7.19)和(4.7.20)经二维 Fourier 变换后变为常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_0^2-\beta_0^2-\beta_y^2\right)\tilde{\psi}(\beta_x,\beta_y,z) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\delta(z-h), \tag{4.7.26}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_0^2-\beta_x^2-\beta_y^2\right)\tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z) = 0. \tag{4.7.27}$$

由(4.7.22)和(4.7.23a)式,$\tilde{\psi}(\beta_x,\beta_y,z)$和 $\tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z)$在 $z=0$ 平面上应满足

$$\tilde{\psi}(\beta_x,\beta_y,z)\big|_{z=0^+} = \tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z)\big|_{z=0^-} \tag{4.7.28}$$

和

$$\varepsilon\frac{d\tilde{\psi}(\beta_x,\beta_y,z)}{dz}\bigg|_{z=0^+} = \varepsilon_0\frac{d\tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z)}{dz}\bigg|_{z=0^-}. \tag{4.7.29}$$

由于方程式(4.7.26)右方在 $z=h$ 处存在着奇异性,上半空间的解 $\tilde{\psi}$ 在 $z=h$ 平面两侧的区域中应分别设置.因此,可以将常微分方程(4.7.26)和(4.7.27)的解分别设为

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1(\beta_x,\beta_y,z) = Ce^{-j\gamma_0(z-h)} \quad (z \geqslant h), \tag{4.7.30}$$

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_2(\beta_x,\beta_y,z) = Ae^{j\gamma_0(z-h)} + Be^{-j\gamma_0(z+h)} \quad (0 \leqslant z \leqslant h), \tag{4.7.31}$$

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z) = De^{-j\gamma_0 h}e^{j\gamma z} \quad (z \leqslant 0), \tag{4.7.32}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0^2 &= k_0^2-\beta_x^2-\beta_y^2 = k_0^2-w^2,\\ \gamma^2 &= k^2-\beta_x^2-\beta_y^2 = k^2-w^2.\end{aligned}\right\} \tag{4.7.33}$$

在解 $\tilde{\psi}_1$ 和 $\tilde{\psi}_2$ 的连接平面 $z=h$ 面上这两个解需满足连续条件

$$\tilde{\psi}_1\big|_{z=h^+} = \tilde{\psi}_2\big|_{z=h^-} \tag{4.7.34}$$

及微商的阶梯性变化条件

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\bigg|_{h^-}^{h^+} = -\frac{\mu_0}{2\pi}. \tag{4.7.35}$$

将解(4.7.30)—(4.7.32)代入(4.7.34),(4.7.35)和(4.7.28),(4.7.29)诸式便可定出解中的待定常数：

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{\mu_0}{4\pi \mathrm{j}\gamma_0},\\ B &= \Gamma A,\\ C &= A(1+\Gamma \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\gamma_0 h}),\\ D &= \frac{2\kappa\gamma_0}{\gamma+\kappa\gamma_0}A,\\ \Gamma &= \frac{\kappa\gamma_0-\gamma}{\kappa\gamma_0+\gamma} = 1-\frac{2\gamma_0}{\gamma+\kappa\gamma_0}.\end{aligned}\right\} \tag{4.7.36}$$

然后对于解(4.7.30)—(4.7.32)作 Fourier 逆变换就可得到问题的解. 我们在下面分别给出这三个空间区域的解.

在上半空间的 $z\geqslant h$ 区域中

$$\begin{aligned}A_{z0}(x,y,z) = \psi_1(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_1(\beta_x,\beta_y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x-\mathrm{j}\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2 \mathrm{j}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z-h)}+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z+h)}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x-\mathrm{j}\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y.\end{aligned}$$

重复由(4.7.8)式导至(4.7.11)式时所作的变换和积分步骤则上式可化为

$$A_{z0} = \frac{\mu_0}{4\pi \mathrm{j}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\gamma_0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z-h)}+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z+h)}]\mathrm{J}_0(w\rho)w\mathrm{d}w. \tag{4.7.37}$$

上式方括弧中的第一项是由 $z=h$ 点(偶极子所在的源点)发出的向上传播的波；第二项也表示向上传播的波,但是由 $z=-h$ 点发出的,这个点相应于源点对于介质平面的镜像点,因此第二项可看作是由源点发出的初级激励在介质平面上的反射波,而 Γ 则可解释为介质平面的反射系数.

在上半空间的 $0\leqslant z\leqslant h$ 区域中

$$\begin{aligned}A_{z0}(x,y,z) = \psi_2(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_2(\beta_x,\beta_y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x-\mathrm{j}\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2 \mathrm{j}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(h-z)}+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z+h)}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x-\mathrm{j}\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi \mathrm{j}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\gamma_0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(h-z)}+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z+h)}]\mathrm{J}_0(w\rho)w\mathrm{d}w.\end{aligned} \tag{4.7.38}$$

因此,在整个上半空间的两个区域中 A_{z0} 可以统一地写作

$$A_{z0} = \frac{\mu_0}{4\pi \mathrm{j}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\gamma_0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0|z-h|}+\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\gamma_0(z+h)}]\mathrm{J}_0(w\rho)w\mathrm{d}w. \tag{4.7.39}$$

将(4.7.36)式的 Γ 代入上式,而且取

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0^2-w^2} = -\mathrm{j}\sqrt{w^2-k_0^2} \tag{4.7.40}$$

得

$$A_{z0}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{wJ_0(w\rho)}{\sqrt{w^2-k_0^2}}\left[e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}|z-h|}+e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}(z+h)}-\frac{2\gamma}{\gamma+\kappa\gamma_0}e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}(z+h)}\right]dw.$$

用 Sommerfeld 积分表示式(4.7.16)将上面积分中的前两项化为球面波后便得到一个物理意义十分明确的表示式

$$A_{z0}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e^{-jk_0R_1}}{R_1}+\frac{e^{-jk_0R_2}}{R_2}+2j\int_0^{\infty}\frac{\gamma\, e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}(z+h)}}{\gamma_0(\gamma+\kappa\gamma_0)}J_0(w\rho)w\mathrm{d}w\right],\qquad(4.7.41)$$

式中 $R_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}$，$R_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$ 分别为从源点及源点的镜像点到场点的距离，(4.7.40)根式符号的选择保证了式中的积分是收敛的.

为了明确(4.7.41)式的物理意义，我们来看当下半空间的介质变为理想导体的情况，这时 $\sigma\to\infty$，$\kappa\to\infty$，与 $\kappa\gamma_0$ 比较 γ 可以略去，因此(4.5.41)式中积分项的被积函数变为零，于是有

$$A_{z0}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e^{-jk_0R_1}}{R_1}+\frac{e^{-jk_0R_2}}{R_2}\right]\quad(\kappa\to\infty),\qquad(4.7.42)$$

与镜像原理(§1.3)所得结果一致. 因此，半空间问题的 Sommerfeld 解(4.7.41)式中的积分项就是当下半空间的介质电导率为有限时对于镜像解(4.7.42)式的修正项，问题的困难在于对这个积分的求值，这是用 Fourier 变换法求解偏微分方程的边值问题时所必然要遇到的：通过变换将偏微分方程化为常微分方程使得方程式的求解变得容易，结果困难便转移到通过逆变换求积分的过程中. 我们将在下一小节中讨论这个积分的求值问题.

在 $z\leqslant 0$ 的下半空间中

$$\begin{aligned}A_z(x,y,z)&=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_3(\beta_x,\beta_y,z)e^{-j\beta_x x-j\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\&=\frac{\mu_0}{8\pi^2 j}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\kappa}{\gamma+\kappa\gamma_0}e^{-j\gamma_0 h}e^{j\gamma z}e^{-j\beta_x x-j\beta_y y}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y\\&=\frac{\mu_0}{4\pi j}\int_0^{\infty}\frac{2\kappa e^{-j\gamma_0 h}}{\gamma+\kappa\gamma_0}e^{j\gamma z}J_0(w\rho)w\mathrm{d}w,\end{aligned}\qquad(4.7.43)$$

这是一个与(4.7.41)式中的积分相类似的积分.

4. 积分的近似求值[17]

现在我们来考虑 Sommerfeld 解(4.7.41)式中出现的积分的求值问题. 为着应用这个解来计算电磁波沿地面传播的实际问题，需要将该积分表示式化为便于实际计算的形式，这个问题吸引了后来的许多学者进行研究，我们在这里给出其中的一些主要结果.

首先，可以将(4.7.36)式中的反射系数 Γ 改写为

$$\Gamma=\frac{\kappa\gamma_0-\gamma}{\kappa\gamma_0+\gamma}=-1+\frac{2\kappa\gamma_0}{\gamma+\kappa\gamma_0}\qquad(4.7.44)$$

以便简化积分的被积函数,此式代入(4.7.39)式后可得上半空间中 A_{z0} 的另一种表示式(见[15]: Weyl 解)

$$A_{z0}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e^{-jk_0R_1}}{R_1}-\frac{e^{-jk_0R_2}}{R_2}-j2\kappa\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}(z+h)}}{\gamma+\kappa\gamma_0}J_0(w\rho)w\mathrm{d}w\right],\quad(4.7.45)$$

此式积分中的被积函数较(4.7.41)式的要简单些. 在 $\kappa\to\infty$ 的极限下由 Sommerfeld 积分表示式(4.7.16)不难看出

$$-j2\kappa\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{w^2-k_0^2}(z+h)}}{\gamma+\kappa\gamma_0}J_0(w\rho)w\mathrm{d}w\to 2\frac{e^{-jk_0R_2}}{R_2},$$

所以,在此极限下解(4.7.45)仍然化为镜像法解.

为了能近似地积出积分,需要将积分限扩展至由 $-\infty\to+\infty$ 的整个实轴,以便在复 w 平面上构成闭合的积分回路,这样就可应用回路积分的近似积分技术. 为此我们用

$$J_0(w\rho)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(w\rho)+H_0^{(2)}(w\rho)]$$

代入积分,在含有 $H_0^{(1)}$ 的积分中令 $w=-\xi$,这个积分则变为

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-j\gamma_0(z+h)}}{\gamma+\kappa\gamma_0}H_0^{(1)}(-\xi\rho)(-\xi)\mathrm{d}(-\xi),$$

因为 γ_0,γ 是 ξ 的偶函数,而且 $H_0^{(1)}(-\xi\rho)=-H_0^{(2)}(\xi\rho)$,含有 $H_0^{(1)}$ 的这个积分遂变换为

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-j\gamma_0(z+h)}}{\gamma+\kappa\gamma_0}H_0^{(2)}(\xi\rho)\xi\mathrm{d}\xi.$$

经过这样的变换后(4.7.45)式便化为

$$A_{z0}(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e^{-jk_0R_1}}{R_1}-\frac{e^{-jk_0R_2}}{R_2}+2\kappa I\right],\quad(4.7.46)$$

其中

$$I=-j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j\gamma_0(z+h)}}{2(\gamma+\kappa\gamma_0)}H_0^{(2)}(w\rho)w\mathrm{d}w.\quad(4.7.47)$$

我们现在来考虑积分(4.7.47)式的求值问题. 先来看被积函数的奇异性,由于 γ_0 及 γ 为 w 的根式,

$$\gamma_0=\sqrt{k_0^2-w^2},\quad \gamma=\sqrt{k^2-w^2},\quad(4.7.33a)$$

积分 I 的被积函数具有分支点 $w=\pm k_0$ 和 $w=\pm k$,因此是四值函数,相应的 Riemann 面是四叶的. 令积分可以进行的适当的叶应满足条件

$$\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-w^2}\leqslant 0,\quad \mathrm{Im}\sqrt{k^2-w^2}\leqslant 0,$$

这些条件可保证在物理空间的无穷远处得到衰减波,在(4.7.40)式中根式的符号正是如此选择的. 令 $w=u+jv$,在复 w 平面上可以取

$$\mathrm{Im}\gamma_0 = \mathrm{Im}\gamma = 0$$

作为分支切割线，当 k_0 为实数时这些分支切割示于图 4.22. 此外，I 的被积函数尚有一个极点 $\sqrt{k^2-w^2}+\kappa\sqrt{k_0^2-w^2}=0$，它的解为 $\pm w_p=\sqrt{\kappa/(\kappa+1)}k_0$. 因为 $\kappa=\kappa'-j\kappa''$，所以

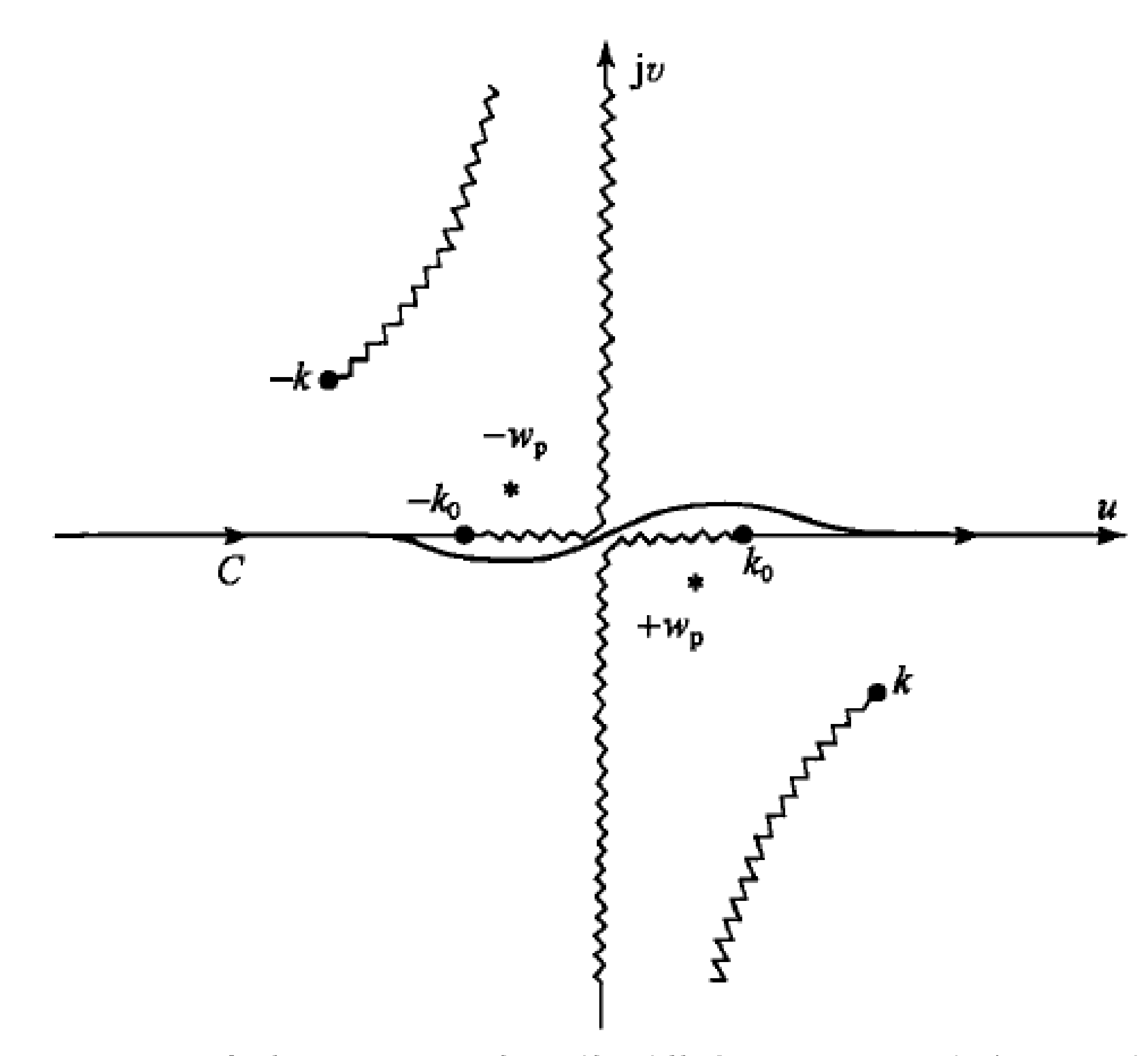


图 4.22　为求(4.7.47)式积分所作复平面上的分支切割线

$$|w_p| = k_0\left[\frac{\kappa'^2+\kappa''^2}{(\kappa'+1)^2+\kappa''^2}\right]^{\frac{1}{2}} < k_0, \tag{4.7.48}$$

$+w_p$ 的相角为

$$-\frac{1}{2}\left[\arctan\frac{\kappa''}{\kappa'}-\arctan\frac{\kappa''}{\kappa'+1}\right].$$

对于典型的地面 $\kappa'>1$，上式中的方括号取小的正值，因此极点 $+w_p$ 落在第四象限内的半径为 k_0 的圆内略低于实轴处. 极点 $\pm w_p$ 的位置亦在图 4.22 中示出. 原来的从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分路径用 C 表示，避开了分支切割的这条路径也在图上示出.

由 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的大宗量渐近行为

$$\mathrm{H}_0^{(2)}(w\rho) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\rho}$$

可知，对于大的负 v 值被积函数为零，因此可以用下半复 w 平面上的无穷大半径半圆将积分路径 C 闭合成回路，然后在下半 w 平面上将积分回路变形. 变形后的回路由环绕从 k_0 引出的分支切割及极点 $+w_p$ 的路径 C_1 和环绕从 k 引出的分支切割的路径 C_2 组成(图 4.23). 因为积分路径 C_2 远在实轴之下，在这个路径上 w 具有大的负虚部，因此由分支切割积分 C_2 得出的波较之由分支切割

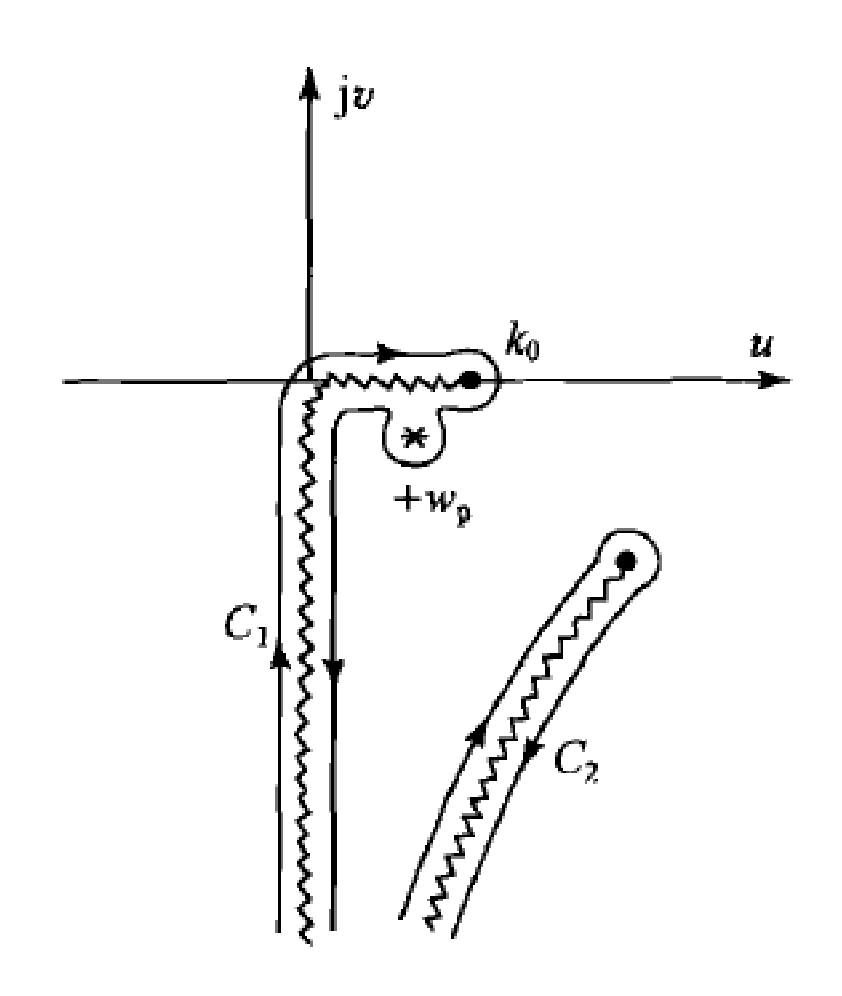


图 4.23 图 4.22 中的积分路径 C 变形为环绕分支切割线的路径 C_1 和 C_2

积分 C_1 得到的波衰减得快得多，所以可略去. 于是近似地有

$$I \approx \int_{C_1} [\cdot] \mathrm{d}w, \tag{4.7.49}$$

这里 C_1 包括环绕分支切割 k_0 的积分路径和环绕极点 $+w_p$ 的积分路径. 当这两者可以分开来求值时，根据留数定理容易求出极点 $+w_p$ 对于积分 I 的贡献，这部分积分值用 I_p 表示，我们有

$$\begin{aligned} I_p &= (-\mathrm{j})(-2\pi\mathrm{j}) \frac{w_p \mathrm{H}_0^{(2)}(w_p\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{k_0^2-w_p^2}(z+h)}}{2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\sqrt{k^2-w^2}+\kappa\sqrt{k_0^2-w^2}\right]_{w=w_p}}, \\ &= \frac{\pi k}{\kappa^2+1}\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \mathrm{H}_0^{(2)}\left(\frac{k\rho}{\sqrt{\kappa+1}}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(z+h)/\sqrt{\kappa+1}}. \end{aligned} \tag{4.7.50}$$

由于 κ 为复数，在指数 $\exp\{-\mathrm{j}k_0(z+h)/\sqrt{\kappa+1}\}$ 中可分离出负的指数衰减因子，所以 I_p 表示的就是在 § 3.3 中讨论过的 Zenneck 表面波，而 w_p 则称为表面波极点. 在介质表面附近 $z\approx 0$，当径向距离 ρ 很大时由 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的渐近式可得由表面波极点贡献的矢势

$$A_{z0} \sim \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho/\sqrt{\kappa+1}}}{\sqrt{\rho}}, \tag{4.7.51}$$

表面波场随着空间距离 ρ 大约以 $\rho^{-\frac{1}{2}}$ 的规律衰减，而不是自由空间中的 ρ^{-1} 衰减律，这体现了介质表面对于表面波的导引作用.

表面波模式 I_p 的自动得出正是 Sommerfeld 原来进行这个问题研究的主要意图之一. 自从他的 1909 年论文发表以后关于 Zenneck 表面波是否确实被激励的问题曾经引起了长期的争论，问题在于由于地球的介质常数的实际取值使得表面波极点 $+w_p$ 非常接近于分支点 k_0. 在这种情况下，沿分支切割路径 C_1 的积

分与环绕极点$+w_p$的积分不能分开来求. 为解决这个问题需要引入一个新复变量$\alpha=\sigma+j\eta$,并且利用变换

$$w = k_0 \sin\alpha \tag{4.7.52}$$

将积分I变换到复α平面上来求值. 原来的积分路径C以及由分支点k_0引出的分支切割变换到复α平面上的图形均示于图4.24. 先将图4.22上由k_0引出的分支切割线变形为由k_0引出的平行于负虚轴的割线, $w=k_0+jv$, $-\infty<v\leqslant 0$, 而在复α平面上这条直线表示为

$$\sin\sigma\cosh\eta = 1, \quad k_0\cos\sigma\sinh\eta = v. \tag{4.7.53}$$

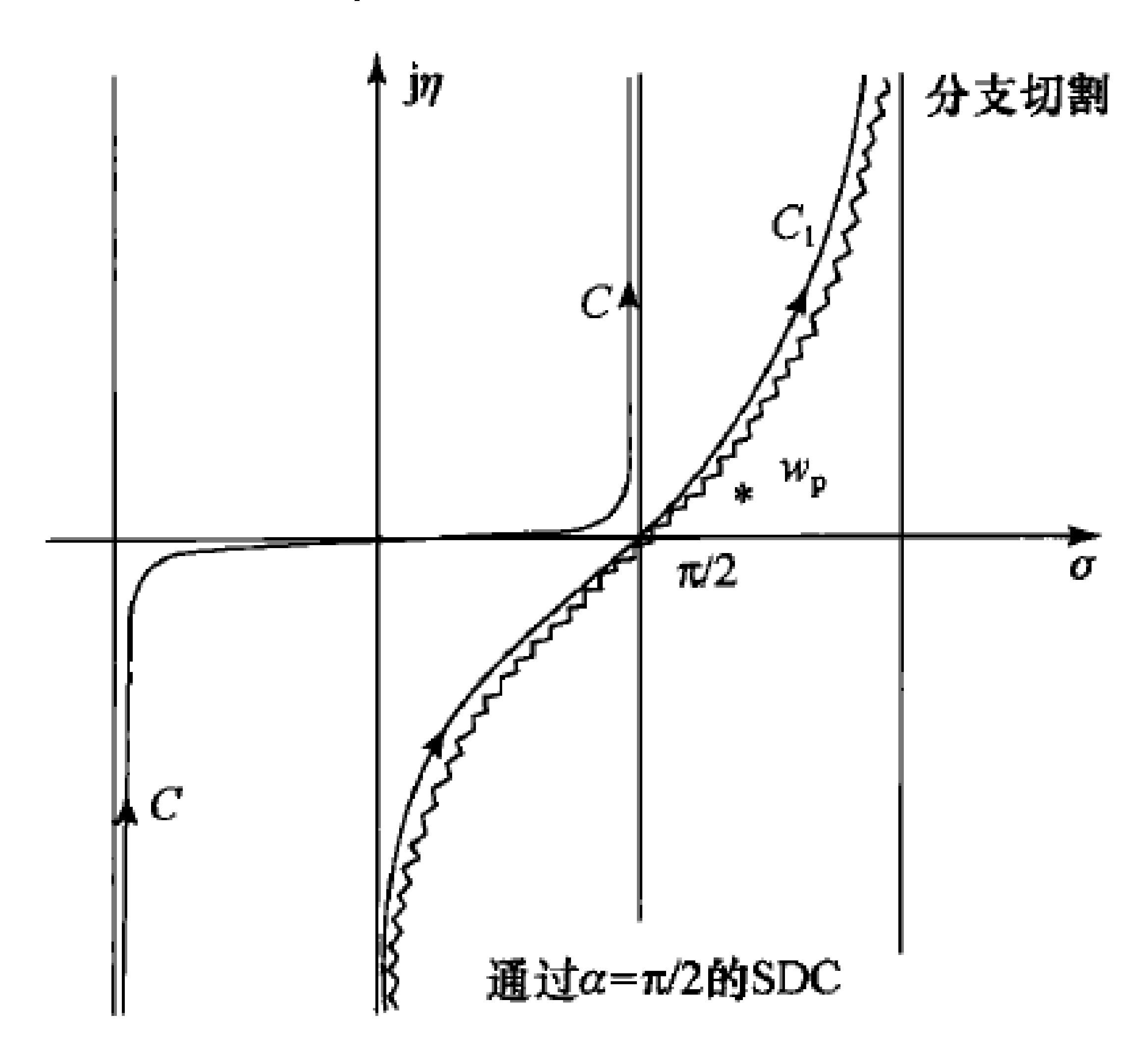


图 4.24 图 4.23 中的积分路径 C_1 在复 α 平面上变形为最速下降路径(SDC)

上式左边的方程式可改写为

$$\cos(\sigma-\pi/2)\cosh\eta = 1, \tag{4.7.54}$$

因此复w平面上的这条分支切割线在复α平面上变成了通过$\alpha=\pi/2$点的最速下降路径(SDC).

我们来简单地介绍近似求积分的最速下降法(method of steepest descent). 不难看出复w平面上的积分I变换到复α平面上后具有下面的形式

$$I(\zeta) = \int_C f(\alpha)e^{j\zeta g(\alpha)}\,d\alpha, \tag{4.7.55}$$

其中ζ是个很大的参量, $f(\alpha)$是α的慢变函数. 当ζ很大时积分中的指数函数是个快速振荡函数,这就使得在大部分路径上的积分为零,对于积分的主要贡献仅来自指数函数的缓慢变化点及其邻域,这些缓变点由条件

$$\left[\frac{d}{d\alpha}g(\alpha)\right]_{\alpha=\alpha_s} = 0 \tag{4.7.56}$$

决定. 例如, $g(\alpha)=\cos\alpha$, 得$\alpha_s=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 点$\alpha_s$称为鞍点(saddle

point). 例如取 $\alpha_s=0$,然后可将积分路径 C 变形为通过此鞍点的适当的积分路径. 这条适当的积分路径是由指数的虚部等于常数而且等于它在该鞍点的取值来确定的. 对于 $g(\alpha)=\cos\alpha$ 和 $\alpha_s=0$,积分路径由

$$\cos\sigma\cosh\eta=1 \tag{4.7.57}$$

确定,这条路径称为通过鞍点 $\alpha_s=0$ 的最速下降路径. 在满足条件(4.7.57)式的最速下降路径上指数函数的快速振荡行为消除了,而且指数函数的虚部沿此路径的方向导数为零,同时实部的方向导数为最大,所以这条路径是指数函数的最速下降路径. 沿着这条最速下降路径的积分将给出沿路径 C 积分的渐近值,这就是近似求积分的最速下降法①,又称为鞍点法(method of saddle point),Debye 首先使用这个方法来求 Hankel 函数的大宗量渐近值②. 由(4.7.57)可以看出当 $\eta\to\pm\infty$ 时要求 $\sigma\to\pm\pi/2$,这样最速下降路径的两端将渐近于复 α 平面上的 $\sigma=\pm\pi/2$ 竖直线. 如在 $\alpha_s=0$ 附近展开(4.7.57)式得

$$\left(1-\frac{1}{2}\sigma^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\eta^2+\cdots\right)=1,$$

这将要求 $\sigma\approx\eta$,因此在鞍点附近的最速下降路径与 σ 轴的交角为 $\pi/4$. 比较(4.7.57)式和(4.7.54)式就不难看出,曲线(4.7.53)正是在复 α 平面上通过 $\alpha=\pi/2$ 点的最速下降路径,而在复 w 平面上这条曲线则是通过分支点 k_0 的分支切割线,复 w 平面上的分支点 k_0 在复 α 平面上变成了鞍点.

现在我们在复 α 平面上来求积分 I. 对于(4.7.47)式作变量变换 $w=k_0\sin\alpha$,而根据几何关系(图 4.21)有

$$\rho=R_2\sin\theta,\quad z+h=R_2\cos\theta\quad(\theta\leqslant\pi/2), \tag{4.7.58}$$

这里 θ 是 R_2 与 z 轴正方向之间的夹角. 在积分路径上 $|w|\neq0$ 处,对于很大的 ρ 有 $|w\rho|\gg1$,此时可在积分(4.7.47)中代入 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的大宗量渐近式

$$\mathrm{H}_0^{(2)}(w\rho)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi w\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(w\rho-\pi/4)}, \tag{4.7.59}$$

如此,这个积分便化为

$$I=-\frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{2k_0}{\pi\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\int_{\mathrm{SDC}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2\cos(\alpha-\theta)}\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\kappa-\sin^2\alpha}+\kappa\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha. \tag{4.7.60}$$

不难看出 $\alpha_s=\theta(\theta\leqslant\pi/2)$ 为积分(4.7.60)式的鞍点,因此在积分(4.7.60)式中原来的积分路径 C 已变形为通过鞍点 $\alpha_s=\theta$ 的最速下降路径. 在复 w 平面(图 4.22)上表面波极点 w_p 很靠近分支点 k_0,在复 α 平面(图 4.24)上这个极点是在 $\alpha=\pi/2$ 点的右侧略高于 σ 轴处. 因为在复 α 平面上,当路径 C 变形为通过鞍点

① 可参考,例如,郭敦仁,《数学物理方法》,§17.10,高等教育出版社,1965.

② 可参见,例如,[14],§19,§21.

$\alpha_s=\theta$ 的最速下降路径的过程中并不扫过极点 w_p，故不必计算这个极点对于积分的贡献. 因此，由(4.7.50)式表示的 Zenneck 表面波 I_p 并没有被激励. 根据鞍点法积分的原理，积分的主要贡献仅来自鞍点附近的一小段路径上的积分，积分(4.7.60)式中除指数函数外的被积函数可代入鞍点的值然后提到积分号外：

$$I=-\frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{2k_0}{\pi R_2\sin\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\ \frac{\cos\theta\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\kappa-\sin^2\theta}+\kappa\cos\theta}\int_{\mathrm{SDC}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2\cos(\alpha-\theta)}\,\mathrm{d}\alpha. \quad (4.7.61)$$

上式中沿最速下降路径的积分可利用标准的鞍点法积出，鞍点法的积分公式为①

$$I(\zeta)=\mathrm{j}\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{j}a\zeta}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta g(\alpha_s)-\mathrm{j}\theta_0/2}, \quad (4.7.62)$$

其中 $g''(\alpha_s)=a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}$. 求出 $\zeta=-k_0R_2$，$a=1$，$\theta_0=\pi$，代入上式得

$$\int_{\mathrm{SDC}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2\cos(\alpha-\theta)}\,\mathrm{d}\alpha=\sqrt{\frac{2\pi}{k_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2}}{\sqrt{R_2}}. \quad (4.7.63)$$

上式代入(4.7.61)式得

$$I=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\kappa-\sin^2\theta}+\kappa\cos\theta}\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2}}{R_2}, \quad (4.7.64)$$

将这个积分值代入(4.7.46)式便得到上半空间中的矢势

$$A_{z0}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_1}}{R_1}-\frac{\sqrt{\kappa-\sin^2\theta}-\kappa\cos\theta}{\sqrt{\kappa-\sin^2\theta}+k\cos\theta}\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0R_2}}{R_2}\right]. \quad (4.7.65)$$

矢势的表示式(4.7.65)的物理意义是十分明显的，它是由初级源直接辐射的球波和由初级源的镜像辐射的球波构成的，方括弧中第二项球波前面的系数刚好是以入射角 θ 投射到介质平面上的平面波的 Fresnel 反射系数，因此这一项就是被地面反射的波. 直射波与反射波之和称为空间波，值得注意的是在介质面上，即 $\theta=\pi/2$ 处，空间波为零，因为这时 $R_1=R_2$.

实际上表示式(4.7.65)不适用于 θ 接近于 $\pi/2$ 的情况. 我们已经知道当 $\theta=\pi/2$ 时通过 $\alpha_s=\theta=\pi/2$ 点的最速下降路径正是 w 平面上由分支点 k_0 引出的分支切割线，在图 4.24 中示出的最速下降路径 C_1 正是这条路径. 表面波极点 w_p 很靠近分支点 k_0，即极点 $\alpha_s=\pi/2$，故当 θ 接近 $\pi/2$ 时在鞍点附近存在着极点，在这种情况下则不能使用标准的鞍点法来近似求积分，因为这时积分(4.7.55)的被积函数 $f(\alpha)$ 中存在着奇异性，适合于在这种情况下近似求积分的技术称为修正的鞍点法(modified saddle-point method)②. 使用修正的鞍点法对(4.7.60)式

① 见郭敦仁,《数学物理方法》, § 17.10,(10)式,高等教育出版社,1965.

② 关于修正的鞍点法可参考. 例如, L. B. Felsen and N. Marcuvitz, Radiation and scattering of waves, § 4.4, Prentice-Hall, 1973.

近似求积分后得到的介质表面($\theta=\pi/2$)的矢势为

$$A_{z0}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0R}}{R}\frac{2(\kappa-1)}{\kappa}A_s, \tag{4.7.66}$$

这里 $R=R_1=R_2=\rho$,A_s 为由下式给出的衰减因子:

$$A_s=1-j\sqrt{\pi\Omega}e^{-\Omega}\mathrm{erfc}(j\sqrt{\Omega}). \tag{4.7.67}$$

函数 $\mathrm{erfc}(j\sqrt{\Omega})$称为误差函数的补函数(complement of the error function),定义为

$$\mathrm{erfc}(j\sqrt{\Omega})=\frac{2}{\sqrt{\Omega}}\int_{j\sqrt{\Omega}}^{\infty}e^{-u^2}du, \tag{4.7.68}$$

参量 Ω 定义为

$$\Omega=-jk_0\frac{\kappa-1}{2\kappa^2}R. \tag{4.7.69}$$

复参量 Ω 可写为

$$\Omega=pe^{-jb}, \tag{4.7.69a}$$

它的模 $p=|\Omega|$称为数值距离,由于通常 $k'>10$,可以近似地求出

$$p=\frac{k_0R}{2|\kappa|}=\frac{k_0R}{2\sqrt{\kappa'^2+(\sigma/\omega\varepsilon_0)^2}}, \tag{4.7.70a}$$

$$b=\arctan\frac{\kappa'\omega\varepsilon_0}{\sigma}. \tag{4.7.70b}$$

(4.7.66)式给出的 A_{z0} 与自由空间值相差的因子为 $2(\kappa-1)A_s/\kappa\approx 2A_s$,衰减因子 A_s 是一个随着数值距离 p 的增加而迅速衰减的函数,故(4.7.66)式是一个衰减的波,这个波被称为 Norton 表面波①,尽管它不是在严格意义下的表面波.

关于 Sommerfeld 半空间问题的研究有着大量的文献,而且至今也没有终止,进一步的研究包括考虑到地面的球形几何,地球的分层结构以及上层大气的影响等.这个问题的研究不仅对于无线电波沿地面的传播问题本身是重要的,而且对于本问题所发展的求解方法还可用于微带型天线的分析.进一步的深入学习可阅读关于此问题的专著[18],较详细地论述此问题的教科书为[19],对于分层介质的情况可参考[20],当偶极子处于下半空间的介质中时可参阅[21].

参考文献

[1] Tai C T. Dyadic green's functions in electromagnetic theory. Intext Education Publishers, 1971: § 14.

① K. A. Norton, The propagation of radio waves over the surface of the Earth and in the upper atmosphere, *PIRE*, vol. 24, Pt. 1, pp. 1367—1387, 1936; and vol. 25, Pt. 2, pp. 1203—1236, 1937.

[2] Sommerfeld A. Partial differential equations in physics. Academic Press, 1949: § 28.

[3] Jordan E C, Balmain K G. Electromagnetic waves and radiating systems. Prentice-Hall, 1968: ch. 14.

[4] Popovic B D, Dragovic M B, Djordjevic A R. Analysis and synthesis of wire antennas. Research Studies Press, 1982: § 1.3.[中译本：导线天线的分析与综合. 杨渊译. 北京：人民邮电出版社，1987.]

[5] Elliot R S. Antenna theory and design. Prentice-Hall, 1981: ch. 7.[中译本：天线理论与设计. 汪茂光等译. 北京：国防工业出版社，1992.]

[6] Jones D S. The theory of electromagnetism. Pergamon Press, 1964: § 3.15.

[7] Collin R E. Antennas and radiowave propagation. McGraw-Hill, 1985: § 2.10, § 2.12.

[8] Harrigton R F. Field computation by moment methods. Macmillan, 1968: ch. 1.[中译本：计算电磁场的矩量法. 王尔杰等译. 北京：国防工业出版社，1981.]

[9] Thiele G A. Wire Antennas // Computer techniques for electromagnetics. R. Mittra ed. Pergamon Press, 1973: ch. 2.[中译本：计算机技术在电磁学中的应用. 金元松译. 北京：人民邮电出版社，1983.]

[10] Stutzman W L, Thiele G A. Antenna theory and design. John Wiley & Sons, 1981: § 7.3.

[11] Collin R E. Antennas and radiowave propagation. McGraw-Hill, 1985: § 4.3.

[12] Balanis C A. Antanna teory: analysis and design. Harper & Row, 1982: § 11.7.[中译本：天线理论——分析与设计(下册). 钟顺时等译. 北京：电子工业出版社，1988.]以及[11] § 4.14.

[13] Balanis C A. Antenna theory: analysis and design. Harper & Row, 1982: ch. 6.[中译本：天线理论——分析与设计(上册). 于志远等译. 北京：电子工业出版社，1988.]以及[11] § 3.6.

[14] Sommerfeld A. Partial differential equations in physics. Academic Press, 1949: ch. Ⅵ.

[15] Stratton J A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill, 1941: § 9.28— § 9.31.[中译本：电磁理论. 何国瑜译. 北京：北京航空学院出版社，1986.]

[16] Stinson D C. Intermediate mathematics in electromagnetics. Prentice-Hall, 1978: § 3.1, § 7.2.[中译本：电磁学中的数学. 王昌耀，刘天惠译. 北京：国防工业出版社，1982.]

[17] Collin R E. Electromagnetic scattering and diffraction, Lecture Notes. Case Western Reserve University, 1980. 也可见 [11] , § 6.5.

[18] Baños A. Dipole radiation in the presence of a conducting half-space. Pergamon

Press, 1966.

[19] Wait J R. Electromagnetic wave theory. Harper & Row, 1985: ch. 6.

[20] Kong J A. Electromagnetic wave theory. John Wiley & Sons, 1986: § 4. 7—§ 4. 10.

[21] King R W P, Smith G S. Antennas in matter. MIT Press, 1981: ch. 11.

第五章　电磁波的散射

§5.1　导体圆柱对于平面电磁波的散射

在这一节中我们先来讨论一个用分离变数法可解的简单散射问题，以便建立散射的基本概念. 散射问题的较为复杂的例子以及散射截面和截面定理将在随后的几节中给出，然后将导出散射问题的积分方程.

本节中将要求解的无穷长导体圆柱对于平面电磁波的散射问题是一个二维电磁场问题，在这里我们先来建立二维电磁场问题的方程式，其结果将表明，对于二维电磁场问题的讨论可分离为 E 型波和 H 型波两个较简单的独立问题分别进行.

1. 二维电磁场方程

我们来考虑均匀介质区域 μ,ε 中的二维时谐电磁场，这时场与源的分布相对于某一维坐标是不变的，我们将此一维坐标取作直角坐标系的 z 坐标. 将 Maxwell 方程(1.1.5)的两个旋度方程写成直角坐标分量式，考虑到 $\partial/\partial z=0$，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_x-J_{mx}, &&\frac{\partial H_z}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x+J_x,\\&\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mathrm{j}\omega\mu H_y+J_{my}, &&\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y-J_y,\\&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z-J_{mz}, &&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z+J_z.\end{aligned}\right\}\tag{5.1.1}$$

不难看出，在方程组(5.1.1)中两组量 $J_z,E_z,H_x,H_y,J_{mx},J_{my}$ 和 $J_{mz},H_z,E_x,E_y,J_x,J_y$ 之间不发生耦合，所以(5.1.1)式可分离为两个方程组，每一组仅含有三个分量方程式，两组方程式之间相互独立. 前一组的仅有 z 分量场矢量为 E_z，称为 E 型波；后一组仅含有 H_z 分量，称为 H 型波.

E 型波的三个方程式为

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_x-J_{mx},\tag{5.1.2a}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mathrm{j}\omega\mu H_y+J_{my},\tag{5.1.2b}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z+J_z.\tag{5.1.2c}$$

利用(5.1.2c)在(5.1.2a)和(5.1.2b)中消去 H_x 和 H_y 后得场的纵向分量 E_z 所满足的非齐次方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_z+k^2E_z=\mathrm{j}\omega\mu J_z+\left(\frac{\partial J_{my}}{\partial x}-\frac{\partial J_{mx}}{\partial y}\right), \tag{5.1.3}$$

式中

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon. \tag{5.1.4}$$

由波动方程(5.1.3)解出 E_z 后代回(5.1.2a)式和(5.1.2b)式即可求得磁场的横向分量. 所以在 E 型波问题中电场的纵向分量 E_z 起着"标势"的作用. (5.1.1)式中剩下的三个方程是 H 型波的方程:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x+J_x, \tag{5.1.5a}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y-J_y, \tag{5.1.5b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z-J_{mz}. \tag{5.1.5c}$$

同样,消去 E_x,E_y 后得 H_z 的波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_z+k^2H_z=\mathrm{j}\omega\varepsilon J_{mz}+\left(\frac{\partial J_x}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial x}\right). \tag{5.1.6}$$

2. E 型平面波在无穷长导体圆柱上的散射[1,2]

作为用分离变数法可求解的最简单的散射问题,我们考虑 E 型平面波在无穷长的理想导体圆柱上的散射问题. 导体圆柱的轴取为 z 轴,设入射波波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 z 轴,波的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 平行于 z 轴(图 5.1). 散射波是由入射波在导体表面上激励的感应电流所产生的,入射波与散射波之和应满足圆柱面上理想导体的边界条件.

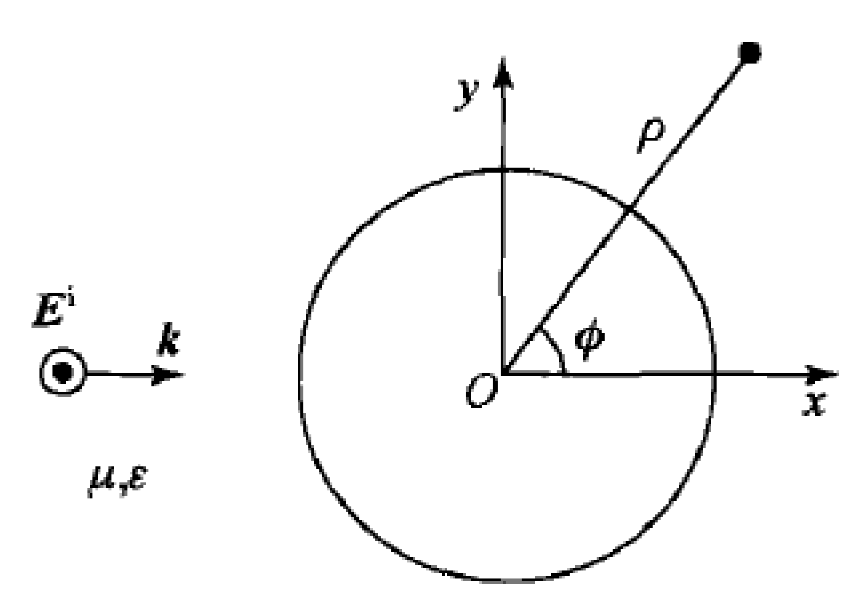


图 5.1 E 型平面波垂直投射于无穷长理想导体圆柱

为使解满足导体柱面上的边界条件,需将入射平面波展开为柱面波. 首先,将入射平面波用柱坐标表示为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{a}_zE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx}=\boldsymbol{a}_zE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos\phi}. \tag{5.1.7}$$

在 Bessel 函数的生成函数公式①

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n \quad (0<|t|<\infty) \tag{5.1.8}$$

① 见,例如:郭敦仁,《数学物理方法》,§17.4,高等教育出版社,1965.

中令 $x=k\rho, t=-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$,(5.1.7)后一等式中的指数函数就可展开为 Bessel 函数的级数:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos\phi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_n(k\rho)(-\mathrm{j})^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{J}_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}.$$

于是,入射平面波的电场就展开成为柱面波的下列级数式:

$$E_z^{\mathrm{i}}=E_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{J}_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}. \tag{5.1.9}$$

由于入射波只含有 z 分量电场,在无穷长的导体柱面上只能激励 z 方向的感应面电流,所产生的散射场也只有 z 分量电场. 用 E_z^{sc} 表示散射波的电场,将它展开为出射的柱面波之和,即第二类 Hankel 函数的级数

$$E_z^{\mathrm{sc}}=E_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{j}^{-n}\mathrm{H}_n^{(2)}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}, \tag{5.1.10}$$

其中的未知系数 a_n 即可由导体面上的边界条件确定.

在导体面上入射波与散射波电场切线分量之和应为零,

$$E_z\,|_{\rho=a}=(E_z^{\mathrm{i}}+E_z^{\mathrm{sc}})\,|_{\rho=a}=0, \tag{5.1.11}$$

将级数展开式(5.1.9)和(5.1.10)代入上式可求得

$$a_n=-\frac{\mathrm{J}_n(ka)}{\mathrm{H}_n^{(2)}(ka)}. \tag{5.1.12}$$

(5.1.9)式给出的 E_z^{i} 和(5.1.10)式给出的 E_z^{sc} 之和即为总的电场 E_z,导体柱面上的感应面电流可通过边界条件由 E_z 求出:

$$J_{sz}=H_\phi\Big|_{\rho=a}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\frac{2E_0}{\omega\mu\pi a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}}{\mathrm{H}_n^{(2)}(ka)}, \tag{5.1.13}$$

得出后一个等式时用到了柱函数的 Wronski 行列式的下列结果:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n'(x)\mathrm{H}_n^{(2)}(x)-\mathrm{J}_n(x)\mathrm{H}_n'^{(2)}(x)&=-\mathrm{j}[\mathrm{J}_n'(x)\mathrm{Y}_n(x)-\mathrm{J}_n(x)\mathrm{Y}_n'(x)]\\&=\mathrm{j}\frac{2}{\pi x},\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

这里撇号表示对于 x 求微商,$\mathrm{Y}_n(x)$是第二类柱函数,即 Neumann 函数.

对于远区的散射场用 Hankel 函数的大宗量近似式代入(5.1.10)式得

$$\begin{aligned}E_z^{\mathrm{sc}}&=E_0\left(\mathrm{j}\frac{2}{\pi k\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}\\&=E_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho}}{\rho^{\frac{1}{2}}}\left(\mathrm{j}\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{\mathrm{J}_n(ka)}{\mathrm{H}_a^{(2)}(ka)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}.\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

要得到散射场的具体结果需要区分两种具体的情况.

(1) 高频散射

这是 $ka\gg1$ 的情况,即入射波波长≪圆柱半径,这时级数(5.1.15)式收敛得很慢. 例如,$ka=3$ 时级数的求和只需取前 6 项,但 $ka=100$ 时求和至少需包括

100 项.所以在 ka 取值很大的情况下级数解(5.1.15)式由于收敛得很慢,只是个形式解.克服这个困难的途径是将级数变换为复平面上的积分然后进行求值.由于这种情况下的散射问题实际上是衍射问题,我们将留待在讨论衍射问题的第六章中解决.对于 $ka=3.1$ 的情况,入射波与散射波电场之和

$$E_z = E_z^{\mathrm{i}} + E_z^{\mathrm{sc}}$$

沿 x 轴的分布示于图 5.2.由图可以看到,入射波与反方向的散射波发生的干涉现象($x<0$)和导体柱背后的阴影区($x>0$)中的衍射场分布.

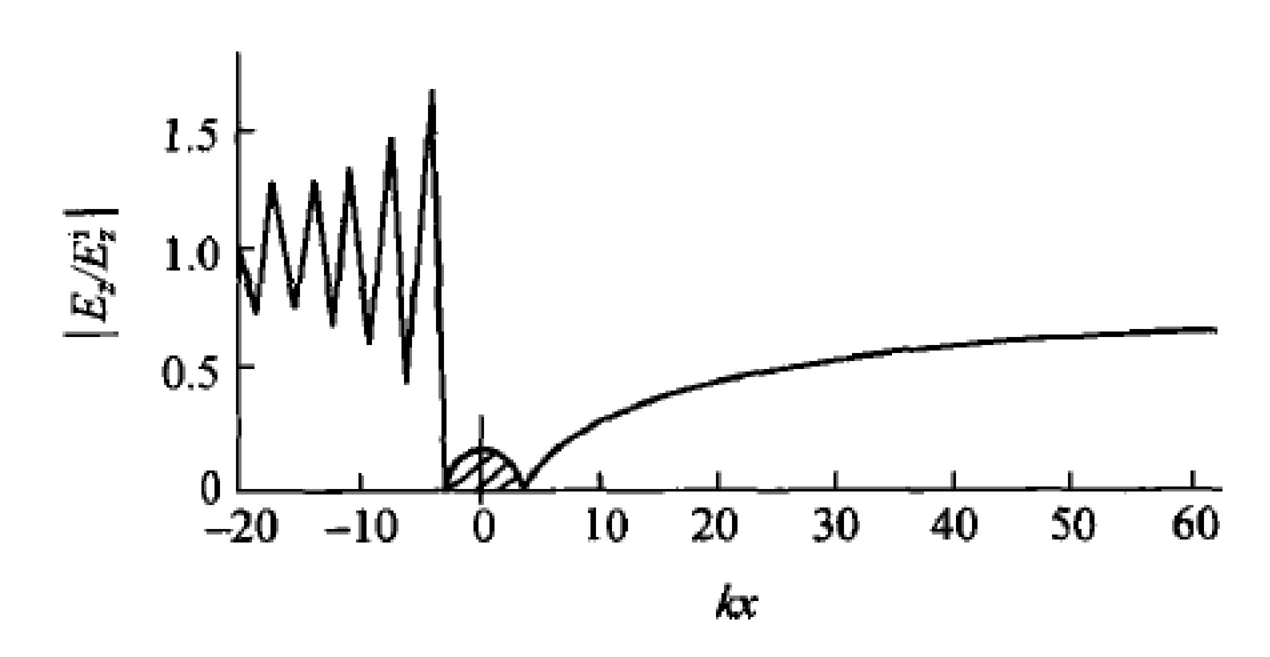


图 5.2　入射波与散射波电场之和沿 x 轴的分布

(2) 低频散射

这时 $ka\ll 1$,即导体柱半径≪入射波波长.在这个条件下级数(5.1.15)式收敛得很快,在求和中只需保留其第一项,即 a_0 项.以 J_0 和 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的小宗量近似式代入(5.1.12)式得

$$a_0 = -\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2\ln ka}. \tag{5.1.16}$$

这时远区的散射场和导体柱面上的面电流密度均能得到简单的表示式:

$$E_z^{\mathrm{sc}} = -E_0\left(\frac{2\mathrm{j}}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi\mathrm{j}}{2\ln ka}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho}}{\rho^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.1.17}$$

$$J_{sz}\Big|_{\rho=a} = \frac{\mathrm{j}E_0}{\omega\mu a\ln ka}. \tag{5.1.18}$$

(5.1.18)式表明在低频极限下散射柱体上的电流是均匀分布的面电流,它在远处所产生的场相当于导体轴线上的细线电流所产生的场,如同(5.1.17)式所表示的,是各向同性的.

H 型波在导体圆柱面上的散射问题求解方法完全类似,所不同的是 H_z 在柱面上将满足 Neumann 型边界条件,而不是(5.1.11)式的 Dirichlet 型边条件.这里不再给出解的结果,有兴趣的读者可自行导出或参阅所引用的文献.对于具有任意极化方向的平面波在导体圆柱面上的散射问题须将入射波分解为 E 型及 H 型极化的波分别计算.

3. 散射截面[1]

对于散射问题，进行研究的通常目的是通过散射波获取关于散射物体的形状及性质等方面的信息. 为此定义了一些量以表征散射物体的特性，其中较重要的一个是散射截面(scattering cross section). 对于导体柱的二维散射问题散射截面定义为

$$\sigma_{sc}=\frac{P^{sc}}{p^{i}}=\frac{z\text{ 方向单位长度空间中散射波的时间平均功率}}{\text{单位面积上的入射波时间平均功率}}, \tag{5.1.19}$$

散射截面 σ_{sc} 具有面积的量纲，它表示一个等效的面积，单位轴向长度内的散射波功率等于这个等效面积上的入射波功率. 现在

$$P^{sc}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_S(\boldsymbol{E}^{sc}\times\boldsymbol{H}^{sc*})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{5.1.20}$$

这里 S 面为远区中半径为 ρ 的单位轴向长度圆柱面，而

$$p^{i}=\frac{1}{2Z}E_0^2, \tag{5.1.21}$$

其中 $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质的波阻抗.

我们来计算导体圆柱对于 E 型波的低频散射截面. 由于在远区中散射场的磁场与电场之间仍然有类似于平面波的关系

$$\boldsymbol{H}^{sc}=\frac{1}{Z}\boldsymbol{a}_\rho\times\boldsymbol{E}^{sc}, \tag{5.1.22}$$

将(5.1.17)式和(5.1.22)式代入(5.1.20)式不难求出

$$P^{sc}=\frac{E_0^2}{2Z}2\pi\rho\left(\frac{2}{\pi k\rho}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1}{(\ln ka)^2}=\frac{E_0^2}{2Z}\frac{\pi^2}{k(\ln ka)^2}. \tag{5.1.23}$$

(5.1.23)式代入(5.1.19)式就得到导体柱的低频散射截面

$$\sigma_{sc}=\frac{\pi^2}{k(\ln ka)^2}. \tag{5.1.24}$$

在宽范围的 ka 值下散射截面 σ_{sc} 的计算问题涉及到对于级数(5.1.15)式的精确计算，特别是在大 ka 值下由于级数收敛缓慢而需采取另外的求解方法，在此就不进一步讨论. 图 5.3 中示出了 E 型波和 H 型波的 σ_{sc} 作为 ka 值的函数关系，值得注意的是在高频极限下这两种极化波的 σ_{sc} 值均为 $4a$，这个值恰好 2 倍于由几何光学近似所给出的 σ_{sc} 值. 在几何光学近似下柱面的被照射一侧的背后形成完全无场的影区，散射波功率等于被柱面截获的照射波的功率，σ_{sc} 似为 $2a(\mathrm{m}^2)$. 实际上在 $+x$ 轴方向，即影区的中央，存在着一个窄的强辐射波束. 这个波束是沿着影区的柱面表面爬行的波射线形成的，其辐射的功率与被柱截获的功率相等，导致散射截面 2 倍于几何光学截面. 有兴趣的读者可参考[3]，ch. 2，对于此问题的详细讨论亦可参考[4]，p. 660.

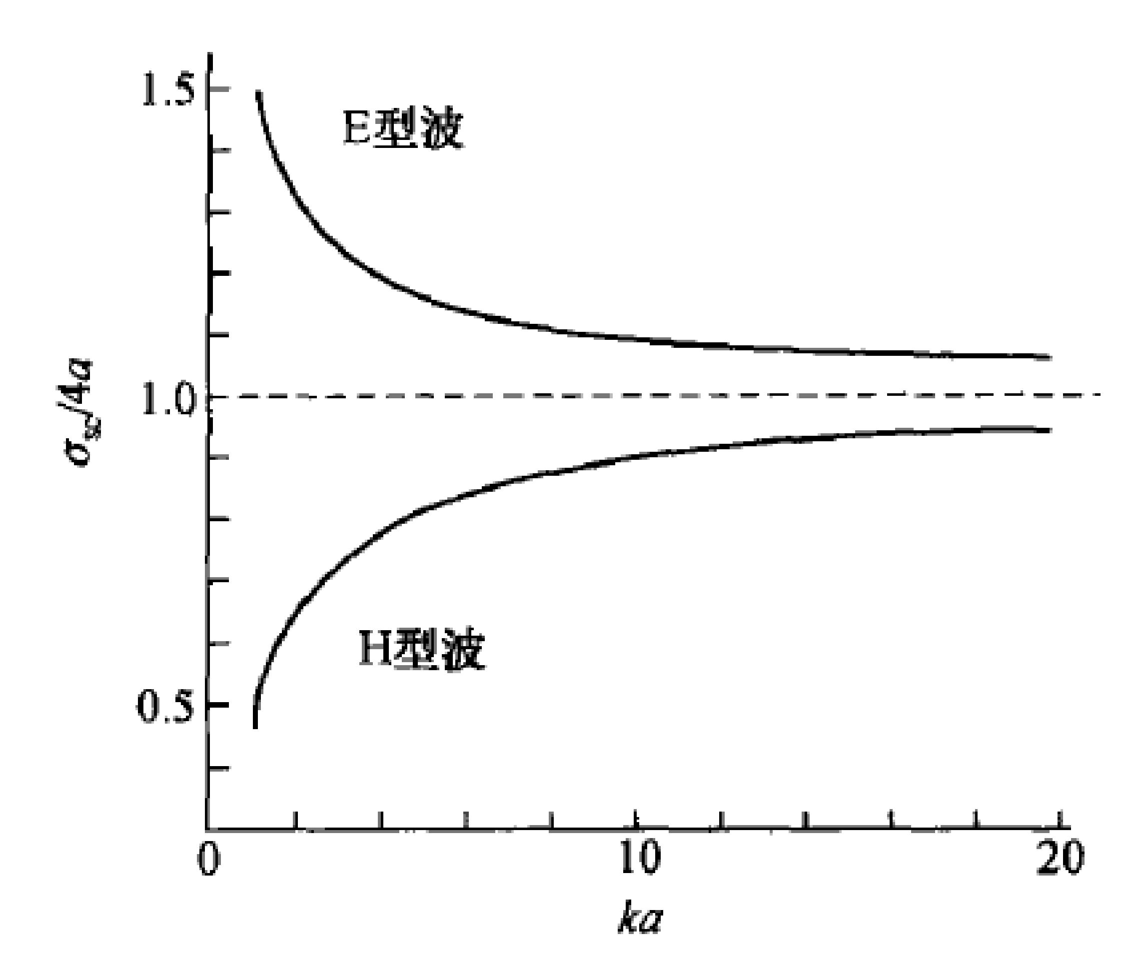


图 5.3 无穷长理想导体圆柱对正入射 E 型和 H 型波的散射截面

§5.2 介质球的散射

1. 用标量势构成球坐标系中矢量波动方程的解[1,2,4,5,6]

这一节中要讨论的介质球对于平面电磁波的散射问题,是用分离变数法可解的少数三维散射问题的一个例子. 由于问题涉及电磁场矢量满足球面上的边界条件问题,选用球坐标系作为参照系是方便的.

我们先来证明电磁场矢量所满足的齐次矢量波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}-k^2\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0 \tag{5.2.1}$$

在球坐标系中的解可以用两个标量函数构成,这两个标量函数 Π_e 和 Π_m 称为 Debye 势,它们分别定义为齐次标量波动方程

$$(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}\Pi_e/r\\ \Pi_m/r\end{Bmatrix}=0 \tag{5.2.2}$$

的解. 从标量波动方程在球坐标下分离变数解的知识,我们知道 Π_e/r 和 Π_m/r 可以写作

$$\begin{Bmatrix}\Pi_e/r\\ \Pi_m/r\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\phi)=z_n(kr)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\phi), \tag{5.2.3}$$

这里

$$\mathrm{Y}_n^m(\theta,\phi)=\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\quad\begin{pmatrix}n=1,2,3,\cdots;\\ m=n,n-1,\cdots,-n+1,-n\end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

为球谐函数，$Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$表示 $n+1/2$ 阶的任一柱函数，而

$$z_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \tag{5.2.5}$$

为 n 阶球 Bessel 函数.

用上述方式定义 Debye 势 Π_e 和 Π_m 后我们可以证明$\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)$和$\nabla\times(\Pi_m \boldsymbol{a}_r)$是齐次波动方程(5.2.1)的解. 为此我们令 $v=\Pi_e/r$，然后在球坐标系中作旋度运算得

$$\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)=\nabla\times(v\boldsymbol{r})=-\frac{\partial v}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\phi}\boldsymbol{a}_\theta, \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)=&-\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}\right]\boldsymbol{a}_r\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi,\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

$$\nabla\times\nabla\times[\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)]=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\nabla^2 v)\boldsymbol{a}_\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2 v)\boldsymbol{a}_\phi. \tag{5.2.8}$$

将$\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)$代入矢量波动方程(5.2.1)，利用(5.2.6)式和(5.2.8)式以及 v 是齐次标量波动方程(5.2.2)的解这一特性，就不难证明$\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)$满足齐次矢量波动方程：

$$\begin{aligned}&(\nabla\times\nabla\times-k^2)[\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)]\\&=-\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\nabla^2 v+k^2 v)+\boldsymbol{a}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2 v+k^2 v)=0.\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

如果用$\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r)$表示磁场，

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times(\Pi_e \boldsymbol{a}_r), \tag{5.2.10}$$

由(5.2.6)式可得磁场的球坐标分量用 Π_e 的如下表示式：

$$\left.\begin{aligned}H_r&=0,\\H_\theta&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Pi_e,\\H_\phi&=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Pi_e;\end{aligned}\right\} \tag{5.2.11a}$$

再通过 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}$ 可得电场的球坐标分量用 Π_e 的表示式

$$\left.\begin{aligned}E_r&=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\epsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)\Pi_e,\\E_\theta&=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\epsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Pi_e,\\E_\phi&=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\epsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\Pi_e.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.11b}$$

(5.2.11)式所表示的电磁波是相对于 $\boldsymbol{a}_r$ 的 TM 型波. 以解(5.2.3)式代入(5.2.11b)式中的 E_r 分量式,考虑到球 Bessel 函数所满足的方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)z_n(kr)+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]z_n(kr)=0, \tag{5.2.12}$$

电场的 E_r 分量可以用解(5.2.3)式表示为

$$E_r=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\frac{n(n+1)}{r}z_n(kr)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\phi). \tag{5.2.13}$$

这里 m 及 n 可以取任意的可能组合,亦可以对于 m,n 的所有可能组合求和.

类似地,可以用 $\nabla\times(\Pi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{a}_r)$ 表示电场而得出相对于 $\boldsymbol{a}_r$ 的 TE 型波:

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times(\Pi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{a}_r). \tag{5.2.14}$$

由 $\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}$ 求出磁场,TE 型波电磁场的球坐标分量式为

$$\left.\begin{aligned}E_r&=0,\\E_\theta&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Pi_{\mathrm{m}},\\E_\phi&=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Pi_{\mathrm{m}};\end{aligned}\right\} \tag{5.2.15a}$$

$$\left.\begin{aligned}H_r&=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)\Pi_{\mathrm{m}},\\H_\theta&=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Pi_{\mathrm{m}},\\H_\phi&=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\Pi_{\mathrm{m}}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.15b}$$

H_r 的分量式也可写成与(5.2.13)式相似的形式.

这样,在无源均匀介质区域中的电磁场矢量,作为齐次矢量波动方程的解可以用上面两种类型的解(5.2.11)式和(5.2.15)式的叠加来构成,这就避免了在球坐标系中直接求解矢量波动方程的困难. Debye 势对于球形区域边值问题的求解以及多极辐射场问题是一种有效的数学工具.

2. 入射平面波展开为球面波

我们将要求解的球的散射问题如图 5.4 所示,入射的平面波从真空中投射到半径为 a 的均匀介质球上,球的介质常数为 μ,ε,入射波的传播方向取为 z 轴方向,而取 x 轴平行于波的电矢量方向. 对于如此选取的坐标系入射波的电磁场为

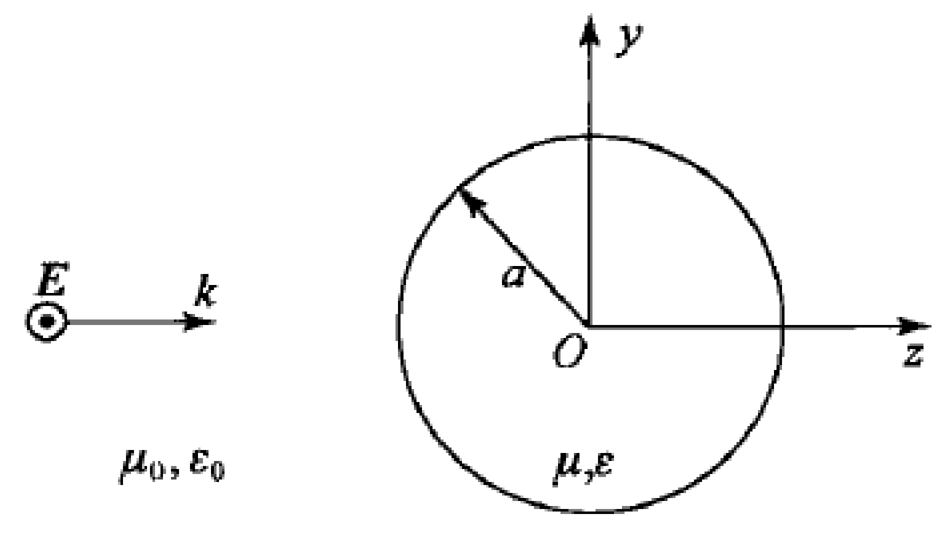


图 5.4　平面波投射于真空中的均匀介质球

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{a}_x E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta}, \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{Z_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.16}$$

与导体柱的散射问题类似，现在需要将入射平面波展开为球波，所用的基本展开公式是①

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{j})^n (2n+1) \mathrm{j}_n(k_0 r) \mathrm{P}_n(\cos\theta), \tag{5.2.17}$$

这里 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 是 n 阶 Legendre 多项式，$\mathrm{j}_n(k_0 r)$ 为 n 阶第一类球 Bessel 函数. 入射平面波的球坐标 r 分量可利用展开式(5.2.17)表示为

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \cos\phi \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta} \\ &= \mathrm{j} \frac{E_0 \cos\phi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{j})^n (2n+1) \mathrm{j}_n(k_0 r) \mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

这是因为

$$\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta} = \frac{1}{\mathrm{j}k_0 r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r\cos\theta}),$$

$$\frac{\mathrm{dP}_n(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\mathrm{P}_n^1(\cos\theta),$$

式中 $\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)$ 为一阶 n 次 Legendre 多项式. 因为 $\mathrm{P}_0^1(\cos\theta)=0$，(5.2.18)式中的求和从 $n=1$ 开始.

将(5.2.18)式和(5.2.13)式及(5.2.3)式比较就可求出入射平面波的 Π_e：

$$\Pi_\mathrm{e} = -\frac{E_0 \cos\phi}{\omega \mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{j})^n (2n+1)}{n(n+1)} k_0 r \mathrm{j}_n(k_0 r) \mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{5.2.19}$$

利用对偶关系则不难写出

$$\Pi_\mathrm{m} = \frac{E_0 \sin\phi}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{j})^n (2n+1)}{n(n+1)} k_0 r \mathrm{j}_n(k_0 r) \mathrm{P}_n^1(\cos\theta). \tag{5.2.20}$$

下面就利用展开式(5.2.19)和(5.2.20)来求解介质球的散射问题.

3. 均匀介质球散射问题的解[1,2,4]

由于问题所具有的轴对称性，参照(5.2.19)式和(5.2.20)式球外散射场的 Debye 势可以设为

$$\Pi_\mathrm{e}^\mathrm{sc} = \frac{E_0 \cos\phi}{\omega \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{j})^n (2n+1)}{n(n+1)} a_n k_0 r \mathrm{h}_n^{(2)}(k_0 r) \mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{5.2.21}$$

$$\Pi_\mathrm{m}^\mathrm{sc} = -\frac{E_0 \sin\phi}{k_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{j})^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n k_0 r \mathrm{h}_n^{(2)}(k_0 r) \mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{5.2.22}$$

① 见，例如，郭敦仁，《数学物理方法》，§17.16，高等教育出版社，1965. 或[9]，§7.6.

这里 a_n 和 b_n 为待定系数,所设的散射势 ϕ 角的函数关系与入射场相同.球外总场的 Debye 势为入射平面波及散射场的 Debye 势之和:

$$\Pi_e^{\text{out}} = -\frac{E_0\cos\phi}{\omega\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{j})^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)k_0r[\mathrm{j}_n(k_0r)-a_n\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0r)], \tag{5.2.23}$$

$$\Pi_m^{\text{out}} = \frac{E_0\sin\phi}{k_0}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{j})^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)k_0r[\mathrm{j}_n(k_0r)-b_n\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0r)]. \tag{5.2.24}$$

球内区域的 Debye 势可类似地设为

$$\Pi_e^{\text{in}} = -\frac{E_0\cos\phi}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{j})^n\frac{2n+1}{n(n+1)}c_nkr\mathrm{j}_n(kr)\mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{5.2.25}$$

$$\Pi_m^{\text{in}} = \frac{E_0\sin\phi}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{j})^n\frac{2n+1}{n(n+1)}d_nkr\mathrm{j}_n(kr)\mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{5.2.26}$$

这里 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$,而 $\varepsilon=\kappa_e\varepsilon_0$,$\mu=\kappa_m\mu_0$ 为球的介质常数.

在 $r=a$ 的球面上,场的切线分量 $E_\theta, E_\phi, H_\theta, H_\phi$ 应连续,导致球内、外的 Debye 势应满足下列条件:

$$\frac{1}{\kappa_e}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_e^{\text{in}}}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_e^{\text{out}}}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=a}, \tag{5.2.27a}$$

$$\frac{\partial\Pi_m^{\text{in}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial\Pi_m^{\text{out}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}, \tag{5.2.27b}$$

$$\frac{1}{\kappa_m}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_m^{\text{in}}}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_m^{\text{out}}}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=a}, \tag{5.2.27c}$$

$$\frac{\partial\Pi_e^{\text{in}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial\Pi_e^{\text{out}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}. \tag{5.2.27d}$$

将(5.2.23)—(5.2.26)式代入(5.2.27a—d)式得到关于未知系数 a_n, b_n, c_n 和 d_n 的线性方程组

$$\frac{c_n}{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}}[x\mathrm{j}_n(x)]'_{x=ka} = [x\mathrm{j}_n(x)]'_{x=k_0a} - a_n[x\mathrm{h}_n^{(2)}(x)]'_{x=k_0a}, \tag{5.2.28a}$$

$$d_n\mathrm{j}_n(ka) = \mathrm{j}_n(k_0a) - b_n\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a), \tag{5.2.28b}$$

$$\frac{d_n}{\kappa_m}[x\mathrm{j}_n(x)]'_{x=ka} = [x\mathrm{j}_n(x)]'_{x=k_0a} - b_n[x\mathrm{h}_n^{(2)}(x)]'_{x=k_0a}, \tag{5.2.28c}$$

$$\left[\frac{\kappa_e}{\kappa_m}\right]^{\frac{1}{2}}c_n\mathrm{j}_n(ka) = \mathrm{j}_n(k_0a) - a_n\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a), \tag{5.2.28d}$$

这里撇号为对于 x 求微商.这个方程组的解给出:

$$a_n=\frac{\kappa_e \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{j}_n]'_{x=k_0a}-\mathrm{j}_n(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}{\kappa_e \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{h}_n^{(2)}]'_{x=k_0a}-\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}, \tag{5.2.29a}$$

$$b_n=\frac{\kappa_m \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{j}_n]'_{x=k_0a}-\mathrm{j}_n(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}{\kappa_m \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{h}_n^{(2)}]'_{x=k_0a}-\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}, \tag{5.2.29b}$$

$$c_n=\frac{ka[\mathrm{j}_n(x)\mathrm{h}_n^{(2)\prime}(x)-\mathrm{j}_n'(x)h_n^{(2)}(x)]_{x=k_0a}}{\kappa_e \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{h}_n^{(2)}]'_{x=k_0a}-\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}$$

$$=-\mathrm{j}\frac{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}}{k_0a}\frac{1}{\kappa_e \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{h}_n^{(2)}]'_{x=k_0a}-\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}, \tag{5.2.29c}$$

$$d_n=-\mathrm{j}\frac{\kappa_m}{k_0a}\frac{1}{\kappa_m \mathrm{j}_n(ka)[x\mathrm{h}_n^{(2)}]'_{x=k_0a}-\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0a)[x\mathrm{j}_n]'_{x=ka}}. \tag{5.2.29d}$$

在求出 c_n 和 d_n 的上述表示式中用到了球 Bessel 函数的 Wronski 行列式的下述公式：

$$[\mathrm{j}_n(x)\mathrm{h}_n^{(2)\prime}(x)-\mathrm{j}_n'(x)\mathrm{h}_n^{(2)}(x)]=-\frac{\mathrm{j}}{x^2}. \tag{5.2.30}$$

级数解(5.2.21)—(5.2.24)式首先由 Mie(1908)和 Debye(1909)得到，常称为 Mie 级数解.

散射问题中实际感兴趣的是远区中的散射场. 在由 Debye 势给出的散射电场表示式

$$\boldsymbol{E}^{sc}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{a}_r\Pi_e^{sc})+\nabla\times(\boldsymbol{a}_r\Pi_m^{sc}) \tag{5.2.31}$$

中代入 Π_e^{sc} 和 Π_m^{sc} 的表示式(5.2.21)和(5.2.22)，式中的 $\mathrm{h}_n^{(2)}$ 用大宗量渐近式

$$\lim_{r\to\infty}\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0r)=\mathrm{j}^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{k_0r}, \tag{5.2.32}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\mathrm{h}_n^{(2)}(k_0r)]=\mathrm{j}^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r} \tag{5.2.33}$$

代入得

$$\boldsymbol{E}^{sc}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{r}\Big\{\Big(-\mathrm{j}\frac{E_0}{k_0}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\cdot[a_n\nabla_{\theta,\phi}(\cos\phi \mathrm{P}_n^1(\cos\theta))-b_n\boldsymbol{a}_r\times\nabla_{\theta,\phi}(\sin\phi \mathrm{P}_n^1(\cos\theta))]\Big\}, \tag{5.2.34}$$

其中

$$\nabla_{\theta,\phi}=\boldsymbol{a}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{5.2.35}$$

在(5.2.34)式中仅保留有 $1/r$ 量级的辐射场，由于 $E_r^{sc}\propto 1/r^2$，E_r^{sc} 分量已被略去，因此(5.2.34)式中的{ · }仅是(θ,ϕ)的矢量函数，用 $\boldsymbol{F}(\theta,\phi)$表示. $\boldsymbol{F}(\theta,\phi)$的球坐标分量为

$$F_\theta=-\mathrm{j}\,\frac{E_0}{k_0}\cos\phi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n\frac{\mathrm{dP}_n^1(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}+b_n\frac{\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]$$
$$=-\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{E}_0}{k_0}\cos\phi\, i_1(\theta). \tag{5.2.36}$$

$$F_\phi=\mathrm{j}\,\frac{E_0}{k_0}\sin\phi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n\frac{\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}+b_n\frac{\mathrm{dP}_n^1(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]$$
$$=\mathrm{j}\,\frac{E_0}{k_0}\sin\phi\, i_2(\theta), \tag{5.2.37}$$

这里 $i_1(\theta)$和 $i_2(\theta)$分别表示相应式中的级数.矢量函数 $\boldsymbol{F}(\theta,\phi)$将确定介质球的散射参量,具体结果将在讨论散射截面的§5.3 中给出.

4. Rayleigh 散射

在低频极限下 $k_0a\ll1,ka\ll1$.在(5.2.29a,b)式中代入小宗量近似公式

$$\lim_{x\to0}[x\mathrm{j}_n(x)]'=2^n\frac{(n+1)!}{(2n+1)!}x^n, \tag{5.2.38}$$

$$\lim_{x\to0}[x\mathrm{h}_n^{(2)}(x)]'=\frac{\mathrm{j}}{2^n}\frac{(2n)!}{(n-1)!}x^{-(n+1)} \tag{5.2.39}$$

可求出

$$a_n=-\mathrm{j}(k_0a)^{2n+1}2^{2n}\frac{n!(n+1)!(\kappa_\mathrm{e}-1)}{(2n)!(2n+1)![n(\kappa_\mathrm{e}+1)+1]}\cdot[1+C_n(k_0a)^2], \tag{5.2.40}$$

$$b_n=-\mathrm{j}(k_0a)^{2n+1}2^{2n}\frac{n!(n+1)!(\kappa_\mathrm{m}-1)}{(2n)!(2n+1)![n(\kappa_\mathrm{m}+1)+1]}\cdot[1+C_n(k_0a)^2], \tag{5.2.41}$$

C_n 是与 n 有关的常数.

若介质球为非磁性球,$\kappa_\mathrm{m}=1$,则 $b_n=0$.略去(5.2.40)式方括号中的$(k_0a)^2$高级小项则可求出

$$a_1=-\mathrm{j}\,\frac{2}{3}\frac{\kappa_\mathrm{e}-1}{\kappa_\mathrm{e}+2}(k_0a)^3. \tag{5.2.42}$$

在(5.2.34)式的级数中仅保留 a_1 项,求得的远区散射电场为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta&=-\mathrm{j}\,\frac{E_0}{k_0}\,\frac{3}{2}a_1\cos\theta\cos\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{r},\\E_\phi&=\mathrm{j}\,\frac{E_0}{k_0}\,\frac{3}{2}a_1\sin\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{r}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.43}$$

将(5.2.42)式给出的 a_1 代入上式得

$$\left.\begin{aligned}E_\theta&=-E_0k_0^2\,\frac{\kappa_\mathrm{e}-1}{\kappa_\mathrm{e}+2}a^3\cos\theta\cos\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{r},\\E_\phi&=E_0k_0^2\,\frac{\kappa_\mathrm{e}-1}{\kappa_\mathrm{e}+2}a^3\sin\phi\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0r}}{r}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.43a}$$

可以证明沿 $\boldsymbol{a}_x$ 取向的电偶极矩

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 E_0 \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} a^3 \boldsymbol{a}_x \tag{5.2.44}$$

所产生的辐射场与(5.2.43a)式相同. 当半径为 a，介电常数 $\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0$ 的介质球浸没于均匀的静电场 $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{a}_x$ 之中，所产生的介质球总电偶极矩与(5.2.44)式给出的值相同.

对于三维散射问题，散射截面定义为

$$\sigma_{sc} = \frac{\text{散射波的时间平均功率}}{\text{入射波的时间平均功率密度}} = \frac{P^{sc}}{p^i}. \tag{5.2.45}$$

P^{sc} 可由在半径 r 很大的球面上对复数 Poynting 矢量实部的积分求出，以(5.2.43a)式代入计算得

$$\frac{\sigma_{sc}}{\pi a^2} = \frac{8}{3} \left| \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2} \right|^2 (k_0 a)^4 \propto \frac{1}{\lambda_0^4}. \tag{5.2.46}$$

因此，在低频极限下，球的散射截面与入射波波长的四次方成反比，这种类型的散射称为 Rayleigh 散射. Rayleigh 首先在研究大气微粒对于自然光的散射问题时导出了这个规律，从而解释天空呈现蓝色的自然现象. 雨滴对于无线电波的散射也属于 Rayleigh 散射的范畴.

但在高频情况下，$k_0 a \gg 1$，散射场的计算遇到与导体柱散射问题中类似的级数收敛缓慢的困难.

§5.3　散射截面及截面定理

1. 散射截面[1,2]

在上一节中我们看到，当选定球坐标系的 z 轴方向与入射平面波的波矢量方向平行时，介质球的远区散射场可以表示成

$$\boldsymbol{E}^{sc} = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \boldsymbol{F}(\theta, \phi) \tag{5.3.1}$$

的形式. 这里 (θ, ϕ) 是散射场的场点角坐标，散射场的角分布由矢量函数 $\boldsymbol{F}(\theta, \phi)$ 确定. 当散射体为任意形状物体，在坐标系已取定时，对于沿任意方向的入射波，散射场的分布可以用与(5.3.1)式相类似的一般表示式表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{sc} &= \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i, \boldsymbol{k}), \\ \boldsymbol{H}^{sc} &= \frac{1}{Z_0} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \frac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i, \boldsymbol{k}), \end{aligned}\right\} \tag{5.3.2}$$

这里 $\boldsymbol{k}^i$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示入射波和散射波的波矢量. 现在，与(5.3.1)式不同，散射

波的矢量分布函数 $\boldsymbol{F}$ 除了与散射波的波矢量 $\boldsymbol{k}(\theta,\phi)$ 有关外，还与入射波的波矢量方向有关. 在(5.3.2)式中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}/r$ 为出射球波因子，与辐射问题比较 $\boldsymbol{F}$ 则类似于辐射积分 $\boldsymbol{N}$.(5.3.2)式的导出及 $\boldsymbol{F}$ 的一般表示式将在下一节中给出.

由散射截面的定义(5.2.45)式，三维散射体的散射截面可以用 $\boldsymbol{F}$ 的积分表示为下面的一般形式

$$\sigma_{\mathrm{sc}} = \frac{P^{\mathrm{sc}}}{p^{\mathrm{i}}} = \frac{\iint |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k})|^2 \mathrm{d}\Omega}{|\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{i}}|^2}. \tag{5.3.3}$$

以介质球的散射问题为例，由(5.2.36)式和(5.2.37)式可求出①

$$\iint |\boldsymbol{F}|^2 \mathrm{d}\Omega = E_0^2 \iint \left[\frac{1}{k_0^2}\cos^2\phi\, |i_1(\theta)|^2 + \frac{1}{k_0^2}\sin^2\phi\, |i_2(\theta)|^2\right]\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{2\pi}{k_0^2}E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

上式代入(5.3.3)式即得

$$\sigma_{\mathrm{sc}} = \frac{2\pi}{k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2). \tag{5.3.4}$$

作为表征散射体特性的参量，散射截面所表示的是散射入射波功率的总能力，而不反映散射波的方向分布特性. 散射波的方向分布特性是用另外一个参量表示的，称为微分散射截面(differential cross section)，它定义为以 $\boldsymbol{k}$ 方向为中心的单位立体角内的时间平均散射功率与入射波的时间平均功率密度之比，它是 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 两者的函数，用 $\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k})$ 表示：

$$\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k}) = \frac{P^{\mathrm{sc}}(\text{单位立体角内})}{p^{\mathrm{i}}}. \tag{5.3.5}$$

因为

$$P^{\mathrm{sc}}(\text{单位立体角内}) = \frac{1}{2Z_0}|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k})|^2, \tag{5.3.6}$$

所以微分散射截面可用 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k}) = \frac{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{k})|^2}{|\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{i}}|^2}. \tag{5.3.5a}$$

在雷达问题中用到的两种散射截面与微分散射截面之间有简单的关系. 在雷达问题中(图 5.5)雷达天线所接收到的回波信号是沿着天线发射波的反方向传播的散射波，设接收点的回波强度为 p^{rec}，天线与散射体(目标)之间的距离为 r，则

$$p^{\mathrm{rec}} = \frac{\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}},-\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}})}{r^2}p^{\mathrm{i}}. \tag{5.3.7}$$

① 见[1]，§8.9.

这里 p^{i} 是雷达天线发射的波在目标处的强度. 假定目标散射的总功率 P^{sc} 为由接收到的回波信号强度 p^{rec} 所定义的各向同性散射体所散射的总功率

$$P^{\mathrm{sc}} = 4\pi r^2 p^{\mathrm{rec}}, \tag{5.3.8}$$

雷达散射截面 σ_{rad} 则按照与(5.3.3)式相同的方式由这个等效的各向同性散射体的散射功率 P^{sc} 定义为

$$\sigma_{\mathrm{rad}} = \frac{P^{\mathrm{sc}}}{p^{\mathrm{i}}}. \tag{5.3.9}$$

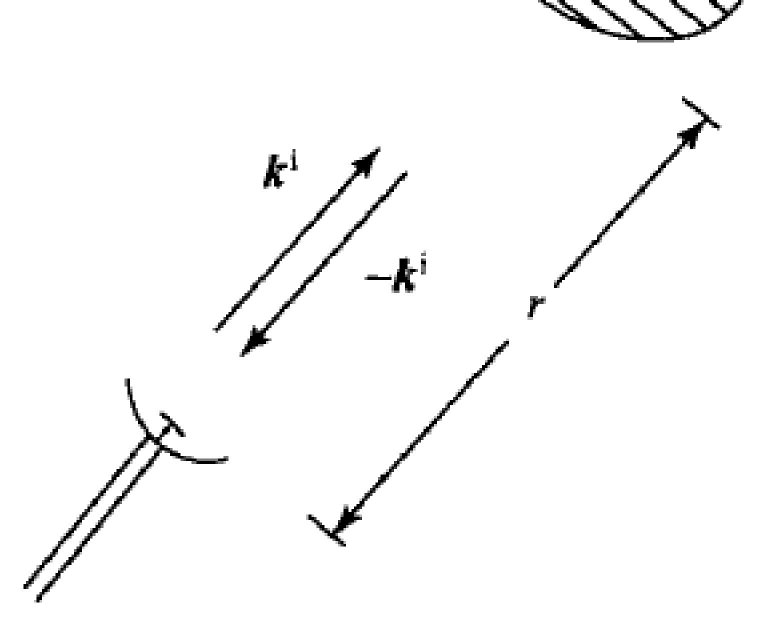


图 5.5　雷达波的散射问题


将(5.3.7)式和(5.3.8)式代入(5.3.9)式得

$$\sigma_{\mathrm{rad}} = 4\pi\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}, -\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}), \tag{5.3.10}$$

如此定义的雷达散射截面等于沿入射波反方向的微分散射截面的 4π 倍. 雷达散射截面又称为单静态截面(monostatic cross section). 雷达问题中定义的另一种散射截面称为双静态截面(bistatic cross section), 它与沿任一方向的散射波强度有关. 如果让(5.3.7)式中的 p^{rec} 表示沿任一方向 $\boldsymbol{k}$ 的散射波强度, 按照上面的同样方式定义的雷达散射截面称为双静态截面, 用 $\sigma_{\mathrm{bistatic}}(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k})$ 表示. 显然有

$$\sigma_{\mathrm{bistatic}}(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k}) = 4\pi\sigma(\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k}), \tag{5.3.11}$$

由于现在涉及与入射波方向不同的另一方向的散射波, 故称为双静态截面; 反之, 雷达散射截面则称为单静态截面.

仍以介质球的散射问题为例我们来求它的雷达散射截面. 以 $\theta=\pi$ 代入(5.2.36)式和(5.2.37)式得①

$$\boldsymbol{F}(\pi) = \boldsymbol{a}_x\left[-\mathrm{j}\frac{E_0}{k_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2}(-1)^n(a_n - b_n)\right], \tag{5.3.12}$$

可见, 一般来说呈椭圆极化的散射波这时变为线极化波. (5.3.12)式代入(5.3.9)式得

$$\sigma_{\mathrm{rad}} = 4\pi\left|\frac{\boldsymbol{F}(\pi)}{\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{i}}}\right|^2 = \pi a^2\frac{1}{(k_0 a)^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(-1)^n(a_n - b_n)\right|^2. \tag{5.3.13}$$

纯导体球($\kappa_{\mathrm{e}}=\infty$)和水球($\sqrt{\kappa_{\mathrm{e}}}=3.41-1.94\mathrm{j}$)的 $\sigma_{\mathrm{rad}}/\pi a^2$ 作为 $k_0 a$ 的函数曲线示于图 5.6, 图中 $m=\sqrt{\kappa_{\mathrm{e}}}$.

---

① 见[1], §8.9.

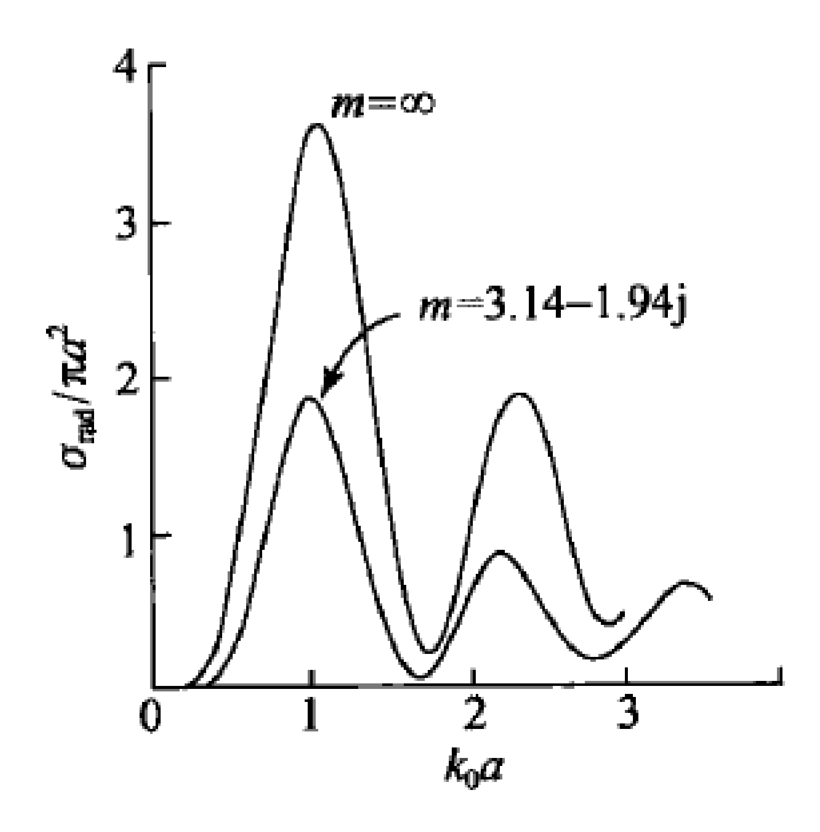


图 5.6 理想导体球和水球的雷达散射截面

2. 截面定理[7,8]

当散射体是损耗介质时被散射体吸收的时间平均功率为

$$P^{abs}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\tag{5.3.14}$$

这里积分曲面 S 是包围散射体的任意闭合曲面,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为入射波与散射波之和,而散射的时间平均功率可用同一曲面 S 上的积分表示为

$$P^{sc}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oiint_S(\boldsymbol{E}^{sc}\times\boldsymbol{H}^{sc*})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\tag{5.3.15}$$

如果用 P^{ext} 表示被散射体吸收和散射的时间平均功率之和,则有

$$P^{ext}=P^{abs}+P^{sc}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*-\boldsymbol{E}^{sc}\times\boldsymbol{H}^{sc*})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\tag{5.3.16}$$

P^{ext} 表示入射波被散射体消除的(包括吸收和散射)时间平均总功率. 因为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^i+\boldsymbol{E}^{sc},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^i+\boldsymbol{H}^{sc},\tag{5.3.17}$$

而且对于入射波有

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oiint_S(\boldsymbol{E}^i\times\boldsymbol{H}^{i*})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,\tag{5.3.18}$$

所以 P^{ext} 可以用入射波和散射波表示为

$$P^{ext}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oiint_S(\boldsymbol{E}^i\times\boldsymbol{H}^{sc*}+\boldsymbol{E}^{sc}\times\boldsymbol{H}^{i*})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\tag{5.3.19}$$

现假定入射波是平面波

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}^i&=\boldsymbol{E}_0^i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{r}},\\ \boldsymbol{H}^i&=\frac{1}{Z_0}\left(\frac{\boldsymbol{k}^i}{k_0}\times\boldsymbol{E}_0^i\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{r}},\end{aligned}\right\}\tag{5.3.20}$$

以(5.3.2)式和(5.3.20)式代入(5.3.19)式,取 S 面为半径 r 很大的球面,在此

球面上有 $\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{a}_r$，因此

$$P^{\text{ext}}=-\frac{1}{2}\text{Re}\oiint_S\Big[\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\times(\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{F}^*)\cdot\boldsymbol{a}_r\text{e}^{-\text{j}\boldsymbol{k}^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{r}+\text{j}k_0r}+\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{F}\times\Big(\frac{\boldsymbol{k}^{\text{i}}}{k_0}\times\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\Big)\cdot\boldsymbol{a}_r\text{e}^{\text{j}\boldsymbol{k}^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{r}-\text{j}k_0r}\Big]\frac{1}{r}\text{d}S.\tag{5.3.21}$$

为具体求出积分(5.3.21)需要选定入射波的传播方向，如选取入射波传播方向为 z 轴，$\boldsymbol{k}^{\text{i}}=k_0\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{k}^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{r}=k_0r\cos\theta$，则积分(5.3.21)式可具体地写作

$$P^{\text{ext}}=-\frac{1}{2Z_n}\text{Re}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*\text{e}^{\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}+[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cos\theta-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_z)(\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*})]\text{e}^{-\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}\}r\sin\theta\text{d}\theta\text{d}\phi.\tag{5.3.22}$$

因为 $k_0r\gg1$，这个积分可以用稳相法(method of stationary phase)近似积出.

在电磁散射和衍射问题中会经常遇到下列形式的积分：

$$I=\int F(\omega)\text{e}^{-\text{j}\phi(\omega)}\text{d}\omega,\tag{5.3.23}$$

这里 $F(\omega)$是 ω 的缓慢变化函数，而相位函数 $\phi(\omega)$是 ω 的迅变函数，且 $\phi(\omega)$取较大的值. 在积分区间的大部分范围内由于 $\text{e}^{\text{j}\phi(\omega)}$ 是快速振荡函数，使积分值相当于是振荡函数的平均值而近似为零，对于积分的主要贡献仅来自 $\phi(\omega)$缓慢变化点的邻域. 这些缓慢变化点是函数 $\phi(\omega)$的极值点，即 $\phi'(\omega)=0$ 的点，这些极值点又称为驻留点(stationary points)，用 ω_s 表示. 在 $\omega=\omega_s$ 点的邻域 $\phi(\omega)$展开成 Taylor 级数

$$\phi(\omega)=\phi(\omega_s)+\frac{1}{2}\phi''(\omega_s)(\omega-\omega_s)^2+\cdots,\tag{5.3.24}$$

则积分(5.3.23)式近似化为

$$I=\sum_{\omega_s}F(\omega_s)\text{e}^{\text{j}\phi(\omega_s)}\int\text{e}^{\text{j}\frac{1}{2}\phi''(\omega_s)(\omega-\omega_s)^2}\text{d}\omega.\tag{5.3.25}$$

上述的对于(5.3.23)式类型的积分的近似求值方法称为稳相法. 稳相法实际上是在§4.7 中已经介绍过的最速下降法的一种特殊情况. 关于这两种近似求积分方法的关系也可参考[2]，§8.1—§8.5.

根据稳相法我们先求出积分(5.3.22)式中相位函数的极值点. 由

$$\frac{\text{d}}{\text{d}\theta}(1-\cos\theta)=0\quad\text{或}\quad\sin\theta=0$$

得驻留点

$$\theta_s=0,\pi.$$

我们仅需在这两个驻留点的邻域来求积分的值. 首先考虑在 $\theta=0$ 邻域的积分，这时 $\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_z$，因此有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_z,\boldsymbol{a}_z).$$

由于散射波所具有的球波特性显然有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_z,\boldsymbol{a}_z)\cdot\boldsymbol{a}_z=0, \tag{5.3.26}$$

因此,积分(5.3.22)式可写作

$$P^{\text{ext}}=-\frac{1}{2Z_0}\text{Re}\Big[\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0}\text{e}^{\text{j}\frac{1}{2}k_0r\theta^2}r\theta\text{d}\theta\text{d}\phi$$
$$+\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0}\text{e}^{-\text{j}\frac{1}{2}k_0r\theta^2}r\theta\text{d}\theta\text{d}\phi\Big], \tag{5.3.27}$$

这里 θ_0 为极小的角,故在积分限内可作下列近似:

$$\sin\theta=\theta,\quad 1-\cos\theta=\frac{1}{2}\theta^2,\quad \cos\theta=1,$$

从而导致(5.3.27)式.基于介绍稳相法时已陈述过的理由,计算(5.3.27)式中的积分时可将积分限 θ_0 扩展至∞,可得积分值

$$\int_0^{\theta_0}\text{e}^{\text{j}\frac{1}{2}k_0r\theta^2}\theta\text{d}\theta=-\frac{1}{\text{j}k_0r}.$$

这样,根据在 $\theta=0$ 的邻域对于积分的求值我们得

$$P^{\text{ext}}=-\frac{1}{2Z_0}\text{Re}\Big[\Big(-\frac{2\pi}{\text{j}k_0}\Big)\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})+\Big(\frac{2\pi}{\text{j}k_0}\Big)\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})\Big],$$

考虑到

$$\text{Re}[\text{j}\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*]=\text{Re}[-\text{j}\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}],$$

上式可化成

$$P^{\text{ext}}=-\frac{1}{2Z_0}\text{Re}\Big[\frac{4\pi}{\text{j}k_0}\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})\Big]=\frac{2\pi}{Z_0k_0}\text{Re}[\text{j}\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})]$$
$$=-\frac{2\pi}{Z_0k_0}\text{Im}[\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{i}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})]. \tag{5.3.28}$$

再来看 $\theta=\pi$ 邻域的积分,这时 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{\text{j}},\boldsymbol{k}^{\text{i}})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_z,-\boldsymbol{a}_z)$,同样有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}_z=0$.由于积分变元为实数,可以将 Re 移到(5.3.22)式的积分号中,代入 $\cos\theta=-1$ 后被积函数变为

$$\text{Re}[\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*\text{e}^{\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cos\theta\text{e}^{-\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}]$$
$$=\text{Re}[\boldsymbol{E}_0^{\text{i}}\cdot\boldsymbol{F}^*\text{e}^{\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}-\boldsymbol{E}_0^{\text{i}\,*}\cdot\boldsymbol{F}\text{e}^{-\text{j}k_0r(1-\cos\theta)}].$$

上式方括弧中的第二项取复共轭后即可与第一项相消,因此在第二个驻留点 $\theta=\pi$ 的邻域积分(5.3.22)式为零,(5.3.28)式就是当入射波为平面波时 P^{ext} 的最终结果.

当散射体为电磁波可透入的损耗介质时,可定义散射体的吸收截面(absorption cross section)为

$$\sigma_{\text{abs}}=\frac{P^{\text{abs}}}{p^{\text{i}}}. \tag{5.3.29}$$

吸收截面与散射截面之和称为消光截面(extinction cross section)或称为总散射

截面，用 σ_{ext} 表示：

$$\sigma_{ext}=\frac{P^{ext}}{p^{i}}=\frac{P^{abs}+P^{sc}}{p^{i}}=\sigma_{abs}+\sigma_{sc}. \tag{5.3.30}$$

于是从(5.3.28)式可立即得出消光截面的一般表示式

$$\sigma_{ext}=-\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Im}\left[\frac{\boldsymbol{E}_0^{i\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{k}^i)}{|\boldsymbol{E}_0^i|^2}\right], \tag{5.3.31}$$

这个关系式说明消光截面可由沿入射波方向的散射波确定，因此可以通过测量入射波方向的散射波计算出消光截面.(5.3.31)式称为截面定理或光学定理.

可以对于截面定理作出如下的解释.现在入射波是沿 $\boldsymbol{k}^i$ 方向的平面波，可以设想散射波具有从散射物体发出的沿所有方向的平面波的角谱分量①.在计算总能量流时这些沿不同方向的平面波角谱分量与入射的平面波正交而不对总能流产生贡献，如同上面计算 $\theta=\pi$ 点邻域的积分时所已经见到的那样.仅有沿入射波方向的平面波角谱分量可以与入射波发生相互作用，这就是截面定理所表示的内容.

仍以球对于平面波的散射问题为例，我们利用截面定理来计算球的消光截面.现在 $\boldsymbol{E}_0^i=E_0\boldsymbol{a}_x$，入射波沿 z 轴传播，$\theta=0$，由(5.3.31)式有

$$\sigma_{ext}=-\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Im}\left[\frac{\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{F}}{E_0}\right]_{\theta=0}. \tag{5.3.32}$$

以球的散射波角分布函数(5.2.36)式和(5.2.37)式代入上式得

$$\sigma_{ext}=-\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Im}\left[-\frac{\mathrm{j}}{k_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(a_n\frac{\mathrm{dP}_n^1}{\mathrm{d}\theta}+b_n\frac{\mathrm{P}_n^1}{\sin\theta}\right)\right]_{\theta=0},$$

因为

$$\left[\frac{\mathrm{dP}_n^1(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]_{\theta=0}=\left[\frac{\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]_{\theta=0}=-\frac{n(n+1)}{2}, \tag{5.3.33}$$

所以

$$\sigma_{ext}=-\frac{2\pi}{k_0^2}\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(a_n+b_n)\right]. \tag{5.3.34}$$

显然，对于无耗的球，$\sigma_{abs}=0$，$\sigma_{ext}=\sigma_{sc}$.这样就存在着球的散射截面 σ_{sc} 的两个不同的表示式：(5.3.4)式和(5.3.34)式.关于在无耗球情况下这两个表示式相等的证明以及(5.3.33)式的导出均可在[2]的§8.24中找到.铁球的 σ_{ext}，σ_{abs}，

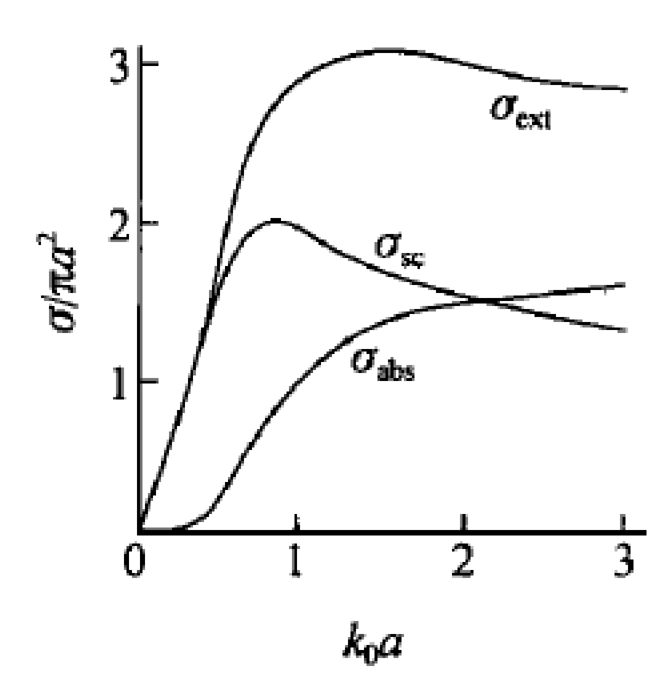


图 5.7　有耗铁球的总散射截面、吸收截面和散射截面

① 关于平面波的角谱概念将在§6.3中予以讨论.

σ_{sc}作为 $k_0 a$ 的函数的典型曲线示于图 5.7.

§ 5.4　散射问题的积分方程

1. 电磁场方程式的直接积分[9]

在 § 5.1 和 § 5.2 中分别讨论的无穷长导体柱和介质球这样的可用分离变数法求解的散射问题是非常有限的. 对于任意形状物体的散射问题的有效求解方法是,建立散射问题的积分方程,然后利用对于积分方程有效的数值解法(例如矩量法等)求出数值解. 在这里我们先来给出为建立散射问题的积分方程所必需的 Maxwell 方程的积分解.

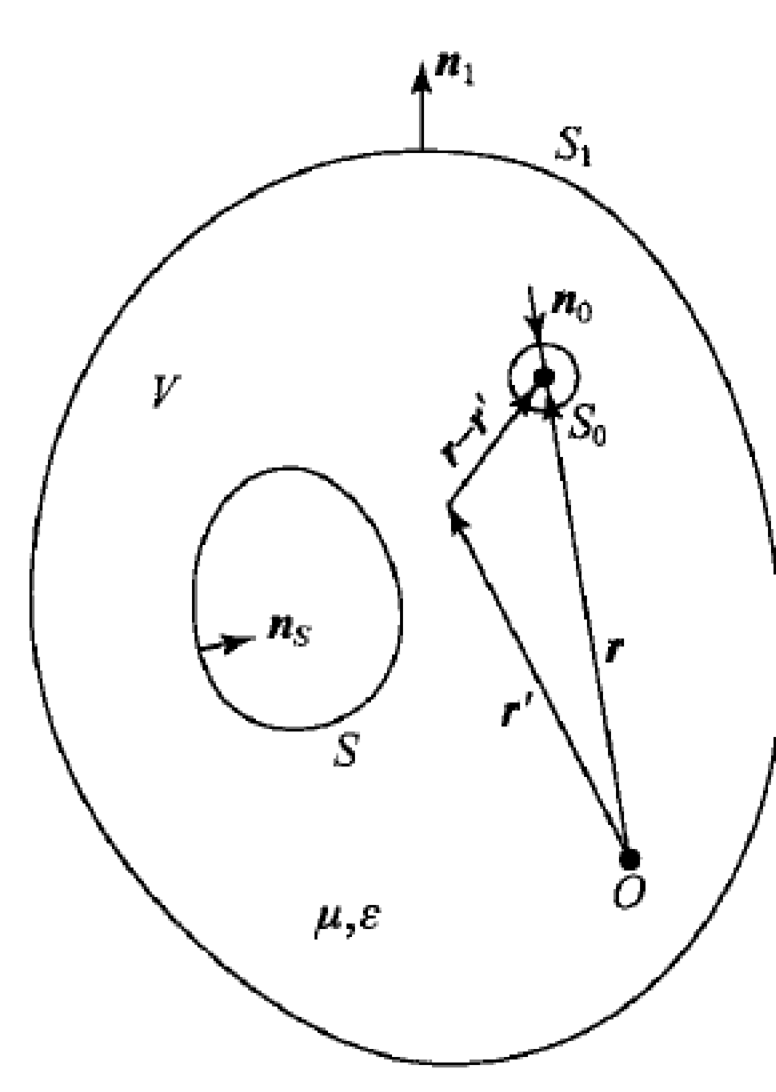


图 5.8　为求 Maxwell 方程组的直接积分所设置的问题

我们来考虑图 5.8 所示的介于两个任意曲面 S 及 S_1 之间的均匀介质区域 V 内的电磁场的积分解问题,区域 V 的边界 $\Sigma=S+S_1$,介质常数为 μ,ε. 由时谐电磁场的 Maxwell 方程式

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}, \\ &\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=\frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{5.4.1}$$

容易导出 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 所满足的非齐次矢量波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-k^2\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}, \tag{5.4.2a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}-k^2\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\nabla\times\boldsymbol{J}, \tag{5.4.2b}$$

这里 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$,源 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$ 在区域 V 内的分布认为是已知的.

类似于利用 Green 函数给出非齐次标量波动方程的解(见 § 1.2),现在可以利用 Green 函数和矢量 Green 公式给出非齐次矢量波动方程(5.4.2)的积分解. 矢量 Green 公式在形式上与熟知的标量 Green 公式

$$\iiint_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\!\oint_S(\varphi\nabla\psi\times-\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

相类似. 如果在矢量代数公式

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

中令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{Q}$ 得

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}]=\nabla\times\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q},$$

若令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{P}$ 得

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}]=\nabla\times\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P}.$$

所得的这两式相减得

$$\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P}=\nabla\cdot[\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}],$$

然后对于上式在体积 V 上积分并利用散度定理将右方的体积分化为面积分便得矢量 Green 公式

$$\iiint_V(\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P})\mathrm{d}V$$

$$=\oiint_S(\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot\mathrm{d}S,\tag{5.4.3}$$

这里要求函数 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 在体积 V 及其表面 S 上具有连续的一级和二级微商.

若将矢量 Green 公式(5.4.3)应用于图 5.8 所示的 $\Sigma=S+S_1$ 包围的闭合区域 V,而且令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{a}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\tag{5.4.4}$$

这里 $\boldsymbol{a}$ 为任意常矢量,$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为自由空间标量 Green 函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\tag{5.4.5}$$

就可导出体积 V 内电磁场的积分表示式. 为此我们先求出

$$\nabla\times\boldsymbol{P}=\nabla g\times\boldsymbol{a},\tag{5.4.6}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P}=\nabla\nabla\cdot(g\boldsymbol{a})-\nabla^2(g\boldsymbol{a})=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla g)-\boldsymbol{a}\nabla^2 g.$$

在上式中考虑到 g 所满足的方程式

$$\nabla^2 g+k^2 g=0\quad(\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'),$$

则有

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P}=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla g)+\boldsymbol{a}k^2 g,\tag{5.4.7}$$

而利用 $\boldsymbol{E}$ 所满足的矢量波动方程式(5.4.2a)可求出

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=k^2\boldsymbol{E}-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}.\tag{5.4.8}$$

然后将(5.4.4)式及(5.4.7),(5.4.8)诸式代入矢量 Green 公式(5.4.3)的左方,对于源变量 $\boldsymbol{r}'$求积分,相应地(5.4.7)式及(5.4.8)式的求微商运算也改为对源变量进行,得

$$\iiint_V[g\boldsymbol{a}\cdot(k^2\boldsymbol{E}-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}-\nabla'\times\boldsymbol{J}_m)-\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{a}k^2 g+\nabla'(\boldsymbol{a}\cdot\nabla' g))]\mathrm{d}V'$$

$$=\iiint_V\boldsymbol{a}\cdot[-\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}-g(\nabla'\times\boldsymbol{J}_m)]\mathrm{d}V'-\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\nabla'(\boldsymbol{a}\cdot\nabla' g)\mathrm{d}V'$$

$$=\iiint_V\boldsymbol{a}\cdot\left[-\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}-g(\nabla'\times\boldsymbol{J}_m)+\frac{1}{\varepsilon}\rho\,\nabla' g\right]\mathrm{d}V'-\oiint_\Sigma(\boldsymbol{a}\cdot\nabla' g)\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}',\tag{5.4.9}$$

得到上面最后的等式是因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\nabla'(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g) &= \nabla'\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g)\boldsymbol{E}]-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g)\cdot(\nabla'\cdot\boldsymbol{E})\\ &= \nabla'\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g)\boldsymbol{E}]-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g).\end{aligned}$$

将(5.4.4)式和(5.4.6)式代入矢量 Green 公式(5.4.3)右侧的面积分中，而且将(5.4.9)式中的面积分项也移到(5.4.3)式的右侧，我们有

$$\begin{aligned}&\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[\boldsymbol{E}\times(\nabla'g\times\boldsymbol{a})-g\boldsymbol{a}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla'g)\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\\ =&\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot[-\mathrm{j}\omega\mu(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})g+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}g]\mathrm{d}S',\end{aligned}\tag{5.4.10}$$

变换为后一面积分式时用到了下面的两个关系式：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{E}\times(\nabla'g\times\boldsymbol{a})]=(\nabla'g\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g],\\ &-\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})g]=-\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}\times(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}})g]\\ &\qquad=-\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{n}\times(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}})g].\end{aligned}$$

在(5.4.10)式中 $\boldsymbol{n}$ 为面 Σ 的单位外法线，即在面 S 和 S_1 上分别为图 5.8 中所示的 $\boldsymbol{n}_S$ 和 $\boldsymbol{n}_1$. 由于 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量，可移到积分号外，这样从(5.4.9)式和(5.4.10)式可得下面的关系式

$$\begin{aligned}&\iiint_V\left[-\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}-g\nabla'\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla'g\right]\mathrm{d}V'\\ =&\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}g]\mathrm{d}S'.\end{aligned}$$

利用积分变换关系

$$\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f},$$

上式体积分中的第二项可变换为

$$\iiint_V g\nabla'\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V'=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}g\mathrm{d}S'+\iiint_V\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\times\nabla'g\mathrm{d}V',$$

于是便得到我们所需要的积分关系式：

$$\begin{aligned}&\iiint_V\left[-\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\times\nabla'g+\frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla'g\right]\mathrm{d}V'\\ &\quad=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'.\end{aligned}\tag{5.4.11}$$

现在假设场点 $\boldsymbol{r}$ 在体积 V 内但不在 Σ 面上，如果 V 内存在体分布源，当源点与场点重合时，即 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=0$ 时，(5.4.11)式体积分中的被积函数是奇异的. 为避免被积函数的奇异行为造成的困难，我们用一球心在 $\boldsymbol{r}$ 点的小球面将 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$ 点

从积分区域 V 中除去，如用 S_0 表示这个小球面，则 $\Sigma=S+S_1+S_0$，S_0 面的单位外法线 $\boldsymbol{n}_0$ 现在指向球心(见图 5.8). 由(5.4.5)式可求出

$$\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\mathrm{j}k\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{r}_0,$$

这里 $\boldsymbol{r}_0=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 为指向球心的单位矢量，所以 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{n}_0$. 令小球面上的积分为 $\boldsymbol{I}_0$，

$$\boldsymbol{I}_0 = \oint\!\!\!\oint_{S_0}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E})\nabla' g]\mathrm{d}S', \tag{5.4.12}$$

显然，在 $\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}$ 的极限下第一项的积分为零，剩下的第二、三项可变换为

$$(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E})\nabla' g$$
$$=[(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{n}_0+(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}_0]\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\mathrm{j}k\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

不难看出

$$[(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{n}_0+(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}_0]=\boldsymbol{E},$$

所以在 $\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}$ 的极限下由于 $\boldsymbol{I}_0$ 中的后两项所得到的极限值为

$$\lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\boldsymbol{I}_0=\boldsymbol{E}\oint\!\!\!\oint_{S_0}\frac{\mathrm{d}S'}{|\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}|^2}=\boldsymbol{E}\oint\!\!\!\oint\mathrm{d}\Omega=4\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}). \tag{5.4.13}$$

将奇异性从积分区域 V 中分离出去后不含有奇异点的体积分用 $\iiint_V$ 表示，称为积分主值. 用积分主值的概念积分关系式(5.4.11)可以表示为

$$\iiint_V[\cdot]\mathrm{d}V'=\oint\!\!\!\oint_{S_0+S_1}[\cdot]\mathrm{d}S'+\lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\boldsymbol{I}_0, \tag{5.4.11a}$$

以(5.4.13)式给出的 $\boldsymbol{I}_0$ 极限值代入，经过整理后即得电场的积分表示式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left[\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_m\times\nabla' g-\frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla' g\right]\mathrm{d}V'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' g]\mathrm{d}S', \tag{5.4.14}$$

这里 $\Sigma=S+S_1$，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 相对于体积 V 的单位外法线. 利用对偶关系可由(5.4.14)式直接写出磁场的积分表示式

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left[-\mathrm{j}\omega\varepsilon g\boldsymbol{J}_m+\boldsymbol{J}\times\nabla' g+\frac{1}{\mu}\rho_m\nabla' g\right]\mathrm{d}V'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla' g]\mathrm{d}S'. \tag{5.4.15}$$

(5.4.14)式和(5.4.15)式给出了区域 V 内不在边界 Σ 上的任一内点 $\boldsymbol{r}$ 的电磁场由 V 内的体分布源以及 Σ 上的等效面源($\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}_{ms}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$, $\rho_s=\varepsilon\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}$, $\rho_{ms}=\mu\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}$)的积分表示的公式,它们也就是 V 内电磁场的积分解. (5.4.14)式和(5.4.15)式也称为 Stratton 和 Chu 公式,它们是导出散射、衍射问题的许多种不同的积分方程的基础. 值得注意的是与矢量 Green 公式不同,现在只要求在 Σ 面上 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 及其一级微商连续.

2. 散射场的积分表示式[1,8]

我们现在利用电磁场的积分表示式(5.4.14)和(5.4.15)来导出散射场的积分表示式. 在散射问题中可以取散射体的表面或包围散射体的适当的闭合面作为 S 面,而将 S_1 面扩展到远处取为半径充分大的球面. 这时由于体积 V 内没有体分布源,电磁场积分表示式中的体积分为零,仅剩有面积分项:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\oiint_{\Sigma}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' g]\mathrm{d}S', \tag{5.4.16a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\oiint_{\Sigma}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla' g]\mathrm{d}S', \tag{5.4.16b}$$

式中 $\Sigma=S+S_1$,S_1 是半径很大的球面. 在散射问题中场源只可能存在于两个区域内,一个是 S_1 面以外的区域,入射波就是由这个区域中的源产生的,另一个是 S 面内的区域,这个区域的源产生散射波.

我们来看电场积分表示式中大球面 S_1 上的积分. 将被积函数中的电磁场分离为入射场和散射场,

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{i}+\boldsymbol{E}^{sc},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{i}+\boldsymbol{H}^{sc}, \tag{5.4.17}$$

我们先来计算散射场对于 S_1 面上积分的贡献. 当面积分在 S_1 上进行时 $\boldsymbol{r}'$ 是端点在无穷大半径球面上的矢径,而 $\boldsymbol{r}$ 是端点在有限远处的矢径,所以在 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的分母中可作近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r',$$

而在相位因子中近似需取到高一级,

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx r'-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n},$$

这里 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}'/r'$. 在这样的近似下有

$$\lim_{r'\to\infty} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'}}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}$$

然后可求出

$$\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\mathrm{j}k\boldsymbol{n}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{5.4.18}$$

电场积分表示式(5.4.16a)中面积分被积函数的后两项可利用(5.4.18)式化为

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{sc})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{sc})\nabla'g=-\mathrm{j}k[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{sc})\times\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{sc})\boldsymbol{n}]g$$
$$=-\mathrm{j}kg\boldsymbol{E}^{sc}. \tag{5.4.19}$$

由小区域 S 内的局域源在远处的大球面 S_1 上产生的散射波的电场和磁场之间有类似于平面波的关系：

$$\boldsymbol{E}^{sc}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{sc}Z,\quad Z=\sqrt{\mu/\varepsilon},$$

因此(5.4.19)式可进一步化为

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{sc})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{sc})\nabla'g=\mathrm{j}kZg\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{sc}=\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{sc}, \tag{5.4.19a}$$

这样便显然有

$$\lim_{r'\to\infty}\oint\!\!\!\oint_{S_1}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{sc})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{sc})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}^{sc})\nabla'g]\mathrm{d}S'\to 0.$$

可见，散射场对于 S_1 面上的积分无贡献，有贡献的只是入射场. 设想散射体不存在时应用电场的积分表示式(5.4.14)于 S_1 面，便不难知道由入射场贡献于 S_1 面上的积分值即等于 $\boldsymbol{E}^{i}$. 于是，电场积分表示式(5.4.16a)可化为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\left\{\oint\!\!\!\oint_{S_1}+\oint\!\!\!\oint_{S}\right\}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'$$
$$=\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r})-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'. \tag{5.4.20}$$

对于磁场的积分表示式可作类似的处理.

在(5.4.20)式及与它相类似的磁场表示式中代入(5.4.17)式，消去入射场后就可得散射场的积分表示式

$$\boldsymbol{E}^{sc}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S', \tag{5.4.21a}$$

$$\boldsymbol{H}^{sc}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla'g]\mathrm{d}S'. \tag{5.4.21b}$$

在式(5.4.21a,b)中单位法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向已改为对于散射问题习惯取的由 S 面指向区域 V 内部的方向(图 5.9)，这种以面积分的形式给出的散射场(或衍射场)的矢量积分表示式称为 Kirchhoff 积分的矢量形式.

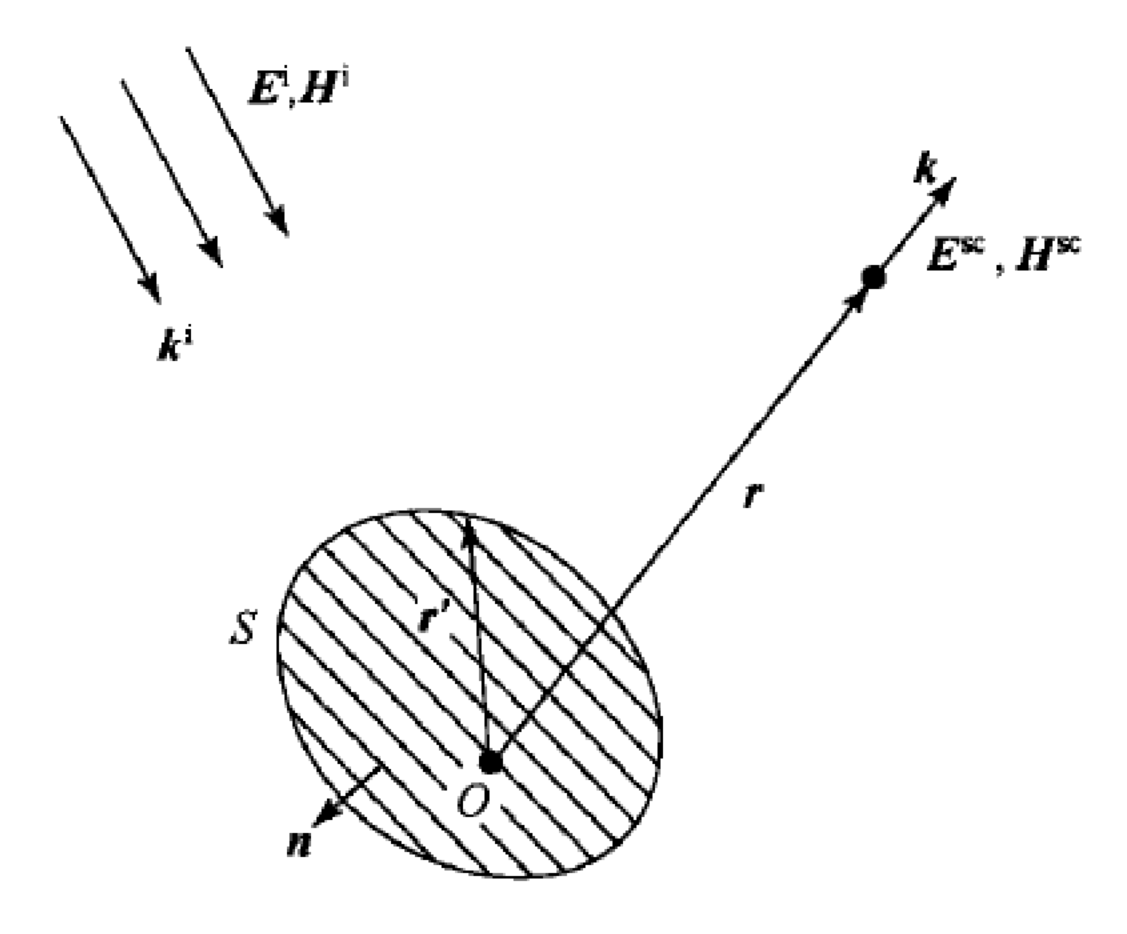


图 5.9 电磁散射的典型问题

由式(5.4.21)不难导出上一节中已经定义的散射场的角分布函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})$ 的积分表示式. 现在场点 $\boldsymbol{r}$ 是远离 S 面的点,因而可以作下面的近似:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'},\\ \nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \mathrm{j}\boldsymbol{k}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}').\end{aligned}\right\} \tag{5.4.22}$$

将以上的近似关系代入(5.4.21a)式便得散射电场的表示式

$$\boldsymbol{E}^{sc}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}), \tag{5.4.23}$$

其中

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{j}}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_S [-Zk(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{k} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S', \tag{5.4.24}$$

散射场角分布函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{k})$ 的这个积分表示式还可以进一步简化. 考虑到 $\boldsymbol{F}$ 相对于 $\boldsymbol{k}$ 的横向性质, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{F}=0$, (5.4.24)式被积函数方括弧中第一、三项的纵向分量之和应为零,

$$\boldsymbol{k}\cdot[-Zk(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}] = 0,$$

由此可解出

$$k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}) = Z(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{k},$$

因此,(5.4.24)式被积函数方括弧中第一、三项可合并成

$$\frac{Z}{k}\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})],$$

(5.4.24)式就可改写成较为简洁的形式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{j}}{4\pi}\boldsymbol{k}\times\oint\!\!\!\oint_S \left[\frac{Z}{k}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}) - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S'. \tag{5.4.25}$$

在(5.4.25)式中只出现 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切线分量，即等效面电流和面磁流. 在上一节中我们已在散射场角分布函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{i},\boldsymbol{k})$ 为已知的情况下证明了截面定理，并且导出了用 $\boldsymbol{F}$ 表示的各种散射截面的表达式，这里补充的(5.4.24)式或(5.4.25)式的导出则完成了对于这个问题的讨论.

3. 电场积分方程和磁场积分方程[10,11]

至此，我们仅从形式上解决了任意形状物体的散射问题，虽然我们得到了散射场角分布函数 $\boldsymbol{F}$ 的一般表达式(5.4.24)或(5.4.25)，但仅当散射场在 S 面上的分布为已知时才能由它们得到 $\boldsymbol{F}$ 的具体表达式. 散射场的积分表示式的意义在于：我们可以不必直接求散射场的空间分布，而只需求解 S 面上电磁场的分布这个相对简单的问题，这后一问题则可以通过建立关于在 S 面上电磁场分布的积分方程来解决.

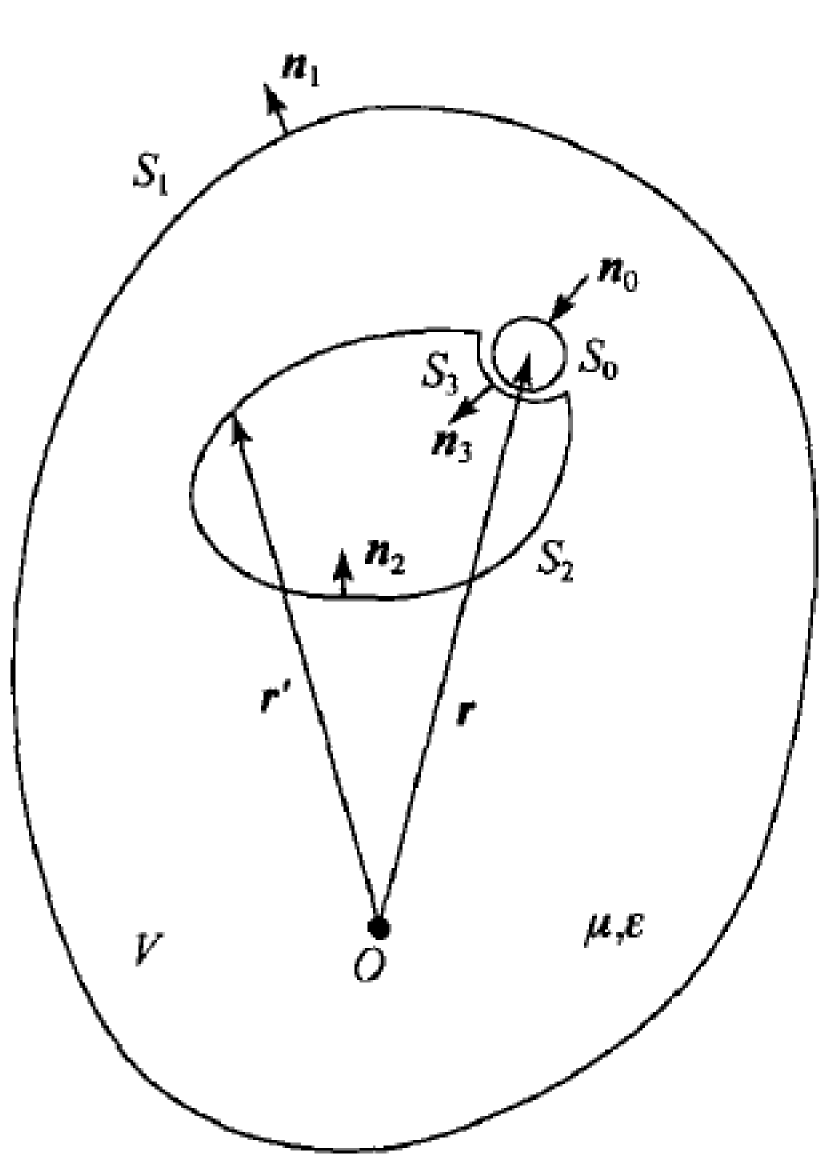


图 5.10　为导出电场和磁场积分方程，须将场点移到散射体表面

为建立 S 面上电磁场分布的积分方程须将电磁场积分表示式(5.4.14)和(5.4.15)中的场点 $\boldsymbol{r}$ 移到 S 面上来，为此我们可以从(5.4.11)式出发来导出这种情况下的电场积分表示式. 当把场点 $\boldsymbol{r}$ 从 V 中移到 S 面上时体积分中的奇异性不再发生，但 S 面上的面积分会发生奇异性，故仍须用小球面 S_0 包围 $\boldsymbol{r}$ 点，与它一起移到 S 面上. 设想由于 S_0 面使 S 面在与 S_0 面相邻接的部分发生了如图 5.10 所示的弹性形变，计算 S 面上的面积分时须将 S 面分为两部分：$S=S_2+S_3$，S_3 为与 S_0 相对应的小半球面，S_2 为 S 的其余部分. 因此，对于图 5.10 所示的情况电场的积分表示式(5.4.11)应改写作

$$\iiint_V [\cdot]\mathrm{d}V' = \left\{\oiint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \oiint_{S_0}\right\}[\cdot]\mathrm{d}S', \tag{5.4.26}$$

方括弧内的被积函数与(5.4.11)式相同，为简单起见这里不再写出. 我们来求积分

$$\boldsymbol{I} = \left\{\oiint_{S_0} + \iint_{S_3}\right\}[\cdot]\mathrm{d}S'$$

的值. 显然仍然有

$$\lim_{r'\to r} \oiint_{S_0}[\cdot]\mathrm{d}S' = 4\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).$$

再看积分 $\iint\limits_{S_3}[\cdot]\mathrm{d}S'$. 如果 S 面上的切平面是处处连续变化的，在 $\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}$ 的极限下 S_3 面可以看作是以 $\boldsymbol{r}$ 点为中心的小平面，但由于 $\boldsymbol{n}_3=-\boldsymbol{n}_0$，在 S_3 面上的面积分取负值，所以有

$$\lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\iint\limits_{S_3}[\cdot]\mathrm{d}S'=-2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),$$

于是

$$\lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\boldsymbol{I}=2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}). \tag{5.4.27}$$

将无穷小面积 S_3 中的奇异性分离出后 S 面的其余部分的积分为主值积分，(5.4.26)式就可写作

$$\iiint\limits_V[\cdot]\mathrm{d}V'=\left\{\oiint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S}\right\}[\cdot]\mathrm{d}S'+2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),$$

于是当场点在 S 面上时我们有下面的电场积分表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&-\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_V\left[\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_\mathrm{m}\times\nabla'g-\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla'g\right]\mathrm{d}V'\\&-\frac{1}{2\pi}\left\{\oiint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S}\right\}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'\ (\boldsymbol{r}\in S).\end{aligned} \tag{5.4.28}$$

相应的磁场积分表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=&\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_V\left[-\mathrm{j}\omega\varepsilon g\boldsymbol{J}_\mathrm{m}+\boldsymbol{J}\times\nabla'g+\frac{1}{\mu}\rho_\mathrm{m}\nabla'g\right]\mathrm{d}V'\\&-\frac{1}{2\pi}\left\{\oiint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S}\right\}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla'g]\mathrm{d}S'\ (\boldsymbol{r}\in S).\end{aligned} \tag{5.4.29}$$

此式将取代(5.4.15)式.

在散射问题中 V 内不存在体分布的源，因此(5.4.28)式和(5.4.29)式中的体积分为零，由(5.4.20)式 S_1 大球面上的面积分可化为入射场，这样我们就得到了适用于散射问题的关于散射体表面的电场和磁场的积分表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&2\boldsymbol{E}^\mathrm{i}(\boldsymbol{r})\\&+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S[-\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'\quad(\boldsymbol{r}\in S);\end{aligned} \tag{5.4.30}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=&2\boldsymbol{H}^\mathrm{i}(\boldsymbol{r})\\&+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla'g]\mathrm{d}S'\quad(\boldsymbol{r}\in S).\end{aligned} \tag{5.4.31}$$

在这里入射场是由无穷远处的源产生的，S 是散射体的表面，单位法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向已改为散射问题中习惯使用的由散射体向外的指向. 积分方程(5.4.30)和(5.4.31)分别称为电场积分方程(EFIE)和磁场积分方程(MFIE)，它们适用于光滑表面物体对于平面波的散射问题. 下面来分别讨论两种具体情况.

(1) 纯电导体的散射问题

所考虑的散射问题示于图 5.11，在纯电导体表面 S 上有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=0,$$

以 $\boldsymbol{n}$ 叉乘方程式(5.4.30)和(5.4.31)两侧，考虑到 S 面上电磁场所满足的上述条件便分别得到纯导体散射问题的电场积分方程和磁场积分方程

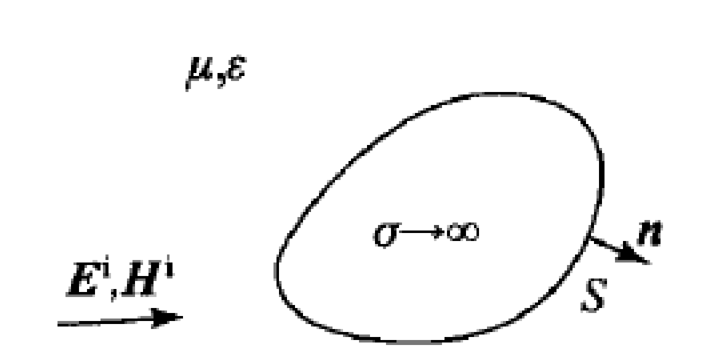


图 5.11　理想电导体的散射

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{n}\times\oiint_S[\mathrm{j}\omega\mu g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' g]\mathrm{d}S'\ (\boldsymbol{r}\in S);\tag{5.4.32a}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{i}(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{n}\times\oiint_S[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla' g]\mathrm{d}S'\ (\boldsymbol{r}\in S).\tag{5.4.32b}$$

在这两个积分方程式的面积分中均含有未知函数 $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$，这是导体面上的面电流密度分布，但在电场积分方程(5.4.32a)中尚有第二个未知函数 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}$，即导体表面的面电荷密度分布，这对于积分方程的求解是不方便的. 通过引入面散度的概念(见[11]，§6.12)，可以将 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}$ 用 $\boldsymbol{J}_s$ 表示，从而使电场积分方程(5.4.32a)的面积分中仅含有一个未知函数.

定义于曲面 S 上的矢量函数 $\boldsymbol{f}$ 的面散度为

$$\nabla_S\cdot\boldsymbol{f}=\lim_{S_C\to 0}\frac{1}{S_0}\oint_C\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l,\tag{5.4.33}$$

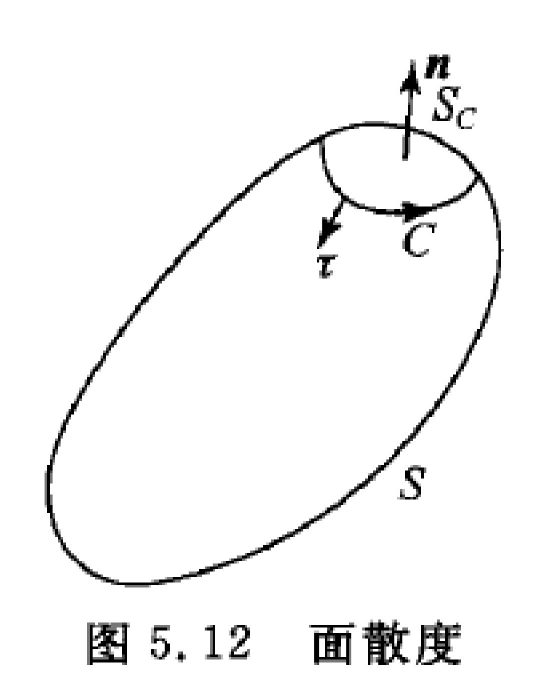


图 5.12　面散度

这里 S_C 是闭合曲线 C 在 S 面上围成的无穷小曲面，$\mathrm{d}l$ 为曲线 C 的弧长微分元，$\boldsymbol{\tau}$ 是与 S 面的单位外法线 $\boldsymbol{n}$ 及曲线 C 两者皆垂直的单位矢量，$\boldsymbol{\tau}$ 的方向指向 S_C 的外部(图5.12). 现在设 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')$，代入(5.4.33)式得

$$\nabla'_S\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})=\lim_{S_C\to 0}\frac{1}{S_C}\oint_C(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l'=-\lim_{S_C\to 0}\frac{1}{S_C}\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}',$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}l'$ 为沿曲线 C 的正环绕方向的矢量弧长元，应用 Stokes 公式得

$$\nabla_S' \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}) = -\lim_{S_C \to 0} \frac{1}{S_C} \iint_{S_C} (\boldsymbol{n} \cdot \nabla' \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}S'. \tag{5.4.34}$$

上式被积函数中的$\nabla' \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')$用 Maxwell 方程式$\nabla' \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$代入,在$S_C \to 0$的极限情况下积出积分得

$$\nabla_S' \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'),$$

由此可解出

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon} \nabla_S' \cdot [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]. \tag{5.4.35}$$

这样,纯导体散射问题的电场积分方程和磁场积分方程(5.4.32a,b)可分别写成下面的形式

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\mathrm{j}\omega\varepsilon} \boldsymbol{n} \times \oint\!\!\!\oint_S [-k^2 g \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} + (\nabla_S' \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}) \nabla' g] \mathrm{d}S' \quad (\boldsymbol{r} \in S), \tag{5.4.36a}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\pi} \boldsymbol{n} \times \oint\!\!\!\oint_S [\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \times \nabla' g] \mathrm{d}S' \quad (\boldsymbol{r} \in S), \tag{5.4.36b}$$

在这两个积分方程中导体表面的面电流密度分布$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')$是面积分中仅有的未知函数.

可以选择这两个方程之一来计算导体的散射问题.一般说来对于细柱形导体的散射问题电场积分方程是比较便于计算的方程式,而对于大尺寸的光滑表面导体的散射问题,磁场积分方程则是较便于计算的方程式.磁场积分方程(5.4.36b)的非齐次项中含有未知函数$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$,属于第二类 Fredholm 积分方程,但被积函数较简单,仅含有一项.当用矩量法求解磁场积分方程时须将S面分成N个面积元,为提高计算精度须尽可能将面积元分得小,所导致的矩阵方程式的非对角矩阵元也随之减小,而方程式左方的$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})$对应于矩阵的对角项.因此随着非对角矩阵元的减小矩阵将趋于对角化,这对于矩阵方程的数值求解(主要计算量为求逆矩阵)是有利的.电场积分方程由于非齐次项中不含未知函数而不能产生所需的对角矩阵元,随着面积元的细分和相应地非对角矩阵元的减小将使得矩阵方程的求解变得困难.所以对于大尺寸的光滑导体面的散射问题的计算选择磁场积分方程较为合适.另一方面,对于细柱形导体的散射问题导体上的面电流$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$是近轴向的,$\nabla' g$的主要分量也是近轴向的,$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$与$\nabla' g$之间的夹角很小使得$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \times \nabla' g$的计算有较大的误差,磁场积分方程面积分的被积函数仅有这样的一项,故不适合于细柱形导体散射问题的计算.在电场积分方程(5.4.36a)中被积函数虽有两项但都不是$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \times \nabla' g$类型的项,故不存在上述困难.事实上,对于细柱形导体的散射问题由电场积分方程出发在同样的近似下可以导出 Pocklington 积分方程.关于电场积分方程和磁场积分方程的数值求解过程的细

节可以参考[10,11]中给出的具体例子，这里不再予以介绍.

(2) 理想电介质的散射问题

这个问题与导体散射问题不同，现在电磁场可透入散射体内部，也就是说在散射体外的均匀介质区域Ⅰ和散射体内的区域Ⅱ中均存在电磁场(图5.13).将电磁场的积分表示式分别应用于区域Ⅰ和Ⅱ，然后应用 S 面上电磁场应满足的边界条件仍可导出电磁场的面积分方程，这里不再重复.我们在这里介绍对于介质物体散射问题较为简单的体积分方程.

区域Ⅰ, ε_1,μ_0
$\boldsymbol{n}_1$
$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}$
区域Ⅱ, ε_2,μ_0
$\boldsymbol{n}_2$
V
S

图 5.13　电介质的散射问题

为简单起见假定散射体及其外的均匀介质体的磁导率相同，均为 μ_0. 写出两个区域的 Maxwell 方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}_1,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}_1=\mathrm{j}\omega\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1\quad(\text{区域 Ⅰ}),\tag{5.4.37}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_2=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}_2,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}_2=\mathrm{j}\omega\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2\quad(\text{区域 Ⅱ}).\tag{5.4.38}$$

区域Ⅱ中磁场的旋度方程可改写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_2=\mathrm{j}\omega\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2=\mathrm{j}\omega\varepsilon_1\boldsymbol{E}_2+\mathrm{j}\omega(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\boldsymbol{E}_2=\mathrm{j}\omega\varepsilon_1\boldsymbol{E}_2+[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}.\tag{5.4.39}$$

如此改写后可以认为区域Ⅱ是和区域Ⅰ相同的介质区域，但在区域Ⅱ中存在着等效的体分布电流

$$[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}=\mathrm{j}\omega(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\boldsymbol{E}_2,\tag{5.4.40}$$

同时，由于 $[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}$ 在 S 面上不连续而存在等效面电荷分布

$$[\rho_s]_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}\cdot\boldsymbol{n}_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{n}_2.\tag{5.4.41}$$

求出了等效体电流和等效面电荷分布后可以认为 S 面内外的介质差别不再存在，对于这个等效的问题应用电场积分表示式(5.4.14)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\mathrm{j}\omega\mu_0 g[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_S\frac{1}{\varepsilon_1}[\rho_s]_{\mathrm{eq}}\,\nabla' g\,\mathrm{d}S'\\&-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S_1}[-\mathrm{j}\omega\mu_0 g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla' g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\,\nabla' g]\mathrm{d}S',\end{aligned}\tag{5.4.42}$$

这里 V 是散射体所占据的几何区域，等效体电流分布仅存在于这个区域内，而 S 是仅有等效面电荷分布的几何面.(5.4.14)式中的 Σ 面现在仅为大球面 S_1，在 S_1 上的面积分仍将给出入射电场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})$. 当把场点取在 V 内时上式左方的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 须改写为 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$. 将(5.4.40)式和(5.4.41)式给出的 $[\boldsymbol{J}]_{\mathrm{eq}}$ 和 $[\rho_s]_{\mathrm{eq}}$ 代入(5.4.42)式便得出体积分方程

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 g \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)[\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}')]\,\nabla' g\,\mathrm{d}S' \quad (\boldsymbol{r} \in V). \tag{5.4.43}$$

由这个积分方程求出 V 内的电场分布 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}')$ 后区域 Ⅰ 中的散射场即可根据(5.4.42)式通过对于等效源的积分求出：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 g \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)[\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}')]\,\nabla' g\,\mathrm{d}S'. \tag{5.4.44}$$

与面积分方程比较，对于体积分方程(5.4.43)的求解涉及体积 V 的每一内点，因此计算量将增加. 体积分方程法的优点在于它不仅适合于均匀的介质散射体，而且也适合于非均匀散射体，亦可推广应用于具有损耗的导电介质的三维散射体.

§5.5　T 矩阵方法

1. 消光定理

T 矩阵方法建立在 Huygens 原理和消光定理的基础之上. 早在 20 世纪初 Ewald(1912,1916)和 Oseen(1915)在研究晶体和各向同性介质的光学性质时就分别建立了消光定理. 当电磁波从外面(例如真空)射入一块均匀介质时会引起介质极化，介质内部某一点 $\boldsymbol{r}$ 的电极化强度 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ 由入射电场和介质中所有其他点的电极化在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的电场之和确定：

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = N\alpha\varepsilon_0(\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{d}}), \tag{5.5.1}$$

这里 N 为单位体积中的介质分子数，α 为电极化率，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 为入射电场，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{d}}$ 为介质中除 $\boldsymbol{r}$ 点外所有其余感应电偶极子在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的电场，由一个体积分来表示，积分区域为扣掉以 $\boldsymbol{r}$ 为中心的小球体后的介质体积，因此(5.5.1)是一个积分-微分方程. 方程(5.5.1)的求解看似一个困难的问题，因为 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 是以真空中光速 c 传播的波，但偶极子场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{d}}$ 须以介质中的光速 c/n 传播，n 为介质的折射率. 在求解过程中发现偶极子场解的确由两部分组成，一部分满足真空中的波动方程，经运用 Green 公式将体积分化为介质表面的面积分后精确地与入射波相消，这就是消光定理，通常被称为 Ewald-Oseen 消光定理；解的其余部分满足以 c/n 传播的波方程，由此导致介质折射率的 Lorentz-Lorenz 公式. 详细的求解过程可参考

[4]，§2.4.2. 消光定理说明被入射电磁波感应的介质偶极子场与入射波相干地对消，剩下一个以不同波速乃至方向传播的波在介质中传播.

现在从电磁波方程出发并运用 Green 公式来导出消光定理，为简单起见我们讨论标量波，推导过程主要参考[12]. 设 S 面与无穷大半径球面 S_1 之间的均匀介质区域 V_1 中的标量波 ψ_1 由局域源 $Q(r)$ 产生，波数为 k_1. S 内为无源的另一介质区称为 V_2，标量波 ψ_2 的波数为 k_2（图 5.14）. 在 V_1 和 V_2 中波函数 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_2(\boldsymbol{r})$ 分别满足波动方程

$$(\nabla^2 + k_1^2)\psi_1(\boldsymbol{r}) = Q(\boldsymbol{r}), \tag{5.5.2}$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)\psi_2(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{5.5.3}$$

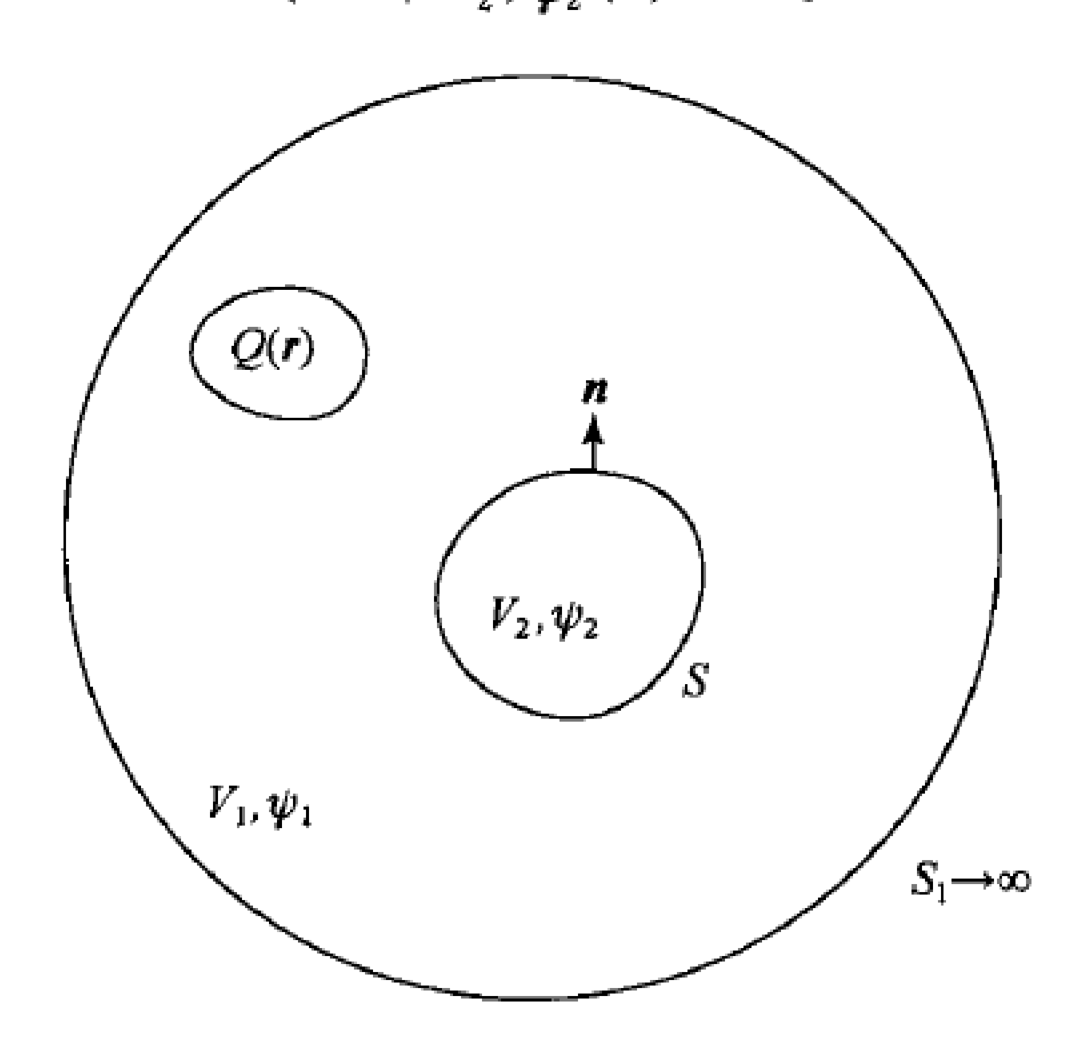


图 5.14 为导出消光定理所设置的标量波散射问题

设 Green 函数 $g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分别满足以下定义方程

$$(\nabla^2 + k_1^2)g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{5.5.4}$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{5.5.5}$$

现在对 g_1 和 g_2 没有设定边界条件，对它们的最方便的选择是相应的无界均匀介质中的三维标量 Green 函数，自然在无穷大半径的球面 S_1 上 g_1 满足辐射条件. 以 $g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 分别乘(5.5.2)和(5.5.4)式，所得的两式相减后再在 V_1 上积分，得

$$\iiint_{V_1}[g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2\psi_1(\boldsymbol{r}) - \psi_1(\boldsymbol{r})\nabla^2 g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V_1} g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')Q(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \psi_1(\boldsymbol{r}') \quad (\boldsymbol{r}' \in V_1), \tag{5.5.6}$$

因为 $g\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 g = \nabla\cdot(g\nabla\psi - \psi\nabla g)$，上式左侧的体积分可化为面积分. 右侧

的体积分只在源区进行，得到入射波：

$$\psi_i(\boldsymbol{r}') = -\iiint_{V_1} g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') Q(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V. \tag{5.5.7}$$

于是(5.5.6)式化为

$$\oiint_{S+S_1} [g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\psi_1(\boldsymbol{r}) - \psi_1(\boldsymbol{r})\nabla g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\psi_i(\boldsymbol{r}') + \psi_1(\boldsymbol{r}')$$

$$(\boldsymbol{r}' \in V_1), \tag{5.5.8}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向指向 V_1 的外部. 因为

$$g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{5.5.9}$$

满足辐射条件，(5.5.8)式左侧 S_1 上的积分为零. 在(5.5.8)式中将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 互换，同时将积分面元的法线 $\boldsymbol{n}$ 方向改为指向 V_1 内部，如图 5.14 所示，我们最终得到

$$\psi_1(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \oiint_S [\psi_1(\boldsymbol{r}')\nabla' g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla'\psi_1(\boldsymbol{r}')] \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S'$$

$$(\boldsymbol{r}' \in V_1), \tag{5.5.10}$$

(5.5.10)式表明，区域 V_1 内的波 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 由入射波 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 和 S 面发出的次波之和构成，在入射波作用下 S 面上的感应场通过 ψ_1 和 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\psi_1$ 构成次波源，这个表示式可视为 Huygens 原理的数学表达.

若重复导致(5.5.6)式的步骤，但 $\boldsymbol{r}'$ 不在 V_1 中，而在 V_2 内，则对 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\psi_1(\boldsymbol{r})$ 的积分为零，而导致

$$\psi_i(\boldsymbol{r}) + \oiint_S [\psi_1(\boldsymbol{r}')\nabla' g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla'\psi_1(\boldsymbol{r}')] \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S' = 0$$

$$(\boldsymbol{r} \in V_2), \tag{5.5.11}$$

此式说明在入射波作用下于 S 面上形成的二次源产生的波在 S 内部的区域 V_2 中与入射波精确地对消，这就是消光定理的数学表达式.

2. T 矩阵方法[13]

Waterman 首先运用消光定理形成 T 矩阵方法，以计算声波和电磁波的散射①，为说明 T 矩阵方法的基本概念，这里我们仍只讨论标量波的二维散射问题. 设 S 为形状任意的二维理想导体散射体的边界，S_i 为 S 的内接圆，其内的区域称为区域Ⅱ，S_i 和 S 之间称为区域Ⅱ′. S_e 为 S 的外接圆，其外为区域Ⅰ，S_e 与 S 之间为区域Ⅰ′(图 5.15). S_i 和 S_e 仅为几何边界，S 以外的均匀介质区设为真

① P. C. Waterman, New formulation of acoustic scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 45, p. 1417, 1969.

空. 在区域Ⅰ中有波 $\psi_i(\boldsymbol{\rho})$ 设射到 S 上，求散射波. 在下面我们会看到，S_i 和 S_e 为内接或外接并不必要，只须分别完全在 S 内或外且同心即可.

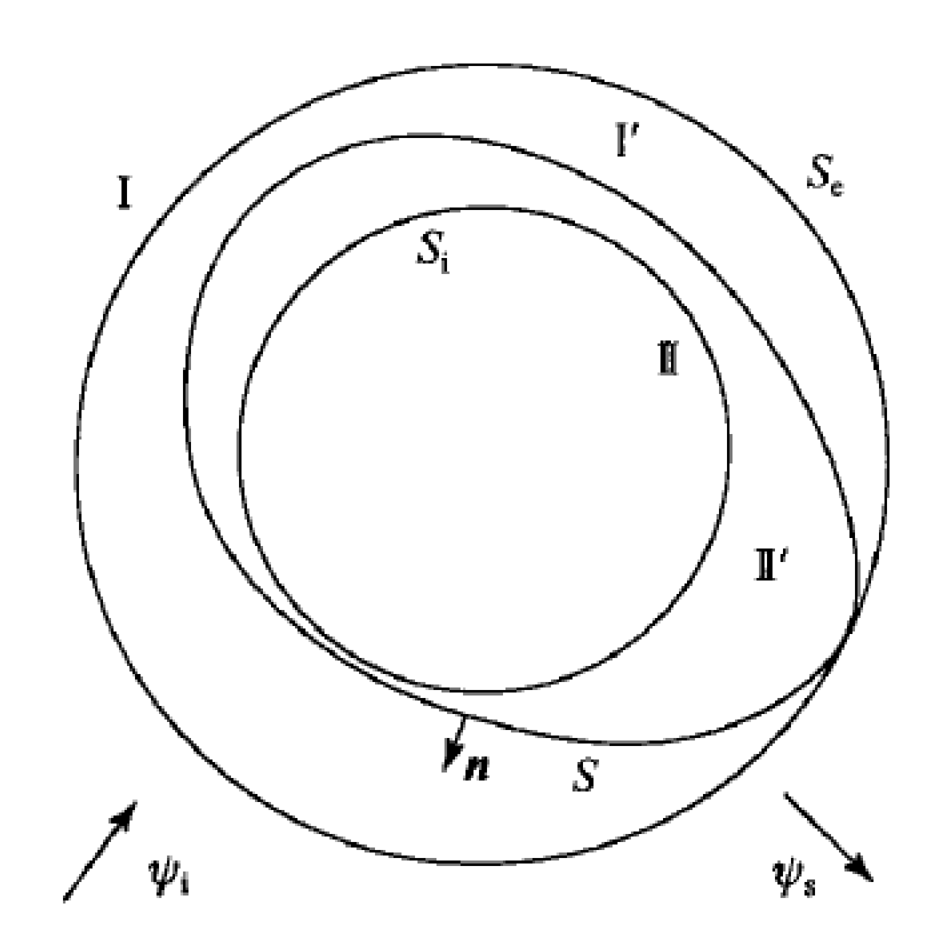


图 5.15　用 T 矩阵方法求解二维标量波的散射问题

入射波 ψ_i 设为沿 ϕ_i 角入射的平面波，可以将它展开为柱谐函数的级数：

$$\psi_i(\boldsymbol{\rho}) = \exp[-\mathrm{j}k_0(\phi-\phi_i)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \mathrm{J}_n(k_0\rho)\exp(\mathrm{j}n\phi). \tag{5.5.12}$$

现在，展开式的系数 a_n 为已知，利用 Bessel 函数的生成函数公式(5.1.8)不难求出

$$a_n = \exp\left[-\mathrm{j}n\left(\phi_i+\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{5.5.13}$$

区域Ⅰ中的散射波也用柱谐函数展开：

$$\psi_s(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \mathrm{H}_n^{(2)}(k_0\rho)\exp(\mathrm{j}n\phi), \tag{5.5.14}$$

但现在展开式系数 b_n 为未知，若能求出 b_n 问题便告解决.

为求出 b_n 需要使用消光定理，但现在它不是用于 S 内的所有区域，仅应用于圆 S_i 内的区域Ⅱ，我们有

$$\psi_i(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{S_i}[\psi(\boldsymbol{\rho}')\,\nabla' g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') - g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\,\nabla'\psi(\boldsymbol{\rho})]\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S' = 0$$

$$(\boldsymbol{\rho}\in \text{区域 Ⅱ}). \tag{5.5.15}$$

对于区域Ⅱ，$|\boldsymbol{\rho}|<|\boldsymbol{\rho}'|$，利用柱谐函数的加法公式[①]可以将柱坐标系中的二维标量 Green 函数展开为

① 见，例如，郭敦仁，《数学物理方法》，§17.5，高等教育出版社，1965；或[12]，(3.3.2)式.

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = -\frac{j}{4}H_n^{(2)}(k_0|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$$
$$= -\frac{j}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(k_0\rho)H_n^{(2)}(k_0\rho')\exp[j_n(\phi-\phi_i)] \quad (|\boldsymbol{\rho}|<|\boldsymbol{\rho}'|). \tag{5.5.16}$$

将(5.5.12)和(5.5.16)式代入(5.5.15)式，因为(5.5.15)式左侧的两项均为 $J_n(k_0\rho)\exp(jn\phi)$ 的级数式，而 $J_n(k_0\rho)\exp(jn\phi)$ 是正交函数，(5.5.15)式左侧两项之和为零要求级数式对应项之和的系数为零，由此得

$$a_n = \frac{j}{4}\oint\!\!\!\oint_{S_i}\left\{\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial}{\partial n'}[H_n^{(2)}(k_0\rho')\exp(-jn\phi_i)] - \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}H_n^{(2)}(k_0\rho')\exp(-jn\phi_i)\right\}dS'. \tag{5.5.17}$$

上式中的面积分为消光定理(5.5.15)式中由入射波产生的表面二次源，它由波动方程的规则解构成，但现在是在 S_i 面上. 可通过解析延拓将这个解扩展至 S 面.

在区域Ⅰ中，因为(5.5.10)式左侧的 ψ_1 由 ψ_i 与 ψ_s 之和构成，消去等式两侧的 ψ_i 得

$$\psi_s(\boldsymbol{\rho}) = \oint\!\!\!\oint_{S_e}\left[\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\right]dS' \quad (\boldsymbol{\rho}\in \text{区域Ⅰ}). \tag{5.5.18}$$

现在 $|\boldsymbol{\rho}|>|\boldsymbol{\rho}'|$，$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ 须展开为

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = -\frac{j}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(k_0\rho')H_n^{(2)}(k_0\rho)\exp[jn(\phi-\phi_i)] \quad (|\boldsymbol{\rho}|>|\boldsymbol{\rho}'|). \tag{5.5.19}$$

(5.5.14)和(5.5.19)式代入(5.5.18)式，由于 $H_n^{(2)}(k_0\rho)\exp(jn\phi)$ 的正交性导致

$$b_n = -\frac{j}{4}\oint\!\!\!\oint_{S_e}\left\{\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial}{\partial n'}[J_n(k_0\rho')\exp(-jn\phi_i)] - \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}J_n(k_0\rho')\exp(-jn\phi_i)\right\}dS'. \tag{5.5.20}$$

同样，上式中的 S_e 面可通过解析延拓扩展至 S 面. 至此，已知系数和未知系数都和 S 面上的表面场建立了联系，原则上便可通过表面场由 a_n 求出 b_n. 到此我们也可领悟到将 S 向内外扩展到 S_i 和 S_e 的作用，若区域Ⅱ和Ⅰ不是由圆 S_i 和 S_e 界定，便不能使用展开式(5.5.16)和(5.5.19).

T 矩阵方法的巧妙之处并不到此为止，进一步利用 S 面上的边界条件并引入 T 矩阵可以消去(5.5.17)和(5.5.20)式中的表面场，只需通过 T 矩阵便可由 a_n 求得 b_n. 如何引入 T 矩阵，我们来看 E 型波在理想导体表面的散射问题，此时

ψ表示E_z，在S面上应满足边界条件$\psi=0$. 如此，(5.5.17)和(5.5.20)式便简化为

$$a_n=-\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\mathrm{H}_n^{(2)}(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})\mathrm{d}S', \tag{5.5.21a}$$

$$b_n=\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\mathrm{J}_n(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})\mathrm{d}S', \tag{5.5.21b}$$

但这里的$\partial\psi/\partial n'$是未知的，可以将它展开为完全函数族的级数，例如

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{J}_n(k_0\rho')\exp(\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})], \tag{5.5.22}$$

α_n为未知系数. 上式代入(5.5.21a,b)式得

$$[a]=[Q^-][\alpha],\quad [b]=-[Q^+][\alpha], \tag{5.5.23}$$

这里$[a]$,$[b]$,$[\alpha]$均为列矩阵，$[Q^{\mp}]$为方阵，其矩阵元

$$Q^-_{mn}=-\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S\psi_m\psi'_n\mathrm{d}S',\quad Q^+_{mn}=-\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S\psi_{rm}\psi'_n\mathrm{d}S', \tag{5.5.24}$$

其中

$$\psi_m=\mathrm{H}_m^{(2)}(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}m\phi_{\mathrm{i}}),\quad \psi_{rm}=\mathrm{J}_m(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}m\phi_{\mathrm{i}}),$$

$$\psi'_n=\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{J}_n(k_0\rho')\exp(\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})].$$

在(5.5.23)式中消去$[\alpha]$，最终得

$$[b]=[T][a], \tag{5.5.25}$$

此处

$$[T]=-[Q^+][Q^-]^{-1} \tag{5.5.26}$$

称为过渡矩阵(transition matrix，T 矩阵). 因此，这个散射问题便化为求 T 矩阵，自然在作数值计算时须截断，只计算有限个矩阵元.

对于 H 型入射波，ψ表示H_z，在S面上应满足$\partial\psi/\partial n'=0$. 应用此边界条件于(5.5.17)和(5.5.20)式得

$$a_n=\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S\psi(\rho')\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{H}_n^{(2)}(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})]\mathrm{d}S', \tag{5.5.27a}$$

$$b_n=\frac{\mathrm{j}}{4}\oint\!\!\!\oint_S\psi(\rho')\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{J}_n(k_0\rho')\exp(-\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}})]\mathrm{d}S'. \tag{5.5.27b}$$

将展开式

$$\psi(\rho')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{J}_n(k_0\rho')\exp(\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}}) \tag{5.5.28}$$

代入(5.5.27a,b)式便得

$$[a]=[Q^-][\alpha],\ [b]=-[Q^+][\alpha]=[T][a], \tag{5.5.29}$$

T 矩阵

$$[T]=-[Q^{+}][Q^{-}]^{-1} \tag{5.5.26a}$$

的矩阵元

$$Q_{mn}^{-}=\frac{\mathrm{j}}{4}\oiint_{S}\psi_{m}'\psi_{n}\mathrm{d}S',\quad Q_{mn}^{+}=\frac{\mathrm{j}}{4}\oiint_{S}\psi_{rm}'\ \psi_{n}\mathrm{d}S', \tag{5.5.30}$$

这里

$$\psi_{m}'=\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{H}_{m}^{(2)}(k_{0}\rho')\exp(-\mathrm{j}m\phi_{\mathrm{i}})]=\frac{\partial}{\partial n'}\psi_{m},$$

$$\psi_{rm}'=\frac{\partial}{\partial n'}[\mathrm{J}_{m}(k_{0}\rho')\exp(-\mathrm{j}m\phi_{\mathrm{i}})]=\frac{\partial}{\partial n'}\psi_{rm},$$

$$\psi_{n}=\mathrm{J}_{n}(k_{0}\rho')\exp(\mathrm{j}n\phi_{\mathrm{i}}).$$

以上就二维标量波在导体上散射导出该问题的 T 矩阵的过程有两点值得注意.一是将边界 S 扩散至圆形边界 S_{i} 和 S_{e},使积分方程的求解得以简化,因此 T 矩阵方法又称为扩展边界条件法(extended-boundary-condition method, EBC 方法).而首先只在散射面 S 内的部分零场区域Ⅱ建立积分方程,由此导致这种方法的另一名称:零场法(null-field method).这两者均依赖于消光定理.现在,T 矩阵方法的应用已扩展至更宽的散射问题,包括介质体的散射,多个散射体和多层结构的散射,以及周期结构的散射等,参考文献[12]和[13]对此有进一步的论述.T 矩阵方法的计算结果也已获得实验测量的证实.

§5.6 Babinet 原理.平面孔的散射及传输

1. Babinet 原理[14]

Babinet 原理原是光学中关于完全吸收的衍射屏与它的补盘之间的衍射场及衍射图形的关系.在光学中所关心的是光强度的分布,完全不涉及场的矢量性质,同时光学中的完全吸收屏的模型在电磁学中并不存在,故光学中标量形式的 Babinet 原理不能直接应用于电磁学.从电磁学的基本规律出发建立适用于理想电导体屏的矢量形式的 Babinet 原理的工作首先是由英国学者 Booker 完成的①.Booker 在导出矢量形式的 Babinet 原理的同时还建立了导电屏上的狭长缝隙与带状偶极子天线的辐射场及阻抗之间的重要关系,这些关系式现在通称为 Babinet 原理的推广(extension of Babinet's principle).这些问题将是本节要讨论的主要内容.我们先来导出矢量形式的 Babinet 原理,这里所使用的方法基

① H. G. Booker, Slot aerials and their relation to complementary wire aerials (Babinet principle), *J. I. E. E*, ⅢA, pp. 620—626, 1946.

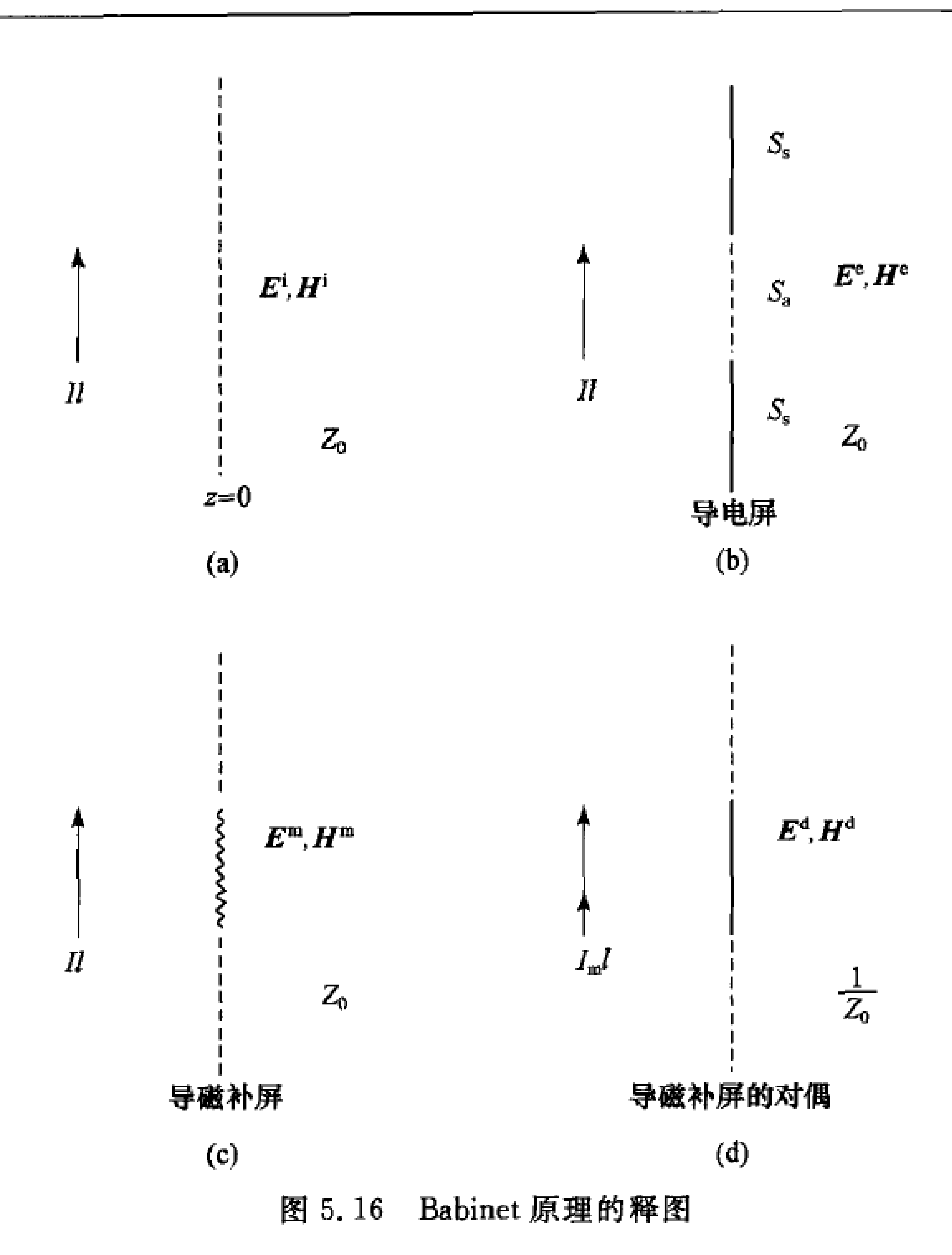


图 5.16　Babinet 原理的释图

本上是根据[14]. 设 $z=0$ 平面为一无穷大完全导电薄屏，屏上开有形状任意的孔，孔区的面积用 S_a 表示，屏的其余部分的导体面积用 S_s 表示(图 5.16(b)). 为简单起见假设屏的两侧均为自由空间，在 $z<0$ 半空间中存在着由电流源 Il 产生的入射电磁场. 当导电屏不存在时 $z>0$ 半空间中的电磁场为入射波的场 $\boldsymbol{E}^i,\boldsymbol{H}^i$(图 5.16(a))，当导电屏存在时通过孔透入 $z>0$ 半空间的场设为 $\boldsymbol{E}^e,\boldsymbol{H}^e$(图 5.16(b)). 此时，在 $z=0$ 平面上场应该满足的边界条件是

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^e &= 0 \qquad (\text{在 } S_s \text{ 上}), \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^e &= \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i \quad (\text{在 } S_a \text{ 上}), \end{aligned}\right\} \tag{5.6.1}$$

这里 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_z$ 为屏的正方向单位法线矢量. 上式中在理想导电屏 S_s 上电场切线分量为零的边界条件是显然的，关于在孔平面 S_a 上磁场切线分量所满足的边界条件可从如下的分析得出. 现在，在 $z>0$ 区域的电磁场 $\boldsymbol{E}^e,\boldsymbol{H}^e$ 是入射波的电磁场与导电屏上的感应面电流产生的场之和，但在平面导电屏上的面电流不会在与

它处于同一平面的孔平面 S_a 上产生切向磁场(§4.1 的计算表明,电流元产生的磁场总是垂直于电流元和由电流元引向场点的矢径所构成的平面),因此孔平面上的切向磁场 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^e$ 需要等于入射波的切向磁场 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i$.

现在假设同样的入射场照射于占有 S_a 面积的理想磁导体薄盘,而 S_s 面为此磁导体盘的"孔"区,也就是说当磁盘与导电屏相加时刚好可填满整个 $z=0$ 平面,既无重叠区也无空白区,屏与盘之间的这种关系称为互补. 导电屏是磁盘的补屏(complementary screen),磁盘则称为导电屏的补盘. 设磁盘问题中 $z>0$ 半空间的场为 $\boldsymbol{E}^m,\boldsymbol{H}^m$(图 5.16(c)),根据与导电屏问题中所陈述的相同理由磁盘问题中场在 $z=0$ 平面上应满足下列边界条件:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^m=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^i \quad (\text{在 } S_s \text{ 上}),\\ &\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^m=0 \qquad\quad\; (\text{在 } S_a \text{ 上}). \end{aligned}\right\} \tag{5.6.2}$$

将 e 场与 m 场叠加,相应的边界条件也叠加,我们得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}^e+\boldsymbol{E}^m)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^i \quad (\text{在 } S_s \text{ 上}),\\ &\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}^e+\boldsymbol{H}^m)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i \quad (\text{在 } S_a \text{ 上}). \end{aligned}\right\} \tag{5.6.3}$$

(5.6.3)式表明 $z>0$ 区域的 e+m 场在 $z=0$ 平面的 S_s 区域与入射场有相同的切线电场分量,而在剩余的 S_a 区域 e+m 场与入射场有相同的切线分量磁场,根据唯一性定理(见§1.3)可以得到结论:在整个 $z>0$ 区域中 e+m 场与入射场相等,

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E}^e+\boldsymbol{E}^m=\boldsymbol{E}^i,\\ &\boldsymbol{H}^e+\boldsymbol{H}^m=\boldsymbol{H}^i \end{aligned}\quad (z>0),\right\} \tag{5.6.4}$$

这也正是光学中 Babinet 原理所表述的内容. 光学中的 Babinet 原理可表述为有开孔的完全吸收屏后的场加上与其相补的盘形结构后面的场与两个屏都不存在时的场相等,但在电磁理论中为导出(5.6.4)形式的 Babinet 原理而不得不使用并非真实物理存在的磁盘概念.

为得到 Babinet 原理的适合于实际应用的形式还需要借助于对偶原理将磁盘换成导电盘,相应地 $z<0$ 半空间中的电流源 Il 换成磁流源 $I_m l$,而且由于介质常数 μ_0,ε_0 的互换两侧空间中介质的波阻抗变为 $1/Z_0$,如此得到的磁盘问题的对偶示于图 5.16(d). 若令磁盘的对偶问题中 $z>0$ 半空间中的电磁场为 $\boldsymbol{E}^d$, $\boldsymbol{H}^d$,由对偶关系则有

$$\boldsymbol{E}^m=\boldsymbol{H}^d,\ \boldsymbol{H}^m=-\boldsymbol{E}^d, \tag{5.6.5}$$

然后再把图 5.16(d)中的介质换成波阻抗为 Z_0 的介质,导磁盘的对偶问题就变成为自由空间中薄导电盘对于磁流源产生的入射波的散射问题. 如果仍用 $\boldsymbol{E}^d$,

$\boldsymbol{H}^{d}$ 表示这种情况下 $z>0$ 半空间中的电磁场,则有

$$\boldsymbol{E}^{m}=Z_0\boldsymbol{H}^{d},\ \boldsymbol{H}^{m}=-\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}^{d}. \tag{5.6.6}$$

(5.6.6)式代入(5.6.4)式便得到我们所需要的矢量形式的 Babinet 原理:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{e}+Z_0\boldsymbol{H}^{d}&=\boldsymbol{E}^{i},\\ \boldsymbol{H}^{e}-\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}^{d}&=\boldsymbol{H}^{i}\end{aligned}\ (z>0),\right\} \tag{5.6.7}$$

这里 $\boldsymbol{E}^{e}$,$\boldsymbol{H}^{e}$ 表示电流源激励的导电屏问题中 $z>0$ 半空间中的电磁场,$\boldsymbol{E}^{d}$,$\boldsymbol{H}^{d}$ 为同一介质中磁流源激励的导电补盘问题中 $z>0$ 半空间中的电磁场.实际上 e 问题和 d 问题中 $z<0$ 半空间中的源只需保持互为对偶关系,而不必限制是何种类型的源,Babinet 原理所建立的孔问题与其补盘问题之间的关系使得其中的一个问题的解可由另一问题的解给出,现在来举例说明.

【例】 平面导电屏上圆孔的前向散射.

欲求解的问题是无穷大的平面导电屏上的圆孔对于左方($z<0$ 半空间)来的入射波 $\boldsymbol{E}^{i}$,$\boldsymbol{H}^{i}$ 的散射问题,本问题关心的只是 $z>0$ 半空间中的散射场(图 5.17(a)),$z>0$ 半空间中的电磁场可以写作

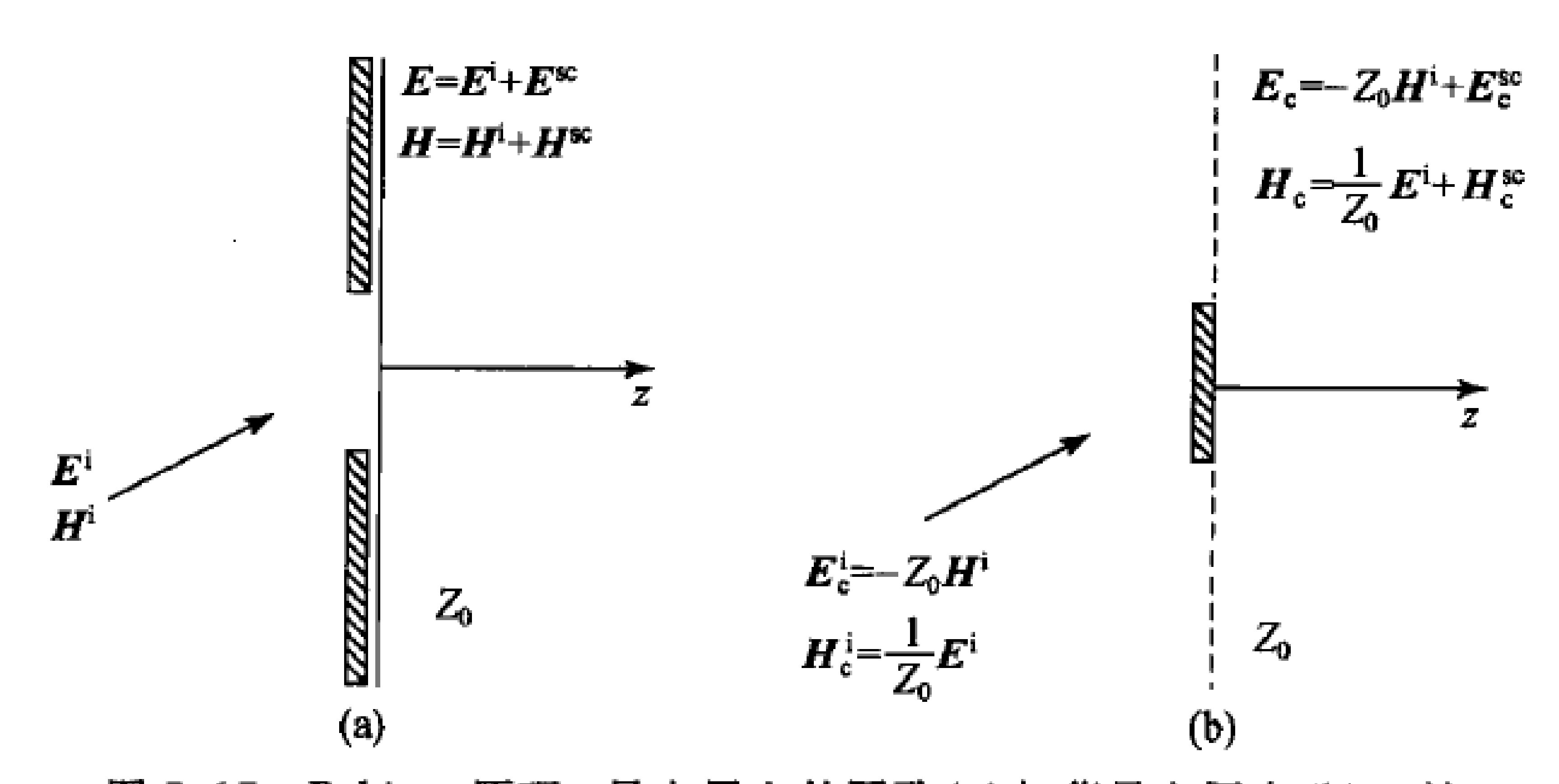


图 5.17 Babinet 原理:导电屏上的圆孔(a)与薄导电圆盘(b)互补

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{i}+\boldsymbol{E}^{sc},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{i}+\boldsymbol{H}^{sc}\quad (z>0), \tag{5.6.8}$$

这里 $\boldsymbol{E}^{i}$,$\boldsymbol{H}^{i}$ 是当导电屏不存在时 $z>0$ 半空间中的入射场,$\boldsymbol{E}^{sc}$,$\boldsymbol{H}^{sc}$是屏上的感应电流产生的散射场.精确地求解这个问题中的前向散射场 $\boldsymbol{E}^{sc}$,$\boldsymbol{H}^{sc}$是个相当困难的问题,通过应用 Babinet 原理这个问题可以用圆盘散射问题的已有精确解给出.

为应用 Babinet 原理须先作出对偶源激励下的薄导电圆盘的散射问题(图 5.17(b)),对偶源产生的入射场为

$$\boldsymbol{E}_c^{i}=-Z_0\boldsymbol{H}^{i},\ \boldsymbol{H}_c^{i}=\frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}^{i}, \tag{5.6.9}$$

这里用脚标 c 表示圆盘问题中的场. 圆盘问题中 $z>0$ 半空间的场仍可写作入射场与散射场之和,考虑到(5.6.9)式则有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_c &= \boldsymbol{E}_c^i + \boldsymbol{E}_c^{sc} = -Z_0\boldsymbol{H}^i + \boldsymbol{E}_c^{sc}, \\ \boldsymbol{H}_c &= \boldsymbol{H}_c^i + \boldsymbol{H}_c^{sc} = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{H}_c^{sc} \end{aligned}\right\} \quad (z>0). \tag{5.6.8a}$$

以(5.6.8)式代入 Babinet 原理(5.6.7)式中的 e 场,(5.6.8a)式代入 d 场可得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{sc} + Z_0\boldsymbol{H}_c^{sc} &= -\boldsymbol{E}^i, \\ \boldsymbol{H}^{sc} - \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}_c^{sc} &= -\boldsymbol{H}^i \end{aligned}\right\} \quad (z>0), \tag{5.6.10}$$

这里 $\boldsymbol{E}^i,\boldsymbol{H}^i$ 为圆孔问题中的入射场,$\boldsymbol{E}^{sc},\boldsymbol{H}^{sc}$ 为圆孔问题中的散射场,$\boldsymbol{E}_c^{sc},\boldsymbol{H}_c^{sc}$ 为圆盘问题中在对偶源激励下的散射场. 于是孔问题中的前向散射场可以表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{sc} &= -Z_0\boldsymbol{H}_c^{sc} - \boldsymbol{E}^i, \\ \boldsymbol{H}^{sc} &= \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}_c^{sc} - \boldsymbol{H}^i \end{aligned}\right\} \quad (z>0). \tag{5.6.11}$$

薄导电圆盘的散射问题可以利用分离变数法精确求解见[2], § 9.17. 利用这个精确解可以比较平面导电屏上圆孔前向散射(即衍射)问题的各种近似解. 但对于非圆形的导体薄盘的散射问题一般不可能得到分离变数法解,这时对于孔问题所发展的各种近似方法(见 § 6.1)则反过来有助于导体薄盘的前向散射问题的求解.

在光学问题中入射波通常是截面很细的波束,在 $z>0$ 半空间中离开入射波的方向上可以认为 $\boldsymbol{E}^i=\boldsymbol{H}^i=0$,由(5.6.11)式便得到简单的关系

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{sc} &= -Z_0\boldsymbol{H}_c^{sc}, \\ \boldsymbol{H}^{sc} &= \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}_c^{sc} \end{aligned}\right\} \quad (z>0), \tag{5.6.12}$$

这表明衍射屏与它的补盘产生的衍射图形相同,这也正是光学中标量形式的 Babinet 原理所给出的结果. 但矢量公式揭示了更多的内容,比较(5.6.12)式和(5.6.9)式可知在补盘问题中散射场的极化方向与补盘问题的激励源一样也旋转了 90°.

2. 隙缝天线及其阻抗[15]

矢量形式的 Babinet 原理在应用于分析平面导电屏上的狭长隙缝的辐射问题的过程中得到了进一步的发展. 例如,当平面导电屏上的宽度 w 远小于其长度 l 的狭长隙缝(图 5.18(a))被从 $z<0$ 半空间中电场方向垂直于长边的入射波照射时,狭缝在 $z>0$ 半空间中的辐射场可依据(5.6.11)式由被电场方向平行于长边的入射波照射的扁平导体带(图 5.18(b))在 $z>0$ 半空间的辐射场求出. 纵向电场将在导体带上感应沿 y 方向的电流,所以导体带与流有轴向电流的柱形

导体相似，为一电偶极子. 被横向电场激励的平面导电屏上的狭长隙缝将在$z>0$半空间中产生与电偶极子相似的辐射场，但极化方向旋转了$90°$，相当于一磁偶极子. 特别重要的是l等于半波长的狭缝，当通过两个长边的中点用双线传输线或同轴电缆激励时，激励的横向场(x方向)沿狭缝的长边会形成正弦形的谐振分布，其辐射特性相当于半波磁偶极子而称为半波隙缝天线. 半波隙缝天线是高速飞行物体，例如飞机和飞船，所使用的主要类型天线，通常是做成机身或机翼上的开缝而兼作通风窗口，这种埋藏于机身中的天线结构不会对飞行器的高速飞行产生拖拽作用. 半波谐振隙缝天线的互补结构是中间有无穷小馈电隙缝的薄导体带半波电偶极子，通过双线传输线或同轴电缆对于偶极子的两个单极馈电.

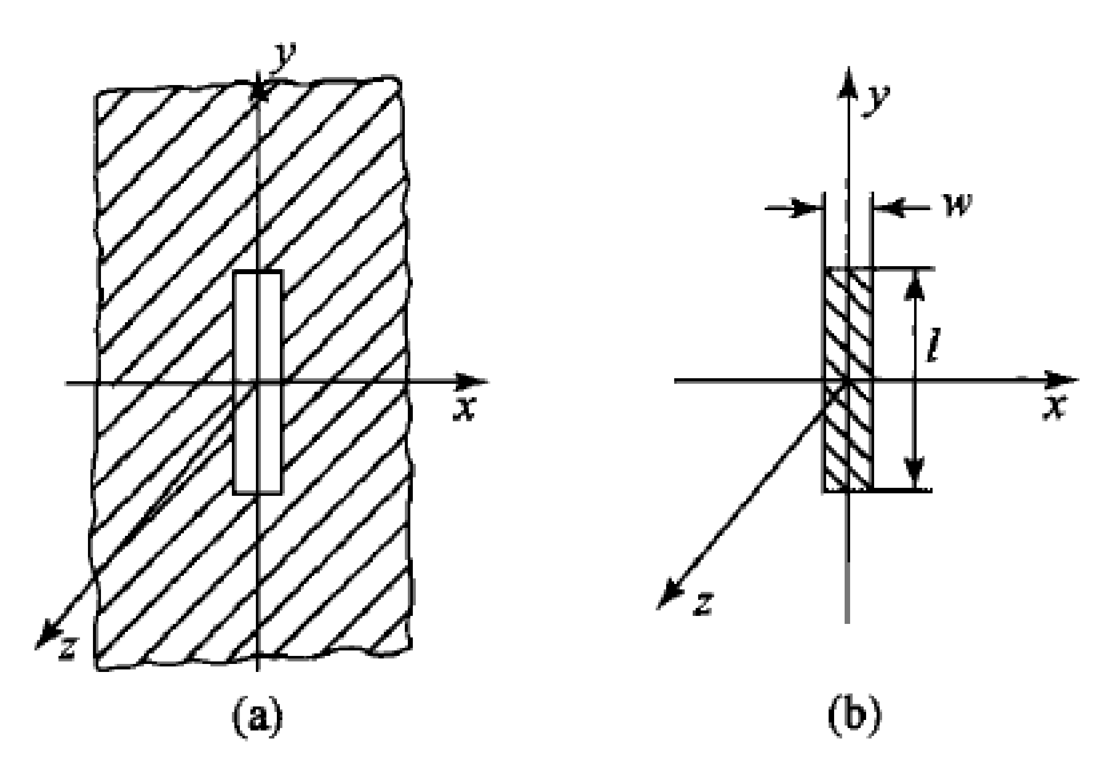


图 5.18　Babinet 原理：隙缝天线(a)与扁平导体带天线(b)互补

在图 5.19 中我们将中心馈电的隙缝天线和薄导体带偶极子的馈电系统改换成理想的电压发生器，利用这个模型来导出这两种天线的输入阻抗之间的关系. 我们先来求电偶极子的阻抗. 馈电隙之间的电压由沿图 5.19(b)中弧线abc的电场积分求出为

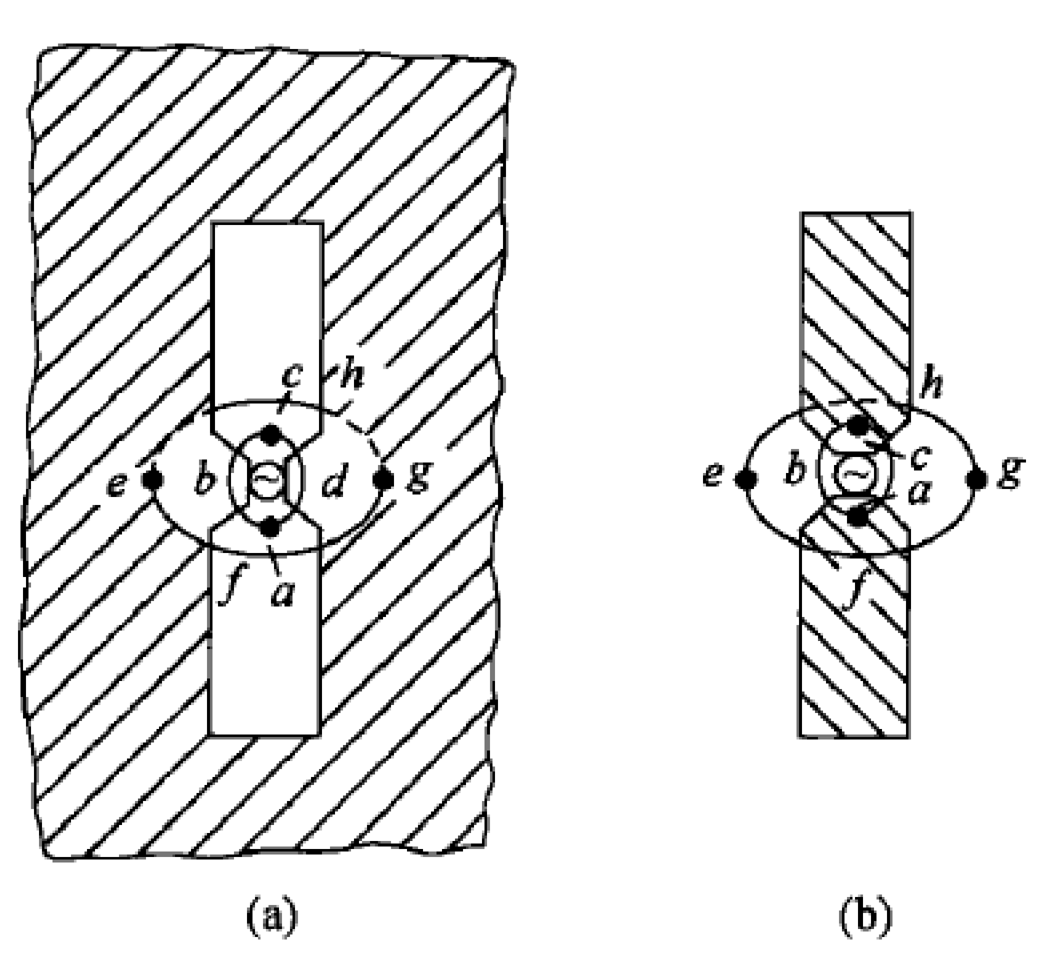


图 5.19　(5.6.15)式导出过程中使用的积分路径

$$V = -\int_{abc} \boldsymbol{E}_d \cdot d\boldsymbol{l},$$

馈入偶极子输入端的电流则由沿图中的闭合路径 $efghe$ 的磁场积分给出,

$$I = \oint_{efghe} \boldsymbol{H}_d \cdot d\boldsymbol{l} = 2\int_{efg} \boldsymbol{H}_d \cdot d\boldsymbol{l},$$

这里 $\boldsymbol{E}_d,\boldsymbol{H}_d$ 分别表示电偶极子问题中的电磁场. 因此,电偶极子的输入阻抗为

$$Z_d = \frac{V}{I} = -\frac{\int_{abc} \boldsymbol{E}_d \cdot d\boldsymbol{l}}{2\int_{efg} \boldsymbol{H}_d \cdot d\boldsymbol{l}}. \tag{5.6.13}$$

类似地,由图 5.19(a)可求出隙缝天线的激励电压和电流

$$V = -\int_{efg} \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{l},$$

$$I = -\oint_{abcda} \boldsymbol{H}_s \cdot d\boldsymbol{l} = -2\int_{abc} \boldsymbol{H}_s \cdot d\boldsymbol{l},$$

这里 $\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{H}_s$ 分别为隙缝问题中的电磁场,由此求出隙缝天线的阻抗为

$$Z_s = \frac{V}{I} = \frac{\int_{efg} \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{l}}{2\int_{abc} \boldsymbol{H}_s \cdot d\boldsymbol{l}}. \tag{5.6.14}$$

由(5.6.13)式和(5.6.14)式,隙缝天线和电偶极子天线的输入阻抗乘积为

$$Z_s Z_d = -\frac{\int_{efg} \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{l}}{2\int_{abc} \boldsymbol{H}_s \cdot d\boldsymbol{l}} \frac{\int_{abc} \boldsymbol{E}_d \cdot d\boldsymbol{l}}{2\int_{efg} \boldsymbol{H}_d \cdot d\boldsymbol{l}}. \tag{5.6.15}$$

由于 Babinet 原理所依据的只是电磁场的基本定律,所以在孔与其补盘问题中导出的(5.6.11)式不仅适用于远区散射场,而且也适用于近区场. 已假定在图 5.19(a),(b)中天线的激励源为理想电压发生器,它所产生的场仅局限于馈电隙中,而(5.6.15)式中的积分路径 abc 和 efg 均在馈电隙外,在这些积分路径上 $\boldsymbol{E}^i=\boldsymbol{H}^i=0$. 因此,(5.6.15)式路径积分中的 $\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{H}_s$ 可以用(5.6.12)式的 $\boldsymbol{E}^{sc}$ 和 $\boldsymbol{H}^{sc}$ 代入,同时 $\boldsymbol{E}_d$ 和 $\boldsymbol{H}_d$ 则分别为 $\boldsymbol{E}_c^{sc}$ 和 $\boldsymbol{H}_c^{sc}$. 如此代换之后由(5.6.15)式便得到隙缝天线和与它互补的带状偶极子天线输入阻抗之间的简单关系

$$Z_s Z_d = \frac{1}{4} Z_0^2, \tag{5.6.16}$$

这里 Z_0 是天线两侧自由空间的波阻抗,$Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=377\ \Omega$. 阻抗关系式(5.6.16)和场的关系式(5.6.7)统称为 Babinet 原理的 Booker 推广.

阻抗关系式(5.6.16)可以说是天线理论中最重要的关系式之一,它使得关于柱形偶极子天线输入阻抗所发展的深入研究的结果(见第四章)可以整个地移

到隙缝天线问题中. 例如, 我们已经知道细柱形半波电偶极子的输入阻抗为 $Z_d=(73+j43)\ \Omega$, 当 $w\ll l$ 时薄导体带半波电偶极子上的电流分布仍为正弦分布, 但输入阻抗值与带的厚度有关, 与柱形偶极子的值略有不同, 大约为 65 Ω. 这个值代入(5.6.16)式可求出长、宽分别为 l 和 w 的半波隙缝天线的输入阻抗 $Z_s=547\ \Omega$. 隙缝天线的重要用途是作为阵元构成由波导馈电的半波隙缝阵天线, 关于隙缝天线阻抗的知识将有助于隙缝阵天线的设计.

另一方面, 由(5.6.16)式的导出过程我们知道阻抗关系(5.6.16)式与隙缝的形状无关, 由此可以导致频率无关天线(frequency independent antennas)的重要概念①. 如果平面导体片上的开口的形状与它的互补导体片的形状及大小完全相同而使这两个结构可以重合, 这样的平面导体片称为自互补平面片, 从而有 $Z_s=Z_d$. 由(5.6.16)式可求出它的输入阻抗

$$Z_d=\left[\frac{1}{4}Z_0^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx 189\ \Omega, \tag{5.6.17}$$

因此天线的输入阻抗与频率无关. 这样的天线可以工作于极宽的工作频带, 称为频率无关天线. 图 5.20(a)为自互补平面片结构的一种示例, 图 5.20(b)示出的这种自互补平面片结构称为平面等角螺线天线.

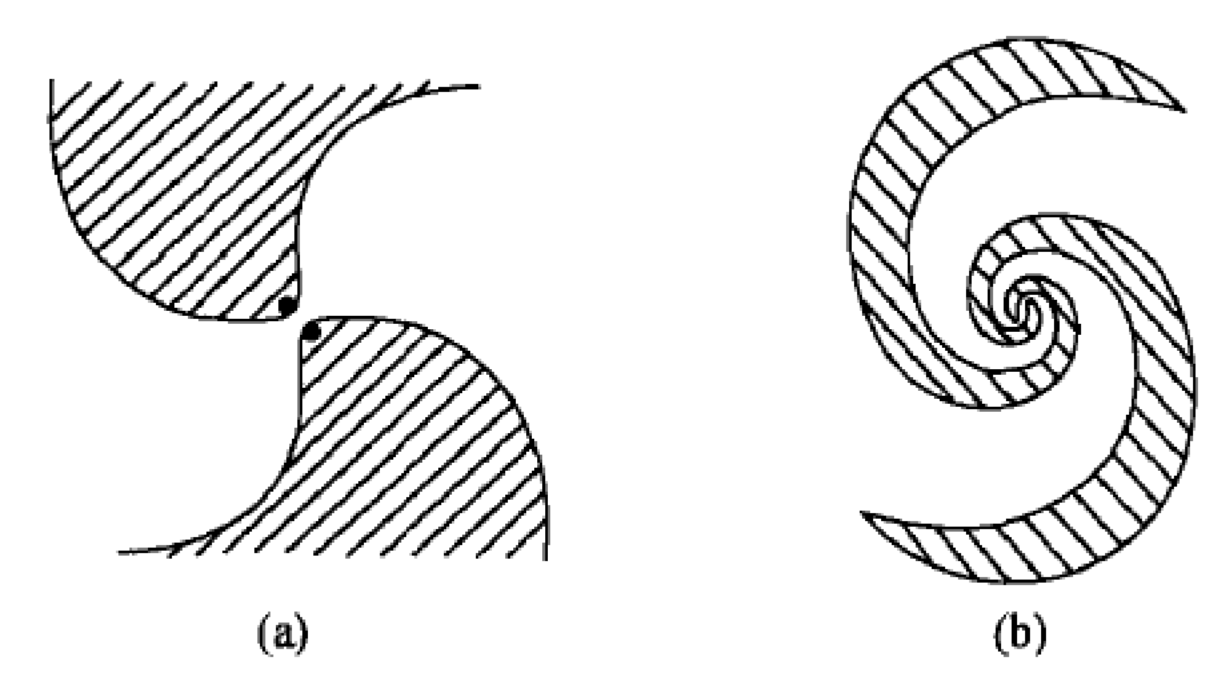


图 5.20　频率无关天线: 自互补平面片天线(a)和平面等角螺线天线(b)

3. 孔隙传输

对于导电屏上孔的前向散射问题, 一个实际感兴趣的量是通过孔隙传输到 $z>0$ 半空间的电磁波功率. 这个量通常以和散射截面类似的方式定义为一个等效的面积, 称为孔的传输截面 σ_t:

$$\sigma_t=\frac{P^t}{p^i}=\frac{\text{通过孔传输的时间平均总功率}}{\text{入射波的时间平均功率密度}}. \tag{5.6.18}$$

应用 Babinet 原理容易将孔的传输截面 σ_t 用孔的补盘在对偶激励下的总散射截

① 见 V. H. Rumsey, Frequency independent antennas, ch. 3, Academic Press, New York, 1966.

面表示. 由(5.6.10)式孔问题中 $z>0$ 半空间中的总场为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}^{sc} + \boldsymbol{E}^{i} = -Z_0 \boldsymbol{H}_c^{sc}, \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}^{sc} + \boldsymbol{H}^{i} = \frac{1}{Z_0}\boldsymbol{E}_c^{sc}. \end{aligned}\right\} \tag{5.6.19}$$

在 $z>0$ 半空间中半径很大的半球面上对于复数 Poynting 矢量的实部积分得

$$\begin{aligned} P^{t} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_{\text{半球面}} (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_{\text{半球面}} [-(\boldsymbol{H}_c^{sc}\times\boldsymbol{E}_c^{sc\,*})]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_{\text{半球面}} (\boldsymbol{E}_c^{sc\,*}\times\boldsymbol{H}_c^{sc})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

所以 P^{t} 等于对偶激励下的补盘散射波的时间平均功率密度在半球面上的积分. 在导体补盘的散射问题中仅在无穷薄的盘面上存在着面电流，散射场分布在盘两侧是对称的，因此有

$$P^{t} = \frac{1}{2}P_c^{sc}, \tag{5.6.21}$$

P_c^{sc} 表示导体补盘在对偶激励下的时间平均散射总功率. 显然孔问题的入射波与补盘问题的对偶入射平面波有相同的平均功率密度，

$$p^{i} = \frac{1}{2Z_0}|\boldsymbol{E}_0^{i}|^2 = p_c^{i},$$

所以

$$\sigma_t = \frac{P^{t}}{p^{i}} = \frac{\frac{1}{2}P_c^{sc}}{p_c^{i}} = \frac{1}{2}\sigma_{sc}^{c} = \frac{1}{2}\sigma_{ext}^{c}. \tag{5.6.22}$$

上式中 σ_{sc}^{c} 和 σ_{ext}^{c} 分别表示在对偶源激励下补盘的散射截面和消光截面，由于理想导电盘的吸收截面为零，$\sigma_{sc}^{c}=\sigma_{ext}^{c}$. 考虑到截面定理，平面导电屏上孔的传输截面又可以简单地表示为

$$\sigma_t = -\frac{2\pi}{k_0}\mathrm{Im}\left[\frac{\boldsymbol{E}_0^{i\,*}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}^{i},\boldsymbol{k}^{i})}{|\boldsymbol{E}_0^{i}|^2}\right]_{\text{对偶激励的补盘}}, \tag{5.6.23}$$

故孔的传输截面的计算问题最终化为对偶激励下的补盘的前向散射截面的计算.

参考文献

[1] Van Bladel J. Electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1964: ch. 11, ch. 12.
[2] Jones D S. The theory of electromagnetism. Pergamon Press, 1964: ch. 8.
[3] King R W P, Wu T T. The scattering and diffraction of waves. Harvard Univ. Press, 1959: ch. 2, ch. 3.

[4] Born M, Wolf E. Principles of optics. 6th ed. ,Pergamon Press,1980: § 13.5.
[5] Kong J A. Electromagnetic wave theory. John Wiley &. Sons,1986: ch. 6.
[6] Panofsky W K H, Phillips M, Classical electricity and magnetism. 2nd ed. , Addison-Wesley,1962: ch. 13.
[7] Collin R E. Electromagnetic scattering and diffraction, Lecture Notes. Case Western Reserve University,1980.
[8] Jackson J D. Classical electrodynamics. 2nd ed. , John Wiley & Sons,1975: ch. 9.[中译本:经典电动力学.朱培豫译.北京:人民教育版社,1978.]
[9] Stratton J A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill,1941: § 8.14.[中译本:电磁理论. 何国瑜译. 北京:北京航空学院出版社,1986.]
[10] Poggio A J, Miller E K. Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems // Computer techniques for electromagnetics. R. Mittra ed. , Pergamon Press, 1973: ch. 4.[中译本:计算机技术在电磁学中的应用. 金元松译. 北京:人民邮电出版社,1983.]
[11] Jones D S. Methods in electromagnetic wave propagation. Oxford University Press, 1979: ch. 6.
[12] Weng Cho Chew. Waves and fields in inhomogeneous media. Van Nostrand Reinhold, 1990: § 8.1.[中译本:非均匀介质中的场与波. 聂在平,柳清伙译. 北京:电子工业出版社,1992.]
[13] Ishimaru A. Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering. Prentice-Hall,1991: ch. 12.
[14] Harrington R F. Time-harmonic electromagnetic fields. McGraw-Hill,1961: ch. 7.[中译本:正弦电磁场. 孟侃译. 上海:上海科技出版社,1964.]
[15] Jordan E C, Balmain K G. Electromagnetic waves and radiating systems. 2nd ed. , Prentice-Hall,1968: ch. 13.

第六章　电磁波的衍射

§6.1　Fraunhofer 及 Fresnel 衍射

1. Kirchhoff 近似积分的矢量形式[1,2]

衍射现象是波运动过程中当波遇到的障碍物（或孔、缝隙等）的线度与波长可以比拟时所发生的现象．这时由几何光学所预言的波的传播规律已不成立，所以也可以说衍射现象是用几何光学所不能解释的波传播现象．

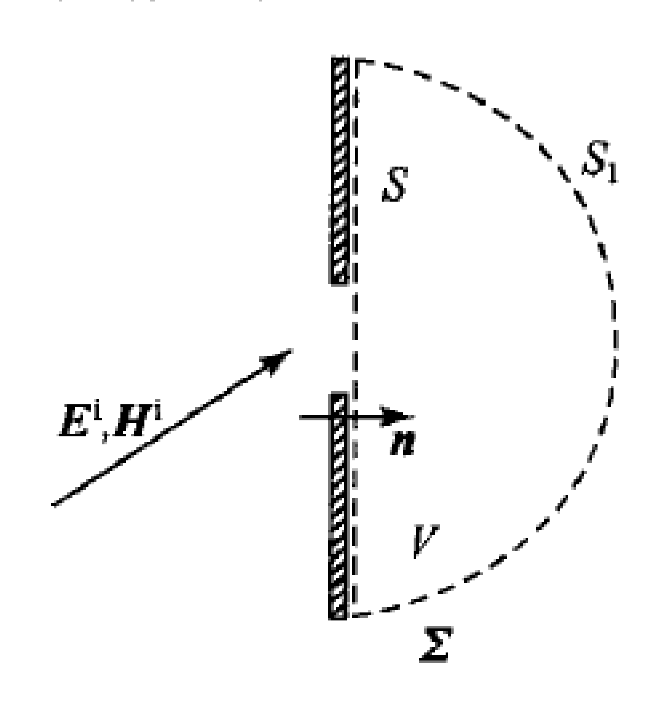


图 6.1　为导出 Kirchhoff 衍射积分公式所设置的问题

关于衍射的最早的理论是 Huygens 对于屏上的孔或缝隙的衍射问题所提出的理论，认为孔上的入射波是衍射次波的源，称为 Huygens 原理．Huygens 原理的最早的数学形式是 Kirchhoff 给出的标量积分公式．对于图 6.1 所示的衍射屏后面被闭合面 Σ 包围的体积 V，由 Green 公式可得

$$\iiint\limits_V [\psi(\boldsymbol{r}')\,\nabla'^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\nabla'^2\psi(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V'$$

$$= \oiint\limits_\Sigma [\psi(\boldsymbol{r}')\,\nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\nabla'\psi(\boldsymbol{r}')]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}', \qquad (6.1.1)$$

这里 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是齐次 Helmholtz 方程的解，表示电场或磁场的直角坐标分量，$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为三维自由空间的标量 Green 函数(5.4.5)．由 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 所满足的方程式可导出 $\psi(\boldsymbol{r})$ 用闭合面 Σ 上的面积分的表示式

$$\psi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_\Sigma \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{n}\cdot\left[\nabla'\psi(\boldsymbol{r}') - \psi(\boldsymbol{r}')\left(\mathrm{j}k_0 + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}S', \qquad (6.1.2)$$

闭合面 Σ 由屏平面 S 和半径无穷大的半球面 S_1 组成．可以证明 S_1 面上的积分为零①，于是衍射屏后 $\boldsymbol{r}$ 点的衍射场可用屏平面 S 上的面积分表示为

---

① 见，例如，[1]，§8.13.

$$\psi(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{n}\cdot\left[\nabla'\psi(\boldsymbol{r}')-\psi(\boldsymbol{r}')\left(\mathrm{j}k_0+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}S', \tag{6.1.3}$$

(6.1.3)式称为 Kirchhoff 衍射积分公式. Kirchhoff 衍射积分公式表明,为确定衍射场需给定 S 平面上 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 两者的值. 但是除非 V 内的场已经解出,否则 S 上的 ψ 及 $\partial\psi/\partial n$ 值是不能事先知道的,所以(6.1.3)式实际上只是衍射场的形式上的积分表示式.

为使(6.1.3)式可以实际用来计算衍射场,Kirchhoff 作了两个如下的近似假设:

(1) 在 S 面上除了孔区以外的整个平面上 ψ 及 $\partial\psi/\partial n$ 处处为零.

(2) 在 S 面上的孔区,ψ 及 $\partial\psi/\partial n$ 值等于当屏以及其它障碍物不存在时入射波的值.

这两条假设实际上是互相矛盾的. 由假设(1),在边界面的一部分面积上 ψ 及 $\partial\psi/\partial n$ 两者处处为零,则作为齐次 Helmholtz 方程的解 ψ 只能是处处为零的零解,这就与假设(2)矛盾. 另一方面,由唯一性定理在边界面上只需给定 ψ 或 $\partial\psi/\partial n$ 两者之一,但在 Kirchhoff 的假定中这两者都是给定的,所给定的这些边界值之间也必然会相互矛盾. 实际上,根据假设(2)给出的孔面上的边界值计算出的函数 ψ 并不能满足假设(1)所给定的屏后的 S 面上的边界值. 尽管 Kirchhoff 的假设含有如此明显的矛盾,但 Kirchhoff 的理论却构成了经典光学中计算衍射问题的基础. 这是因为光学的衍射问题基本上都满足条件 $\lambda_0/d\ll 1$,这里 d 表示衍射孔的线度,而且光波也并不明显地显示出矢量特性.

但是对于电磁波的衍射问题波的矢量特性不再能忽略. 对于矢量电磁波的衍射问题,类似于标量 Kirchhoff 理论导出了矢量形式的衍射积分,这就是 §5.4中导出的 Stratton 和 Chu 的积分公式(5.4.14)和(5.4.15). 应用于图6.1所示的衍射问题,考虑到体积分和 S_1 半球面上的积分为零,$\boldsymbol{r}$ 点的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iint_S[-\mathrm{j}\omega\mu_0(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})g+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla'g+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla'g]\mathrm{d}S'. \tag{6.1.4}$$

为利用上式计算衍射场,对于 S 面上的电场和磁场的切线分量及电场的法线分量仍可以作出与 Kirchhoff 相似的近似假设,但这个假设所包含的内在矛盾依然存在. 所以矢量形式的 Kirchhoff 近似积分(6.1.4)式也只是在 $\lambda_0/d\ll 1$ 的条件下才能给出衍射场的较为正确的结果,当不满足这个条件时会发生较大的误差,甚至会导致错误的结果. 图 6.2 上示出了导电屏上的圆孔的传输截面用 Kirchhoff 矢量近似积分计算的值与由精确的分离变数法解计算的值的比较. 图 6.2 表明,在 $k_0a\ll 1$ 的低频区域和 $k_0a\approx 1$ 的中频区域矢量 Kirchhoff 近似与精

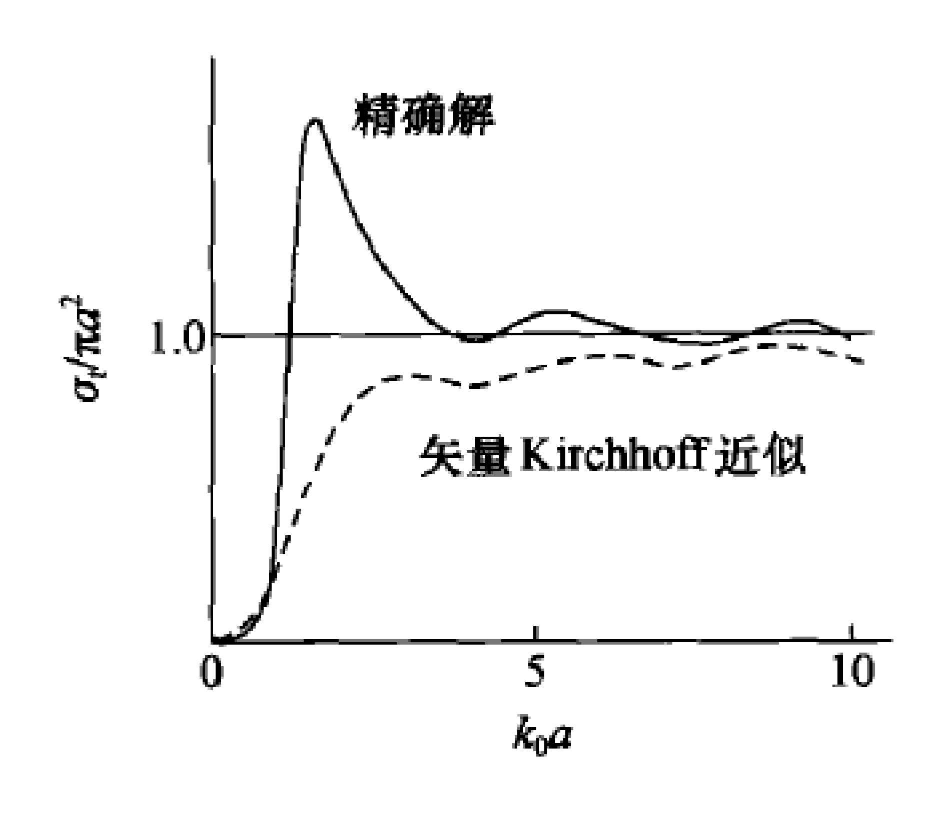


图 6.2　用矢量 Kirchhoff 近似计算的圆孔传输截面与精确解的比较

确解之间的差别是明显的，这里 a 是孔的半径，仅在 $k_0a\gg1$ 的高频区域中 Kirchhoff 近似与精确解给出的结果才比较接近，这个频率也已接近于几何光学近似成立的范围.

在§5.6 中讨论 Babinet 原理时已经指出在光学中的衍射屏模型是一种理想的完全吸收屏，但在电磁学中找不到类似于绝对黑体的理想物质，亦无法给出完全吸收屏的精确定义. 电磁学中的不透明屏是导体屏，对于频率低于短波长可见光的电磁波，理想导体的模型是导体的良好近似，对于理想导电屏则可以指定精确的边界条件.

Kirchhoff 标量衍射理论的内在矛盾可通过在 Green 公式(6.1.1)中选择与 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$不同的 Green 函数加以克服①. 类似地，在矢量 Green 公式(5.4.3)中选用不同的 Green 函数也可导致不同于 Stratton 和 Chu 的电磁场的矢量积分表示式. 例如，若在(5.4.3)式中令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{P}=\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{a},\tag{6.1.5}$$

则可得如下的电场和磁场积分表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&-\mathrm{j}\omega\mu_0\iint_S\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'\\&+\iint_S\nabla'\times\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S',\end{aligned}\tag{6.1.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=&\iint_S\nabla'\times\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'\\&+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\iint_S\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S',\end{aligned}\tag{6.1.7}$$

这里 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是自由空间的并矢 Green 函数. 电磁场的矢量形式的积分表示式(5.4.14)，(5.4.15)和(6.1.6)，(6.1.7)都可看作是 Huygens 原理的数学表达式.

当使用(6.1.6)式和(6.1.7)式时如果对于 S 平面应用下面的 Kirchhoff 边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')=0,\qquad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')=0\qquad(\text{在屏上}),\\&\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')\quad(\text{在孔上})\end{aligned}\right\}\tag{6.1.8}$$

① 见[2]，§9.8.

就得到第四章中计算孔的辐射场时使用等效面电流和等效面磁流两种等效源时的孔场积分公式(4.4.4)和(4.4.5). 但对于导电屏 Kirchhoff 边界条件显然不是好的假定. 在屏面上的条件

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')=0$$

显然不是好的近似,因为在导电屏上,特别是衍射孔附近的屏面上,通常存在着感应面电流. 同样,对于平面衍射屏,在孔面上的条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')$ 也不是好的假设,因为导电屏平面上的感应面电流将会在孔平面上产生切向电场. 故应用矢量形式的 Kirchhoff 近似积分公式及边界条件(6.1.8)也仅在 $\lambda_0/d\ll 1$ 的条件下才能给出较好的结果,这仍然需要从几何光学近似来解释.

2. Fraunhofer 及 Fresnel 衍射[3,4]

我们现在来看一个简单的例子,即平面导电屏上的长矩形孔的衍射问题. 我们将利用这个例子来说明 Fraunhofer 衍射及 Fresnel 衍射的概念. 衍射屏如图 6.3 所示,屏平面取作 $z=0$ 平面,入射平面波为一 x 方向的线极化波,垂直投射于衍射屏. 为简化数学计算,设孔的长边沿 x 方向无限延伸,这样的假定使得问题变成为二维问题,然后在 $k_0w>1$ 的条件下计算衍射场,这里 w 是衍射孔的窄边长度.

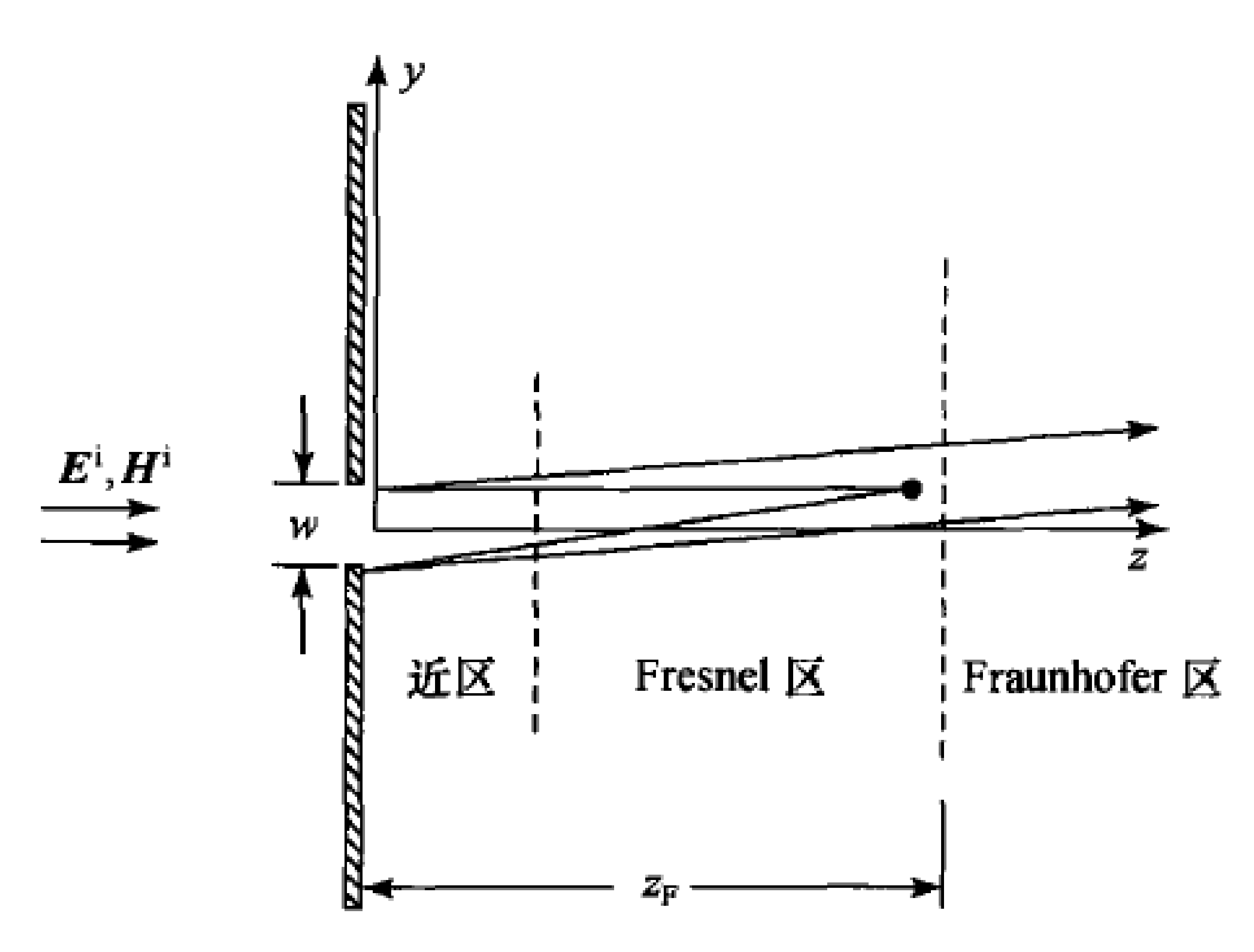


图 6.3　长矩形孔衍射的近区、Fresnel 区和 Fraunhofer 区

对于 $z=0$ 平面应用 Kirchhoff 近似边界条件(6.1.8)式,由(6.1.6)式得 $z>0$ 区域内 $\boldsymbol{r}$ 点的电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu_0\iint_{S_a}\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S'$$

$$+\iint_{S_a}\nabla'\times\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S',\qquad(6.1.9)$$

这也就是孔辐射场用等效面电流和等效面磁流的表示式(4.4.4). 根据第四章中关于用等效源计算平面孔辐射问题的讨论,对于 $z>0$ 区域的场也可以改用理想磁导体面加等效面电流的等效形式,这样可以将场的计算简化为只求一个积分. 若采用这种等效形式则 $z>0$ 区域的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \iint_{S_a} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{6.1.10}$$

上式中的 $\boldsymbol{J}_s$ 应包括镜像面电流,因此

$$\boldsymbol{J}_s = 2\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}^i \big|_{z=0} = 2\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{H}^i \big|_{z=0}. \tag{6.1.11}$$

入射波的孔场可表示为

$$\boldsymbol{H}^i \big|_{z=0} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_0}{Z_0} U\left(\frac{w}{2} - |y'|\right), \tag{6.1.12}$$

其中

$$U = \begin{cases} 1, & \dfrac{w}{2} - |y'| > 0, \\ 0, & \dfrac{w}{2} - |y'| < 0, \end{cases}$$

为单位脉冲函数. 对于现在的二维问题,构成自由空间并矢 Green 函数 $\mathbf{G}_0$ 的标量 Green 函数 g 应取自由空间的二维标量 Green 函数,对于图 6.3 的坐标系二维标量 Green 函数为

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = -\frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) = -\frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(y-y')^2 + z^2}\right], \tag{6.1.13}$$

这里 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 为零阶第二类 Hankel 函数,于是

$$\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right)g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'). \tag{6.1.14}$$

(6.1.11)式和(6.1.14)式代入(6.1.10)式,考虑到 $\partial/\partial x=0$,得

$$\boldsymbol{E}(y,z) = \boldsymbol{a}_x \frac{\omega\mu_0}{2Z_0}\int_{-w/2}^{w/2} E_0 U\left(\frac{w}{2} - |y'|\right)\mathrm{H}_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(y-y')^2+z^2}\right]\mathrm{d}y'. \tag{6.1.15}$$

当观察点距屏的距离与波长 λ_0 相比为足够远,即条件 $k_0\sqrt{(y-y')^2+z^2} \gg 1$ 成立时,(6.1.15)式积分中的 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 可用其大宗量渐近式代入. 如果进一步限制观察点在近轴区,即 $|y-y'| \ll z$ 时,还可将 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的宗量展开为 Taylor 级数:

$$k_0\sqrt{(y-y')^2+z^2} \approx k_0 z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{z}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{6.1.16}$$

这样,由(6.1.15)式可得近轴区电场的下列近似式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(y,z) &= \boldsymbol{a}_x E_0 \frac{k_0}{2}\sqrt{\frac{2}{-\mathrm{j}\pi k_0 z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}\int_{-w/2}^{w/2} U\left(\frac{w}{2} - |\,y'\,|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(y-y')^2/2z}\mathrm{d}y' \\ &= \boldsymbol{a}_x E_0 k_0 \sqrt{\frac{2}{-\mathrm{j}\pi k_0 z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}\int_0^{w/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(y-y')^2/2z}\mathrm{d}y', \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

得到上面的近似式时在 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 的大宗量渐近式振幅的分母中只保留了宗量级数展开式(6.1.16)括号中的第一项,而在相位因子中则保留了括号中的第二项.

(6.1.17)式后一等式中的积分可化为 Fresnel 积分. Fresnel 积分是衍射理论中最常遇到的积分,定义为

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^w \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}\right)t^2}\mathrm{d}t = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= C(w) - \mathrm{j}S(w), \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

$F(w)$的实部和负虚部

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t, \tag{6.1.19a}$$

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t \tag{6.1.19b}$$

是已制成表的函数①,它们的曲线示于图 6.4. $C(w)$和 $S(w)$的值也可以很方便地用 Cornu 螺线示出,见图 6.5.

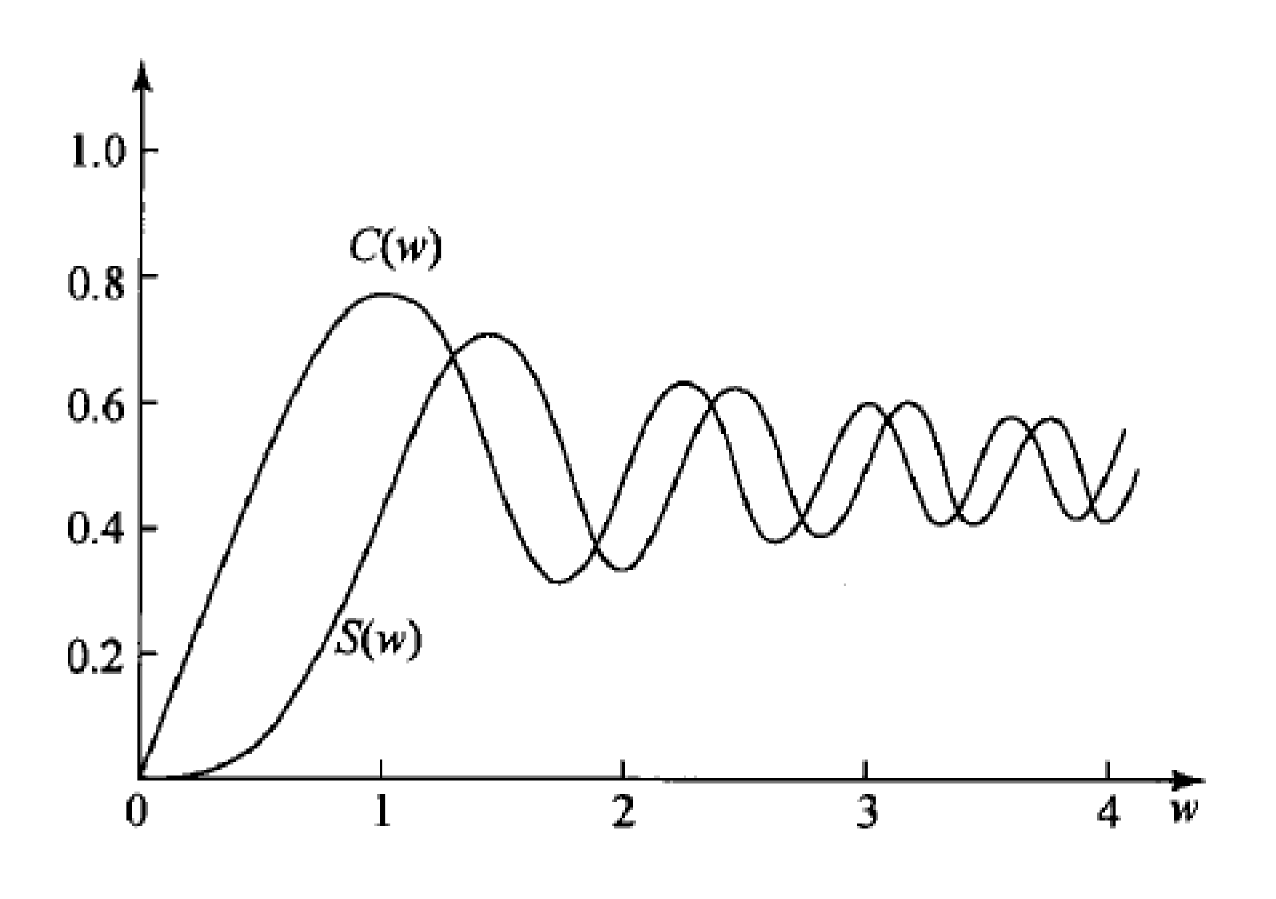


图 6.4　Fresnel 积分函数曲线

如果在 $\mathrm{H}_0^{(2)}$ 宗量的级数展开式(6.1.16)中略去 $k_0 y'^2/2z$ 项,展开式(6.1.16)变为

$$k_0\sqrt{(y-y')^2+z^2} \approx k_0 z + k_0 y^2/2z - k_0 yy'/z, \tag{6.1.16a}$$

---

① $C(w)$和 $S(w)$的数值表可见,例如,M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions, ch. 7, Dover, 1965.

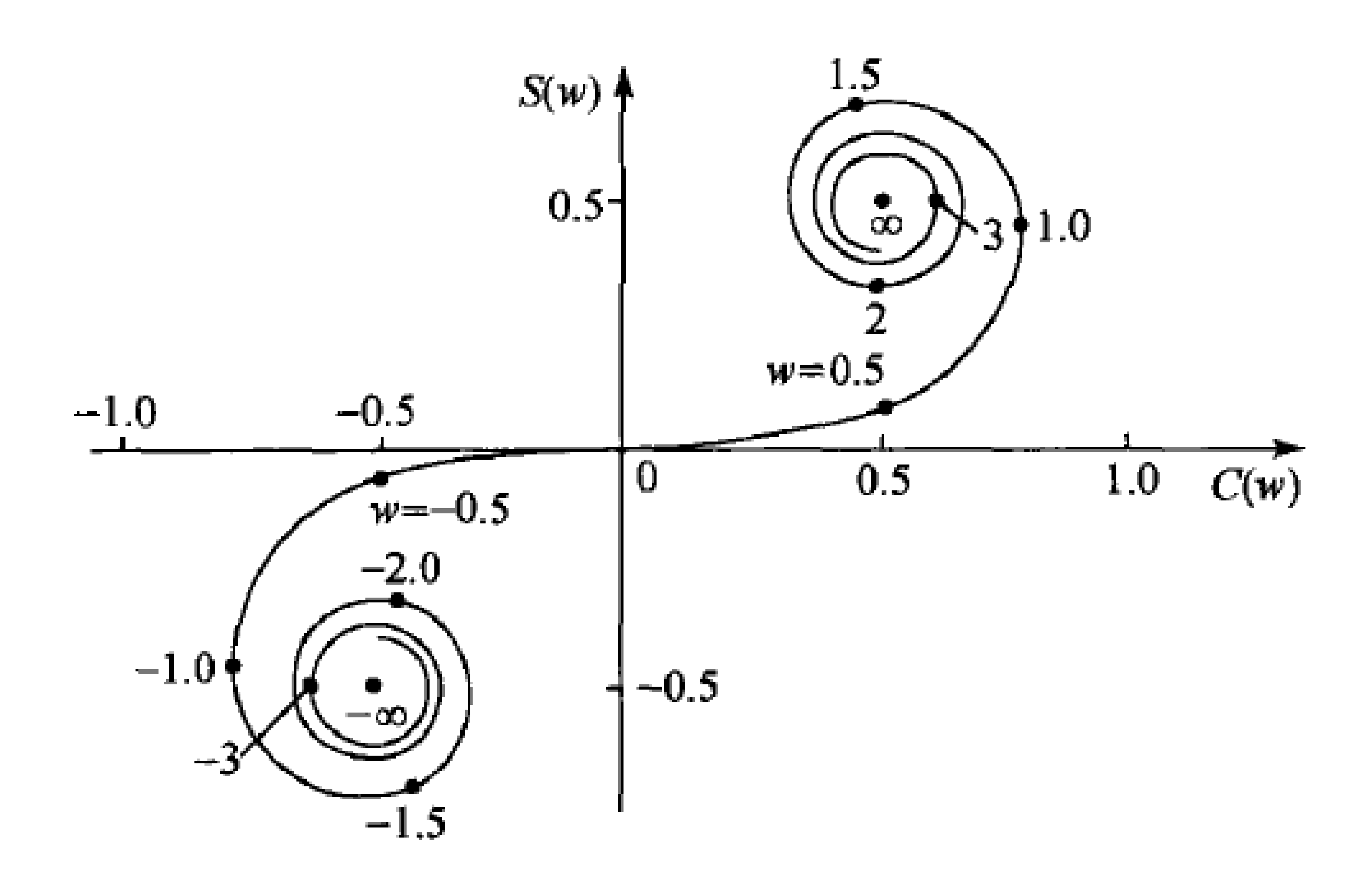


图 6.5　Cornu 螺线

上式代入(6.1.15)式则得到近轴区电场的另一个近似式

$$\boldsymbol{E}(y,z)=\boldsymbol{a}_x E_0\frac{k_0}{2}\sqrt{\frac{2}{-\mathrm{j}\pi k_0 z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z-\mathrm{j}k_0 y^2/2z}\int_{-w/2}^{w/2}U\left(\frac{w}{2}-|\,y'\,|\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_0 y/z)y'}\mathrm{d}y'. \tag{6.1.20}$$

考虑到脉冲函数 U 的定义，可将上式中的积分限扩展至无穷远，从而得到 Fourier 变换

$$\int_{-w/2}^{w/2}U\left(\frac{w}{2}-|\,y'\,|\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_0 y/z)y'}\mathrm{d}y'=\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{w}{2}-|\,y'\,|\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_0 y/z)y'}\mathrm{d}y'$$
$$=w\frac{\sin(k_0 yw/2z)}{k_0 yw/2z}. \tag{6.1.21}$$

上式代入(6.1.20)式即得

$$\boldsymbol{E}(y,z)=\boldsymbol{a}_x\frac{E_0 k_0 w}{2}\sqrt{\frac{2}{-\mathrm{j}\pi k_0 z}}\frac{\sin(k_0 yw/2z)}{k_0 yw/2z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z-\mathrm{j}k_0 y^2/2z}. \tag{6.1.22}$$

(6.1.22)式所表示的衍射场分布作为孔场的 Fourier 变换的关系，我们在第四章中讨论平面孔的辐射问题时已经遇见过，在衍射理论中具有这种特征的衍射称为 Fraunhofer 衍射. 在级数展开式(6.1.16)中略去 $k_0 y'^2/2z$ 项要求观察点在距离衍射孔更远的地方，即相当于辐射问题中的远区，这是发生 Fraunhofer 衍射的区域. 实际上，在光学实验中观察到的 Fraunhofer 衍射图形是通过透镜会聚的近似平行射线的衍射图形.

由(6.1.17)式所给出的衍射称为 Fresnel 衍射，发生 Fresnel 衍射的区域称为 Fresnel 区，Fresnel 区相当于辐射问题中介于近区和远区之间的过渡区，这三个区域已在图 6.3 中示出，对于长狭缝的衍射问题 Fresnel 区和 Fraunhofer 区的分界线 z_F 大致为

$$k_0 w^2/2z_F=\pi/2. \tag{6.1.23}$$

在电磁学中 Fresnel 衍射较 Fraunhofer 衍射受到更多的关注，但 Fresnel 衍射问题的计算要困难些.

§6.2　平面电磁波在导体圆柱上的衍射

1. Watson 变换解[4,5,6]

平面电磁波在无穷长导体圆柱上的衍射问题是少数可以严格求解的衍射问题之一，我们选择这个例子以说明电磁波在光滑的导体凸面上衍射的特征.

让我们来继续§5.1中关于E型平面波在无穷长导体柱上散射问题的讨论，坐标系的选择与图5.1相同，这里为了阅读的方便重复绘于图6.6. 对于沿 x 轴方向垂直投射于导体柱的E型波，其仅有的 z 分量电场的柱面波展开式为

$$E_z^{\mathrm{i}} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{j}^{-n} \mathrm{J}_n(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}. \quad (6.2.1)$$

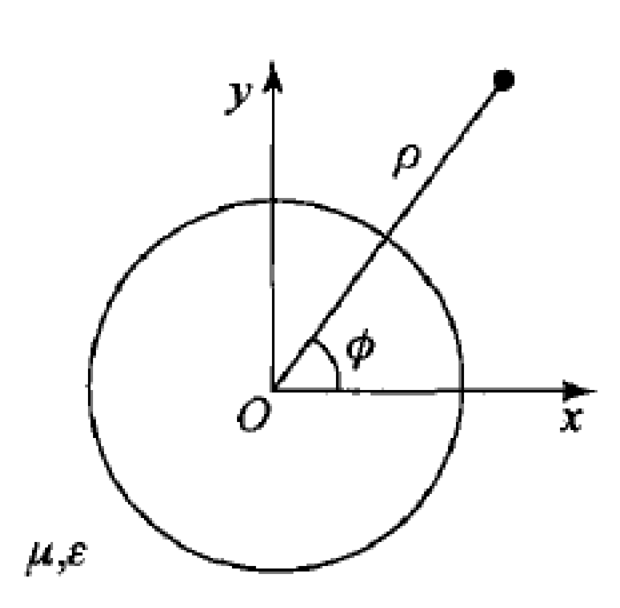


图6.6　E型平面波垂直投射于无穷长理想导体圆柱

将散射波展开为柱面波，在导体柱面 $\rho=a$ 上匹配边界条件，确定散射波展开式的系数后得导体柱外均匀介质区中入射波与散射波之和的电场 z 分量无穷级数表示式：

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{j}^{-n}\exp(\mathrm{j}n\phi)}{\mathrm{H}_n^{(2)}(ka)}[\mathrm{J}_n(k\rho)\mathrm{H}_n^{(2)}(ka) - \mathrm{J}_n(ka)\mathrm{H}_n^{(2)}(k\rho)]. \quad (6.2.2)$$

在§5.1中已经指出，在高频情况($ka \gg 1$)下级数(6.2.2)式收敛得很缓慢，需要寻求适用于高频情况的其它形式的解.

得到导体圆柱的高频散射问题解的一种通用的数学技巧是利用 Watson 变换将含有复指数的(6.2.2)式类型无穷级数变换为复平面上的回路积分，然后利用留数理论求出回路积分. 我们来看复 ν 平面上的积分

$$\frac{\mathrm{j}}{2}\int \frac{\exp[\mathrm{j}\nu(\phi+\pi)]}{\sin\nu\pi} f(\nu)\mathrm{d}\nu,$$

在实轴上函数 $1/\sin\nu\pi$ 有无穷多个一阶极点

$$\nu = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

如果函数 $f(\nu)$ 在实轴附近没有奇异性，可以在复 ν 平面上选择如图6.7所示的积分回路 C 将被积函数所有的极点包围，则由留数定理得

$$\frac{\mathrm{j}}{2}\oint_C \frac{\exp[\mathrm{j}\nu(\phi+\pi)]}{\sin\nu\pi} f(\nu)\mathrm{d}\nu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(\mathrm{j}n\phi) f(n), \quad (6.2.3)$$

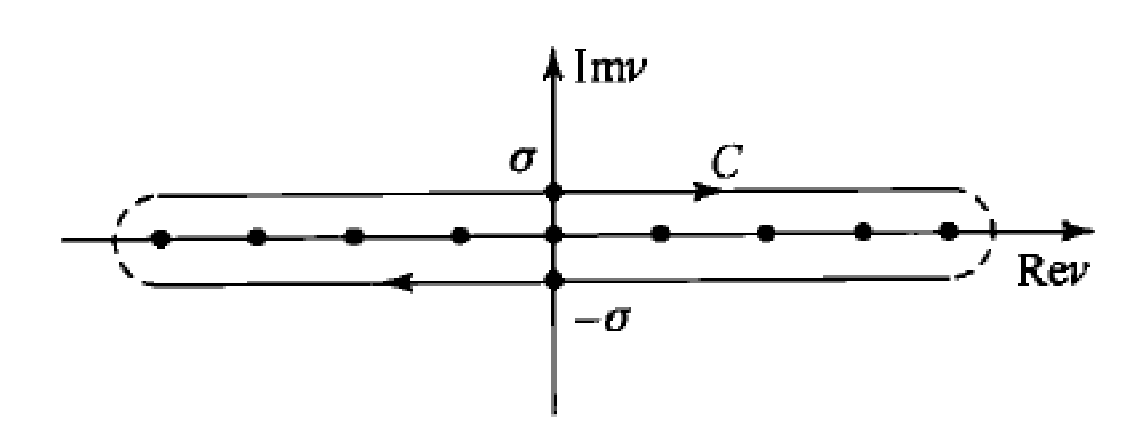


图 6.7 (6.2.3)式左侧积分的回路 C 及被积函数的一阶极点分布

在这里由于所选择的积分回路 C 的绕向为负,故等号右方取正值.(6.2.3)式右方为含有复指数 $\exp(\mathrm{j}n\phi)$ 的无穷级数,将无穷级数与复平面上的回路积分相联系的这个变换关系称为 Watson 变换.如果将(6.2.3)式中的 $f(\nu)$ 设为

$$f(\nu)=E_0\frac{\mathrm{j}^{-\nu}}{\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)}[\mathrm{J}_\nu(k\rho)\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)-\mathrm{J}_\nu(ka)\mathrm{H}_\nu^{(2)}(k\rho)],\quad(6.2.4)$$

那么,由无穷级数(6.2.2)式表示的 E_z 就通过 Watson 变换(6.2.3)式变换为复 ν 平面上的回路积分表示式

$$E_z=\frac{\mathrm{j}}{2}\oint_C\frac{\exp[\mathrm{j}\nu(\phi+\pi)]}{\sin\nu\pi}f(\nu)\mathrm{d}\nu.\quad(6.2.5)$$

为在特定的 ϕ 角区域求(6.2.5)式中的回路积分,需要做进一步的变换.首先,利用柱函数关系

$$2\mathrm{J}_\nu(z)=\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)+\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\quad(6.2.6)$$

将(6.2.4)式改写为

$$f(\nu)=E_0\frac{\mathrm{j}^{-\nu}}{2\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)}[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(k\rho)\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)-\mathrm{H}_\nu^{(1)}(ka)\mathrm{H}_\nu^{(2)}(k\rho)].\quad(6.2.7)$$

我们将沿回路 C 的积分具体地写作沿两条与实轴平行的无穷长路径上的积分

$$\oint_C\frac{\exp[\mathrm{j}\nu(\phi+\pi)]}{\sin\nu\pi}f(\nu)\mathrm{d}\nu=\left(\int_{\infty-\mathrm{j}\sigma}^{-\infty-\mathrm{j}\sigma}+\int_{-\infty+\mathrm{j}\sigma}^{\infty+\mathrm{j}\sigma}\right)\left\{\frac{\exp[\mathrm{j}\nu(\phi+\pi)]}{\sin\nu\pi}f(\nu)\mathrm{d}\nu\right\},\quad(6.2.8)$$

这里 σ 取小正值.由 Hankel 函数的延拓公式①

$$\mathrm{H}_{-\nu}^{(1)}(z)=\exp(\mathrm{j}\pi\nu)\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z),\quad(6.2.9)$$

$$\mathrm{H}_{-\nu}^{(2)}(z)=\exp(-\mathrm{j}\pi\nu)\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z),\quad(6.2.10)$$

可以推出

$$f(-\nu)=\exp(\mathrm{j}2\pi\nu)f(\nu).\quad(6.2.11)$$

如果在(6.2.8)式右方的第二个积分中做变量变换 $\nu\to-\nu$,利用(6.2.11)式则该

① 见,例如,[5],§1.33.

积分变为

$$\int_{\infty-j\sigma}^{-\infty-j\sigma}\frac{\exp[j\nu(\pi-\phi)]}{\sin\nu\pi}f(\nu)d\nu.$$

上式与(6.2.8)式右方的第一个积分相加，指数 $\exp(-j\nu\phi)$ 中的 $\sin\nu\phi$ 项相互抵消，而 $\cos\nu\phi$ 项相加，于是 E_z 的闭合回路积分表示式(6.2.5)变为在实轴下面与实轴平行的路径上的积分：

$$E_z=j\int_{\infty-j\sigma}^{-\infty-j\sigma}\frac{j^{2\nu}f(\nu)\cos\nu\phi}{\sin\nu\pi}d\nu. \tag{6.2.12}$$

为求出这个路径积分的值需要区分观察点所在的空间区域，下面就分别讨论.

2. 阴影区中的衍射场[4,5,6,7]

为了求出路径积分(6.2.12)希望能将积分路径闭合以便利用留数定理，但为避开实轴上的极点就只能在下半复平面内闭合积分路径. 为此我们先来研究被积函数在 $|\nu|\to\infty$ 时的行为以及一阶极点在下半复平面内的分布.

由于已避开了实轴，在下半复平面内被积函数的奇异行为只可能来自(6.2.7)式的 $f(\nu)$ 的分母 $H_\nu^{(2)}(ka)$. 函数 $H_\nu^{(2)}(ka)$ 的零点 $\nu=\nu_n$ 由方程

$$H_{\nu_n}^{(2)}(ka)=0 \tag{6.2.13}$$

确定，可以证明 ν_n 是(6.2.12)式右方路径积分中被积函数的一阶极点. 由于 $ka\gg1$，可以使用 $H_\nu^{(2)}(ka)$ 的渐近式. 由 Jones 在[5]的 §6.23 中给出的 Bessel 函数的一致渐近展开式(uniform asymptotic expansions)及延拓公式可以导出适用于整个复 ν 平面的渐近式.

当 $|\nu|\ll ka$ 时适于 $\arg\nu$ 的任意值的渐近式为①

$$H_\nu^{(2)}(ka)\sim\left(\frac{2}{\pi ka}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-j\left(ka-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{6.2.14}$$

此式表明当 $|\nu|\ll ka$ 时 $H_\nu^{(2)}(ka)$ 没有零点. 当 $\nu\approx ka$ 时由一致渐近展开式可导出下面的渐近式②

$$H_\nu^{(2)}(ka)\approx2\left(\frac{2}{ka}\right)^{\frac{1}{3}}\exp\left(j\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{Ai}\left[\tau\exp\left(-j\frac{2\pi}{3}\right)\right],\ |\arg\nu|\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{6.2.15}$$

这里 $\tau=(\nu-ka)(2/ka)^{\frac{1}{3}}$，$\mathrm{Ai}(x)$ 为 x 的 Airy 函数. 由(6.2.15)式不难求出在 $|\arg\nu|\leqslant\pi/2$ 范围内的 ν_n：

$$\nu_n=ka-\alpha_n\left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right), \tag{6.2.16}$$

---

① 见[6]，§2.2，(55)式.

② 见[6]，§2.2，(57)式.

这里 α_n 为 Airy 函数的零点，$\mathrm{Ai}(\alpha_n)=0$. 因为 α_n 为负，所以 ν_n 的虚部为负，ν_n 的实部略大于 ka，ν_n 便落在第四象限. 随着 ν_n 值的进一步增大(6.2.16)式不再成立，这时 ν_n 的位置将折回而逐渐靠近负虚轴，当 $|\nu|\to\infty$ 时 ν_n 将非常接近负虚轴. ν_n 在整个复 ν 平面上的分布示于图 6.8.

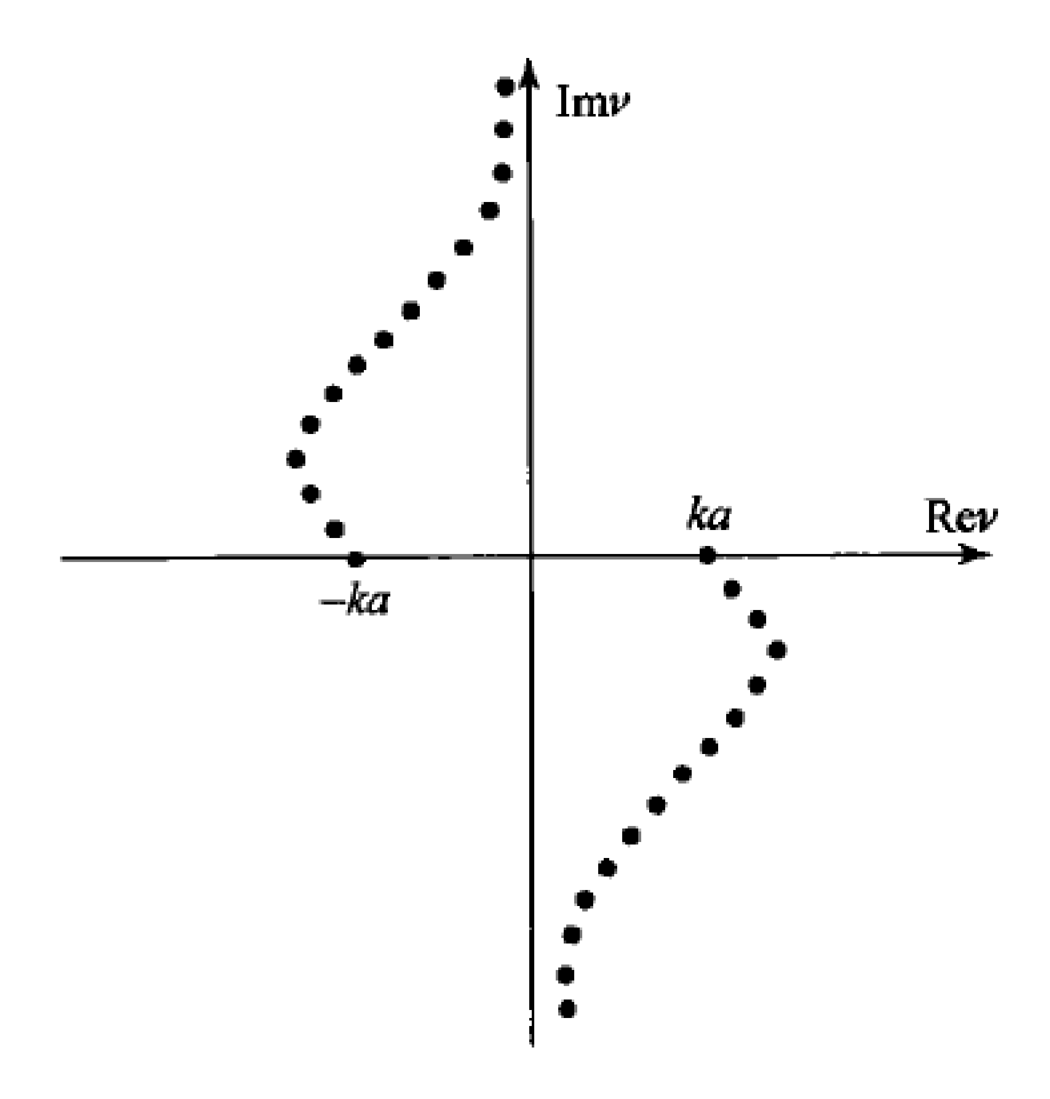


图 6.8　(6.2.13)式的根在复 ν 平面上的分布

当 $|\nu|\gg ka$ 时，由 $\mathrm{J}_\nu(ka)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)$ 的渐近式可以证明

$$f(\nu)\to 0,\ \text{当：}|\nu|\to\infty,\ |\phi|<\pi/2.$$

因此，由 Jordan 引理可以用下半复平面内的无穷大半径的半圆形路径将(6.2.12)式中的积分路径闭合，然后将路径变形为仅包围一阶极点 ν_n 的回路，如图 6.9 所示. 利用留数定理将路径积分求出后得

$$E_z = E_0\pi\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}^{\nu_n}\frac{\mathrm{H}_{\nu_n}^{(1)}(ka)\mathrm{H}_{\nu_n}^{(2)}(k\rho)\cos\nu_n\phi}{\left[\dfrac{\partial}{\partial\nu}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ka)\right]_{\nu=\nu_n}\sin\nu_n\pi}. \tag{6.2.17}$$

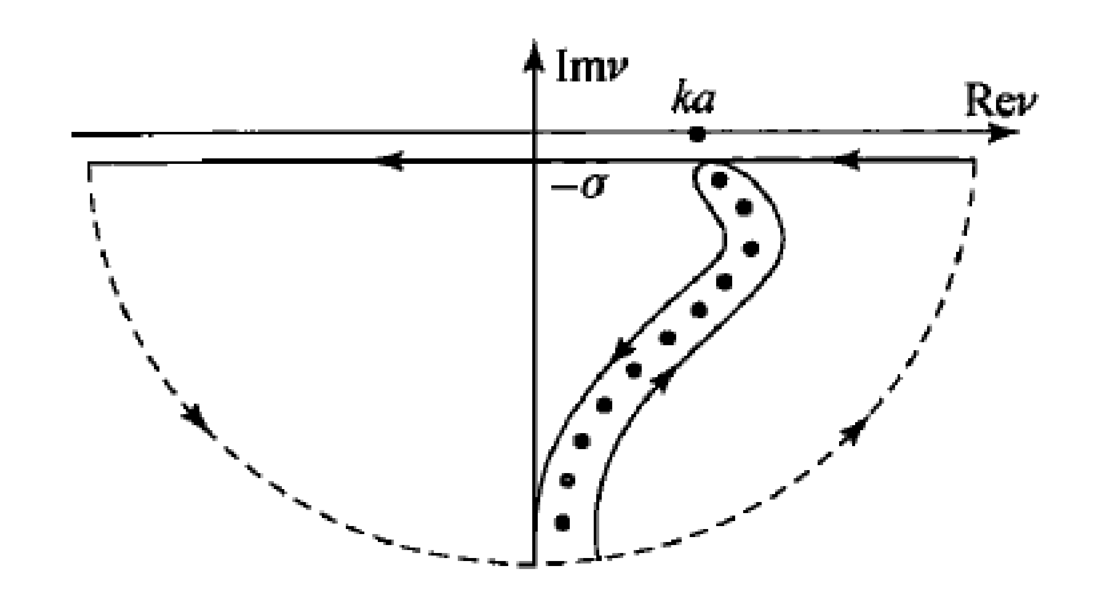


图 6.9　(6.2.12)式右侧的积分路径变形为包围下半复 ν 平面上一阶极点的回路

由于(6.2.7)式 $f(\nu)$ 第一项分子中的 $H_\nu^{(2)}(ka)$ 与分母相消，在第一项中不存在奇异性，故对于(6.2.17)的贡献仅来自 $f(\nu)$ 的第二项. 考虑到 ν_n 含有大的负虚部，在(6.2.17)式中可以代入下面的近似式

$$\sin\nu_n\pi \approx \frac{\exp(j\nu_n\pi)}{2j},$$

$$j^{\nu_n}\frac{\cos\nu_n\phi}{\sin\nu_n\pi} \approx j\left[\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right\}+\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right\}\right],$$

(6.2.17)式便化为

$$E_z = j\pi E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\nu_n}^{(1)}(ka)}{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}H_\nu^{(2)}(ka)\right]_{\nu=\nu_n}}H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho) \cdot\left[\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right\}+\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right\}\right]. \quad (6.2.18)$$

由于 ν_n 有大的负虚部，由方括号中的指数项可看出，当 $|\phi|<\pi/2$ 时(6.2.18)式是个收敛得非常快的级数，在级数的求和中只需取前几项. 当观察点距离柱面较远使得条件 $|k\rho|>|\nu_n|$ 成立时可以用下面的渐近式①

$$H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(k^2\rho^2-\nu_n^2)^{\frac{1}{2}}}}\exp\left\{-j\left(\sqrt{k^2\rho^2-\nu_n^2}-\nu_n\arccos\frac{\nu_n}{k\rho}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (|k\rho|>|\nu_n|). \quad (6.2.19)$$

考虑到(6.2.16)式，在级数(6.2.18)式的前几项中可以做下面的近似：

$$\sqrt{k^2\rho^2-\nu_n^2} \approx k\sqrt{\rho^2-a^2},$$

$$\arccos\frac{\nu_n}{k\rho} \approx \arccos\frac{a}{\rho},$$

这样，(6.2.18)式最终可简化成

$$E_z = E_0\sqrt{\frac{2\pi}{k(\rho^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}}e^{-jk\sqrt{\rho^2-a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\nu_n}^{(1)}(ka)}{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}H_\nu^{(2)}(ka)\right]_{\nu=\nu_n}} \cdot\left[\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\arccos\frac{a}{\rho}\right)\right\} +\exp\left\{-j\nu_n\left(\frac{\pi}{2}+\phi-\arccos\frac{a}{\rho}\right)\right\}\right]\exp\left(j\frac{3\pi}{4}\right). \quad (6.2.20)$$

在区域

$$-\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{a}{\rho}<\phi<\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{a}{\rho} \quad (6.2.21)$$

---

① 见[6]，§2.2，(56)式.

内级数(6.2.20)式收敛得非常快,只需取很少的几项就可得到足够精确的结果.(6.2.21)式所确定的空间区域相应于在入射平面波照射下圆柱背后的几何光学阴影区(见图 6.10),所以(6.2.20)式是阴影区的衍射场的表达式.

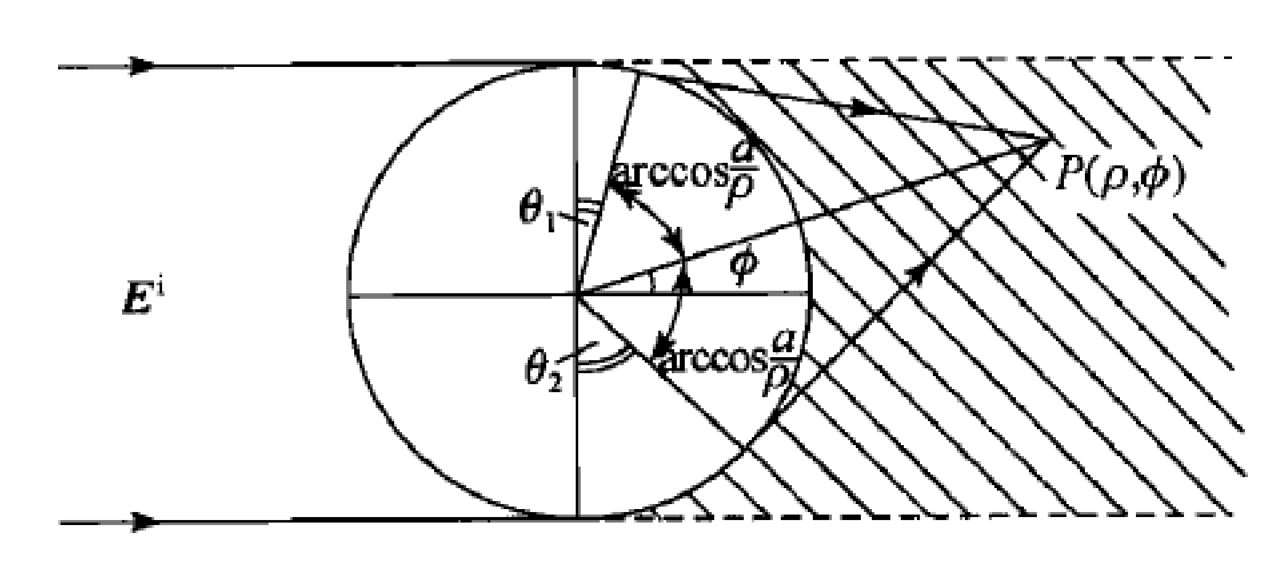


图 6.10 导体圆柱背后的几何光学阴影区

如果从阴影区内的观察点 $P(\rho,\phi)$ 向导体柱的截面圆做出两条切线,如图 6.10 所示,由几何关系可以看出,由入射平面波在截面圆上的掠射点到切点的两段圆弧的角度分别为

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \phi - \arccos\frac{a}{\rho}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \phi - \arccos\frac{a}{\rho}.$$

θ_1 和 θ_2 恰好分别是(6.2.20)式两个指数项中圆括号内的角度值,于是便提出了一个重要的概念来解释导体柱背后阴影区中衍射场的形成.入射波到达柱面上掠射点的射线可以在影区的柱面上继续爬行,到达切点时沿切线方向射出.这种沿着柱面爬行的射线称为爬行射线,相应的波称为爬行波(creeping waves).ν_n 正是爬行波的角波数.爬行波沿柱面爬行的过程中由于不断沿柱面的切线方向放出射线而受到严重的衰减(ν_n 有大的负虚部).阴影区内每一点的衍射场就是由沿柱面切线方向射出的两条爬行射线合成的,(6.2.20)式中的相位因子 $\exp[-\mathrm{j}k\sqrt{\rho^2-a^2}]$ 正是爬行波从切点射出后到达 P 点过程中所经历的相位.在导体圆柱衍射问题中揭示的爬行波的存在及其在形成影区的衍射场时所起的作用具有普遍的意义,而不仅限于圆柱形导体这种特殊的几何形状.爬行波的概念可推广于任意具有光滑凸面的导体的衍射问题.

3. 照明区的散射场[5,6]

在被入射波直接照射的照明区中条件(6.2.21)式不满足,级数解(6.2.20)式的收敛变坏,这时需要改换积分的形式.我们需要回到电场的路径积分表示式(6.2.12):

$$E_z = \mathrm{j}\int_{\infty-\mathrm{j}\sigma}^{-\infty-\mathrm{j}\sigma} \frac{\mathrm{j}^{2\nu} f(\nu)\cos\nu\phi}{\sin\nu\pi}\mathrm{d}\nu,$$

$f(\nu)$ 由(6.2.7)式给出.以

$$\cos\nu\phi = e^{-j\nu\pi}[\cos\nu(\pi-\phi)+je^{j\nu\phi}\sin\nu\pi] \qquad (6.2.22)$$

代入(6.2.12)式得

$$E_z = -\int_{\infty-j\sigma}^{-\infty-j\sigma}\left[e^{j\nu\phi}-j\frac{\cos\nu(\pi-\phi)}{\sin\nu\pi}\right]f(\nu)\mathrm{d}\nu. \qquad (6.2.23)$$

上式中的积分路径仍然可以用下半平面上的无穷大半径半圆闭合，然后变形为图 6.9 所示的包围 ν_n 的回路. 可以证明(6.2.23)式方括号中的第二项仍然表示由爬行射线在观察点产生的场，由于爬行波为衰减的雕落波，故相对于方括号中的第一项，第二项对于照明区场的贡献可以略去.

对于(6.2.23)式第一项的积分，由于分母中的 $\sin\nu\pi$ 已被消去，实轴上的一阶极点已不存在，变形的积分回路可以穿过实轴，如图 6.11 所示. 以(6.2.7)式的 $f(\nu)$ 代入只含有方括弧内第一项的(6.2.23)式得

$$E_z = -\frac{E_0}{2}\int_D\left[H_\nu^{(1)}(k\rho)-\frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(2)}(ka)}H_\nu^{(2)}(k\rho)\right]\exp\left[j\nu\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\nu, \qquad (6.2.24)$$

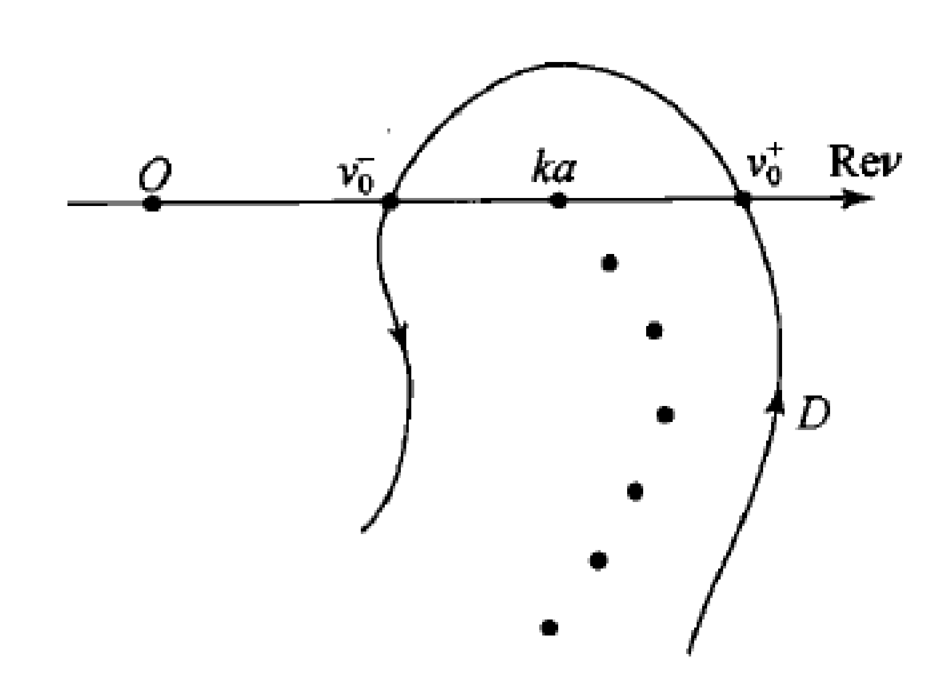


图 6.11 计算照明区的散射场时对图 6.9 所示积分路径做的变形

这里 D 是图 6.11 所示的穿过实轴的积分路径. 在 $|k\rho|$ 接近 $|\nu|$ 但大于 $|\nu|$ 的情况下 $H_\nu^{(1)}(k\rho)$ 仍有与(6.2.19)式相似的渐近表示式，但指数为 $+j$. 比较 $H_\nu^{(1)}(k\rho)$ 和 $H_\nu^{(2)}(k\rho)$ 的这两个渐近式，由于 ν_n 含有大的负虚部不难判断 $H_\nu^{(2)}(k\rho)$ 项是积分(6.2.24)式的主要项. 由于 ν 是与 ka 可比较的很大的量，对于 $H_\nu^{(1)}(ka)$，$H_\nu^{(2)}(ka)$ 可以使用 ν 很大时的渐近式①，这些渐近式是在 Hankel 函数的一致渐近展开式中代入 Airy 函数的适当的大宗量渐近值而得出的. 这样便可近似求出

$$\frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(2)}(ka)} \sim -1, \quad 当\ |\nu|>ka; \qquad (6.2.25a)$$

$$\frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(2)}(ka)} \sim \exp\left\{2j\left[(k^2a^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}-\nu\arccos\left(\frac{\nu}{ka}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}, \ 当\ |\nu|<ka. \qquad (6.2.25b)$$

① 见[6]，§2.2，第(58a)及(56)式.

所以,对于大的 $k\rho$ 值(6.2.24)式可以写成下面的形式

$$E_z \sim E_0\int_D h(\nu)\exp[\mathrm{j}g(\nu)]\mathrm{d}\nu, \tag{6.2.26}$$

其中当$|\nu|>ka$,

$$h(\nu) = -\{2\pi[(k\rho)^2-\nu^2]^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$g(\nu) = -[(k\rho)^2-\nu^2]^{\frac{1}{2}}+\nu\left[\arccos\left(\frac{\nu}{k\rho}\right)+\phi-\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{4};$$

当 $|\nu|< ka$,

$$h(\nu) = \{2\pi[(k\rho)^2-\nu^2]^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$g(\nu) = -[(k\rho)^2-\nu^2]^{\frac{1}{2}}+2[(ka)^2-\nu^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\nu\left[\arccos\left(\frac{\nu}{k\rho}\right)-2\arccos\left(\frac{\nu}{ka}\right)+\phi-\frac{\pi}{2}\right]-\frac{\pi}{4}.$$

积分(6.2.26)式容易用稳相法近似求值,现在有两个稳相点,分别由方程式

$$g'(\nu_0^+)=\arccos\left(\frac{\nu_0^+}{k\rho}\right)+\phi-\frac{\pi}{2}=0,\quad |\nu|>ka;$$

$$g'(\nu_0^-)=\arccos\left(\frac{\nu_0^-}{k\rho}\right)-2\arccos\left(\frac{\nu_0^-}{ka}\right)+\phi-\frac{\pi}{2}=0,\quad |\nu|<ka$$

确定. 这两个方程的解为

$$\nu_0^+=k\rho\sin\phi,\quad \nu_0^-=ka\cos\frac{\phi}{2}\quad (k\rho\to\infty). \tag{6.2.27}$$

稳相点 ν_0^- 和 ν_0^+ 为图 6.11 中积分路径 D 与实轴的交点. 由稳相法求出的积分值为

$$E_z \sim E_0\exp(-\mathrm{j}k\rho\cos\phi)-E_0\sqrt{\frac{a}{2\rho}\sin\frac{\phi}{2}}\exp\left[-\mathrm{j}k\left(\rho-2a\sin\frac{\phi}{2}\right)\right]$$
$$(k\rho\to\infty,\quad 0<|\phi|<\pi). \tag{6.2.28}$$

式中的第一项来自 ν_0^+ 点邻域的积分,为入射波;第二项为 ν_0^- 点邻域的贡献,相应于经圆柱面反射后到达观察点的反射波. 图 6.12 示出了对于第二项的几何解释. 在观察点 $P(\rho,\phi)$ 处入射波相对于 $x=0$ 平面的位相为 $-k\rho\cos\phi$,这就是(6.2.28)式中第一项的位相. 在柱面上的反射点,入射波相对于 $x=0$ 平面的位相为 $ka\ \sin(\phi/2)$,在柱面上反射后到达 P 点,相位变为

$$k[\rho-2a(\sin\phi/2)].$$

更精确的计算表明在阴影区和照明区之间存在着角度为$(ka)^{-1/3}$量级的"半影区".

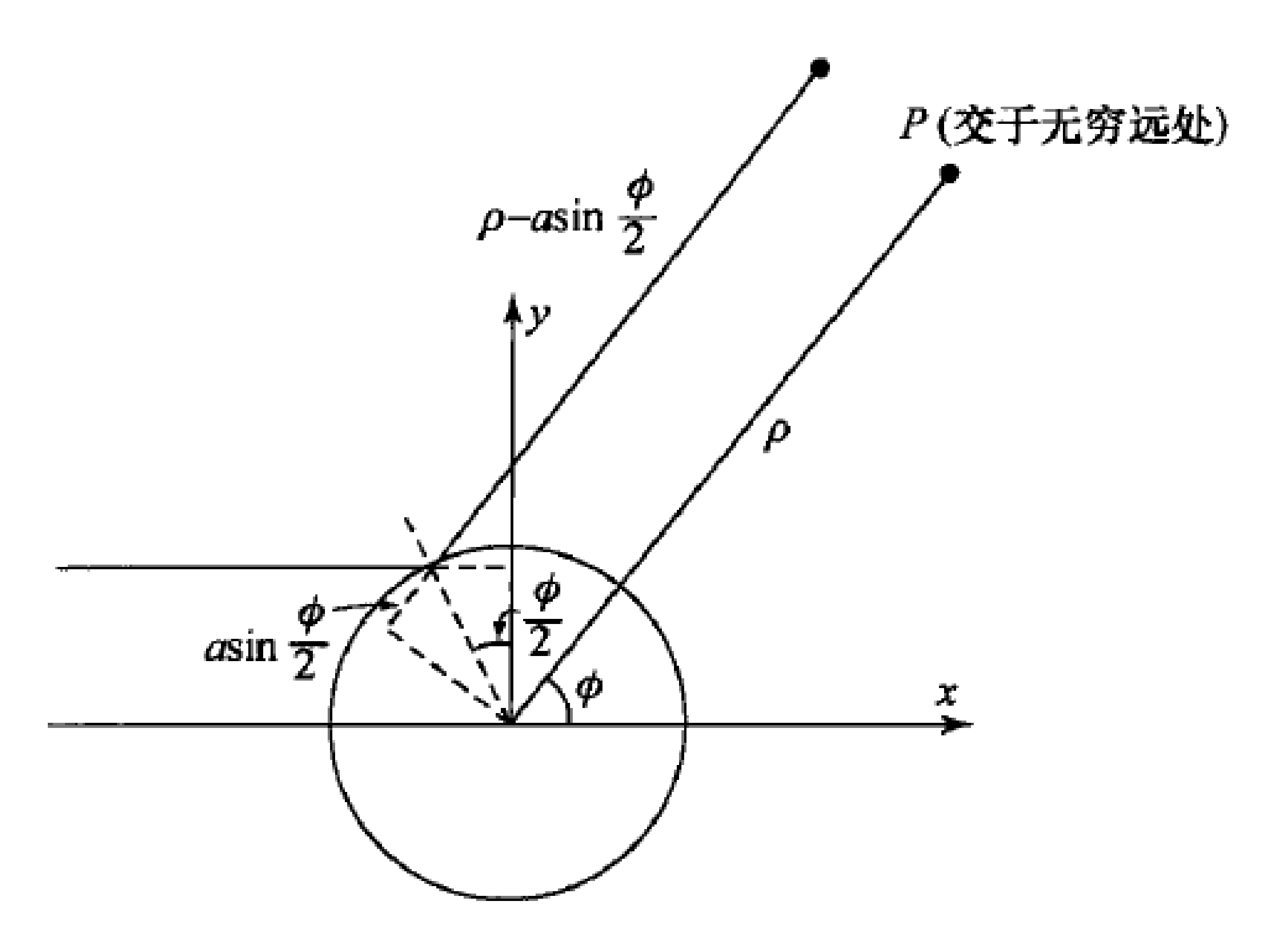


图 6.12　到达照明区的反射波相位的几何解释

§6.3　平面波在半平面导体边缘的衍射

1. 平面波的角谱

平面电磁波在无限薄的导体半平面边缘的衍射问题是衍射理论中第一个求得严格数学解的问题(Sommerfeld，1896，见[8]，§36)．与柱或球的衍射问题中用分离变数法得到的无穷级数解不同，Sommerfeld 在这里得到了闭合形式的解，其结果最后也可化为 Fresnel 积分，与 Kirchhoff 近似理论关于长狭缝衍射问题所得到的结果是一致的．我们在本节中所介绍的方法主要是根据 Clemmow 所使用的方法，即由平面波的角谱法立出积分方程，然后用回路积分法求解积分方程，最后可化成与 Sommerfeld 解相同的形式(见[3]，ch. 11 及[9，10])．

首先引入平面波角谱的概念．在§5.1 中我们已经知道在二维电磁场问题中电磁场的直角坐标分量 ψ 满足二维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0. \tag{6.3.1}$$

用极坐标(ρ,ϕ)表示的平面波的直角坐标分量，

$$\psi=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\alpha)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} \tag{6.3.2}$$

也是方程式(6.3.1)的解，这里 $x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$．若 α 为实数，ψ 表示传播方向与 x 轴成 α 角的均匀平面波；若 α 为复数则为非均匀平面波．我们考虑 α 为复数的一般情况，设 $\alpha=\alpha_1-\mathrm{j}\alpha_2$，$\alpha_1$ 和 α_2 分别表示 α 的实部和负虚部，则(6.3.2)式变为

$$\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cosh a_2\cos(\phi-a_1)}\mathrm{e}^{-k\rho\sinh a_2\sin(\phi-a_1)}. \tag{6.3.3}$$

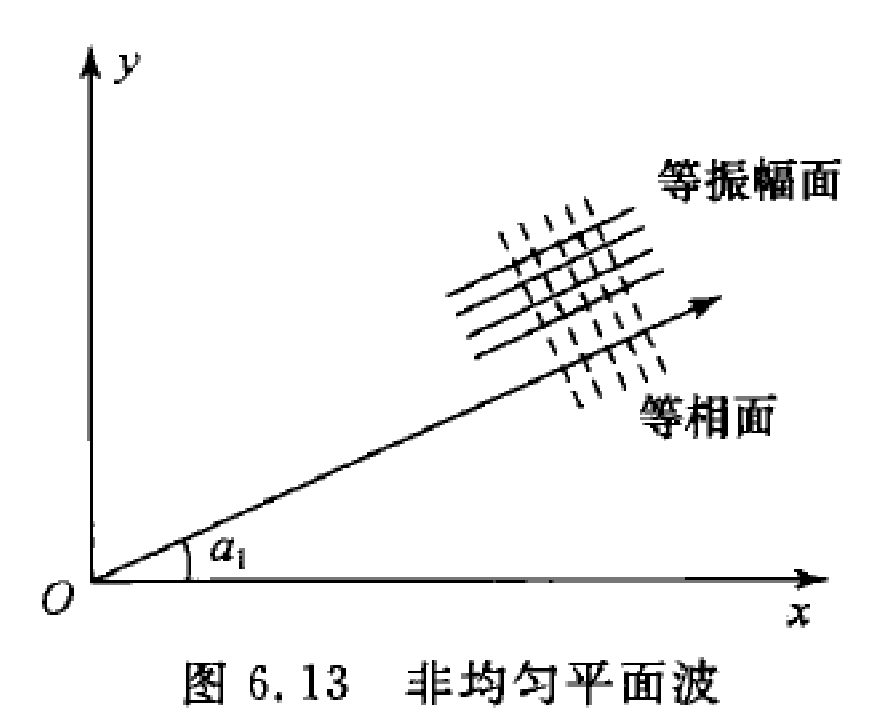


图 6.13 非均匀平面波

不难看出,(6.3.3)式所表示的平面波的等相面沿着与 x 轴成 a_1 角的方向传播,但等振幅面与等相面垂直,波的振幅沿与 a_1 成直角的方向指数衰减(图 6.13).将 a 的所有可能取值对应的平面波特解(6.3.2)式叠加起来就构成了二维波方程(6.3.1)的通解:

$$\psi = \int A(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}\mathrm{d}a. \tag{6.3.4}$$

这种由所有可能的传播角方向的平面波解构成波动方程通解的方法,从概念上与任意函数用 Fourier 积分表示是相似的,因此系数 $A(a)$ 可以称作 ψ 的平面波角谱.

2. 导体半平面的散射场

我们将要讨论的平面电磁波在半平面导体边缘的衍射问题示于图 6.14.导体面处于 $y=0$ 平面的 $x>0$ 半平面上,假定入射平面波为 E 型波,垂直地投射于导体半平面的边缘(z 轴).当波的入射角为 ϕ_0 时入射波的仅有电场分量为

$$E_z^{\mathrm{i}} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(x\cos\phi_0+y\sin\phi_0)} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)}. \tag{6.3.5}$$

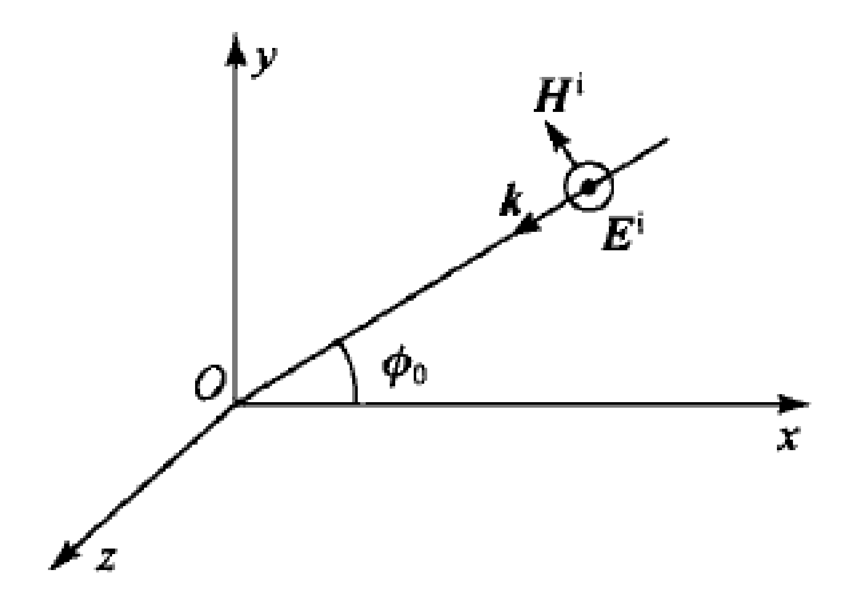


图 6.14 E 型平面波垂直投射于导体半平面边缘

入射波在导体面上将激励 z 方向的感应面电流,感应面电流产生的场为散射场.在 $y>0$ 半空间中沿 a 角出射的散射场的直角坐标分量可写作

$$E_z^{\mathrm{sc}}(a) = F(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}, \tag{6.3.6a}$$

$$H_x^{\mathrm{sc}}(a) = \frac{1}{Z}F(a)\sin a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}, \tag{6.3.6b}$$

$$H_y^{\mathrm{sc}}(a) = -\frac{1}{Z}F(a)\cos a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}, \tag{6.3.6c}$$

这里 $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质 μ,ε 中的波阻抗.由导体面上的边界条件可求出散射场的这个角分量相应的感应面电流

$$J_{sz}(a) = -H_x^{\mathrm{sc}}(a)\big|_{\phi=0} = -\frac{1}{Z}F(a)\sin a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos a}. \tag{6.3.7}$$

所有可能的散射场角分量对应的感应面电流的叠加便构成导体面上的感应面

电流

$$J_{sz}(x) = -\int_C \frac{1}{Z}F(a)\sin a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos a}\mathrm{d}a, \tag{6.3.8}$$

这里积分路径 C 应选择得对于 a 的所有可能值求积分. 为在复 a 平面上选取适当的积分路径 C 我们先通过变换 $\mu=\cos a$ 将(6.3.8)式变换为

$$J_{sz}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{Z}F(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\mu}\mathrm{d}\mu = \int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{Z}F(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\mu}\mathrm{d}\mu. \tag{6.3.9}$$

如果选择图 6.15 所示的从 $0-\mathrm{j}\infty$ 经实轴到 $\pi+\mathrm{j}\infty$ 的积分路径，则相应的 μ 将取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有值，如此选取的积分路径 C 已使积分(6.3.8)式包括了 a 的所有可能取值. (6.3.9)式表明散射场的平面波角谱 $F(\mu)$ 是导体面上感应面电流分布的 Fourier 变换.

图 6.15　式(6.3.8)中的积分路径 C 在复 a 平面上的走向

如此，$y>0$ 半空间中的散射场可以用复 a 平面上的路径积分表示为

$$E_z^{sc}(\rho,\phi) = \int_C F(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.10a}$$

$$H_x^{sc}(\rho,\phi) = \frac{1}{Z}\int_C F(a)\sin a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.10b}$$

$$H_y^{sc}(\rho,\phi) = -\frac{1}{Z}\int_C F(a)\cos a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-a)}\mathrm{d}a. \tag{6.3.10c}$$

在 $y<0$ 半空间中的散射场可以根据对称性直接写出：

$$E_z^{sc}(\rho,\phi) = \int_C F(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.11a}$$

$$H_x^{sc}(\rho,\phi) = -\frac{1}{Z}\int_C F(a)\sin a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.11b}$$

$$H_y^{sc}(\rho,\phi) = -\frac{1}{Z}\int_C F(a)\cos a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.11c}$$

在散射场的路径积分表示式(6.3.10a,b,c)和(6.3.11a,b,c)中沿实轴上的一段路径积分相应的平面波为均匀平面波，已包括了 a 从 $0\to\pi$ 的所有可能取值. 在路径 C 的两个垂直臂上 a 取值分别为 $a=-\mathrm{j}\beta$ 或 $a=\pi+\mathrm{j}\beta$，β 取值从 $0\to\infty$，波的对应角分量的相位传播方向为 $+x$ 轴向($a_1=0$)或 $-x$ 轴向($a_1=\pi$)，而振幅沿 $\pm y$ 方向衰减，对应的非均匀平面波为离开 $y=0$ 平面指数衰减的表面波(亦称为雕落波)，它们是导体面上的感应面电流分布所产生的近场的主要成分.

3. 半平面衍射问题的积分方程

利用散射场的路径积分表示式(6.3.10)和(6.3.11)可以很容易地得出半平面衍射问题的积分方程. 在 $y=0$ 平面的导体面($x>0$)和孔平面($x<0$)上电磁场切线分量应满足的关系是

$$E_z^{\mathrm{i}}+E_z^{\mathrm{sc}}=0 \quad (x>0), \tag{6.3.12a}$$

$$H_x^{\mathrm{sc}}=0 \qquad (x<0). \tag{6.3.12b}$$

在入射场的(6.3.5)式和散射场的(6.3.10a,b)式中令 $\phi=0$,$\rho=x$,代入(6.3.12a,b)式后分别得

$$\int_C F(a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos a}\mathrm{d}a=-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\cos\phi_0} \quad (x>0), \tag{6.3.13a}$$

$$\int_C \frac{1}{Z}F(a)\sin a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos a}\mathrm{d}a=0 \quad (x<0). \tag{6.3.13b}$$

为简单起见在此处已令(6.3.5)式中入射场的振幅 $E_0=1$. 为便于方程式(6.3.13a,b)的求解,通过变换 $\mu=\cos a$ 将它们从复 a 平面变换到复 μ 平面,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}F(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\mu}\mathrm{d}\mu=-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\cos\phi_0}=-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\mu_0} \quad (x>0), \tag{6.3.14a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\mu}\mathrm{d}\mu=0 \quad (x<0). \tag{6.3.14b}$$

在(6.3.14a)式中已令 $\mu_0=\cos\phi_0$,不难知道 $\mu=\pm1$ 是被积函数的分支点,为保证单值性需在复 μ 平面上作分支切割,适当的分支切割及为避开分支切割对于积分路径所作的变形示于图 6.16.

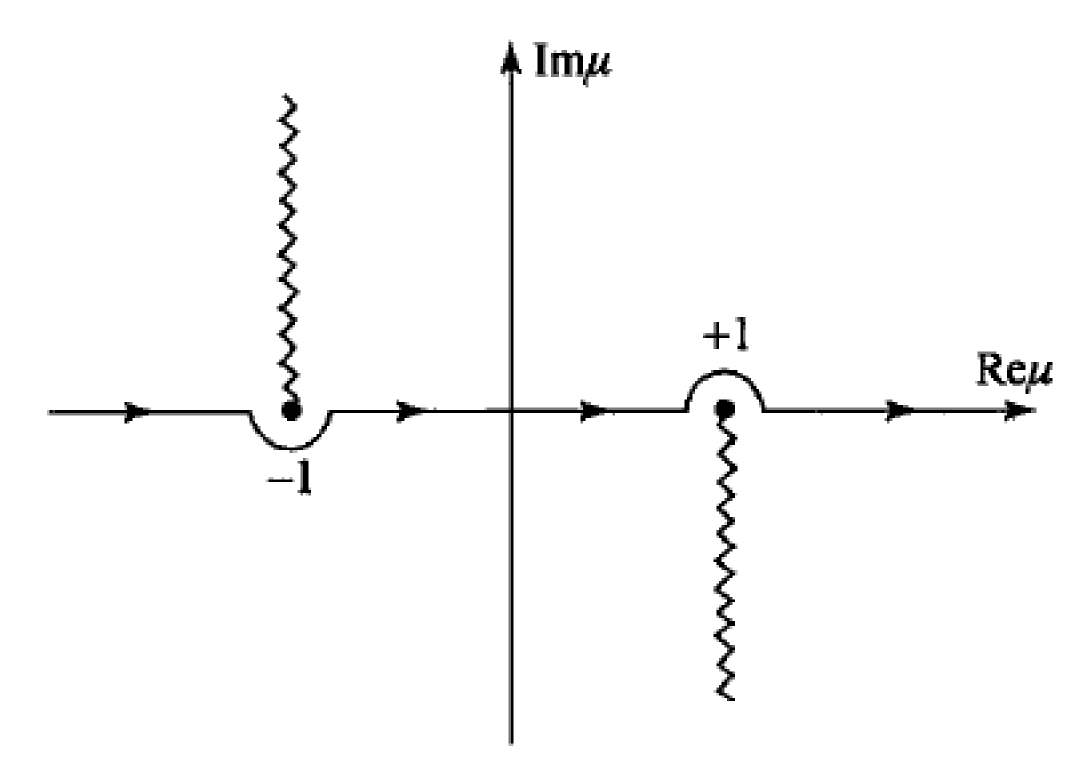


图 6.16 为求解方程(6.3.14),在复 μ 平面上所作分支切割和积分路径

4. 用回路积分法求解积分方程

现在我们用回路积分法来求解积分方程(6.3.14). 先来看较简单的(6.3.14b)式,在这个方程式中 $x<0$,因为在上半复 μ 平面上 μ 有正虚部,当 $|\mu|\to\infty$ 时若

有 $F(\mu)\to 0$ 就可以用上半复 μ 平面上的半径无穷大半圆将积分路径闭合. 因此，上半复 μ 平面上的任何规则函数 $F(\mu)$ 均可满足积分方程(6.3.14b).

在方程(6.3.14a)中 $x>0$，当 $|\mu|\to\infty$ 时，若 $F(\mu)/\sqrt{1-\mu^2}\to 0$，在下半复 μ 平面上由于 μ 有负虚部，所以可用下半复 μ 平面上的无穷大半径半圆将积分路径闭合. 如果将图 6.16 所示的积分路径变形如图 6.17 所示，变形后的积分路径已将 $\mu=-\mu_0$ 点包含于下半平面的积分围线内，设 $U(\mu)$ 是在下半平面上无奇异性的任意函数，则由留数定理不难知道

$$\frac{F(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\frac{1}{\mu+\mu_0} \tag{6.3.15}$$

是积分方程(6.3.14a)的解. 如果能进一步确定函数 $U(\mu)$ 的具体形式，该积分方程的求解问题便告解决.

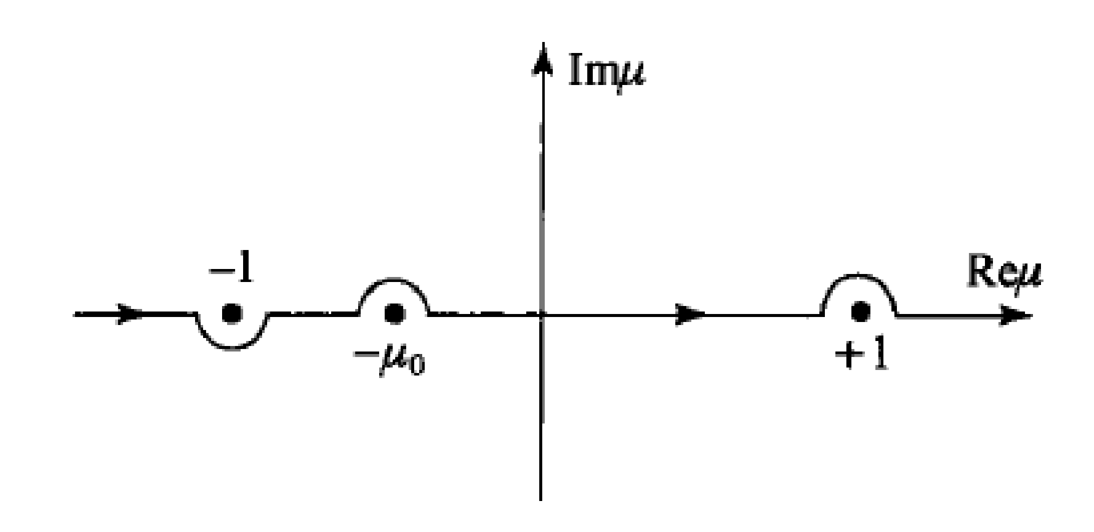


图 6.17 为避开图 6.16 积分路径上的极点所作的变形

为得到 $F(\mu)$ 的具体形式我们将解(6.3.15)式变形为

$$\frac{F(\mu)}{\sqrt{1-\mu}}(\mu+\mu_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\sqrt{1+\mu}. \tag{6.3.16}$$

上式的左侧在积分路径以上的上半平面内无奇异性，右侧在积分路径以下的下半平面内具有同样的性质. 由于已知当 $|\mu|\to\infty$ 时在上半平面内 $F(\mu)\to 0$，故上式左侧的函数在上半平面内为有界函数，而在下半平面内无奇异性的右侧的函数与它相等，这两者合起来构成了全复 μ 平面上的解析有界函数，根据 Liouville 定理①这个函数只能是常数.

在(6.3.16)右侧的函数中令 $\mu=-\mu_0$ 求出这个常数后就可得到积分方程(6.3.14)的解

$$F(\mu)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\frac{\sqrt{1-\mu_0}\sqrt{1-\mu}}{\mu+\mu_0}, \tag{6.3.17}$$

变换回以 a 作为自变量的形式得

---

① 见，例如，郭敦仁，《数学物理方法》，§4.6，高等教育出版社，1965.

$$F(\cos a) = \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \frac{\sin \frac{1}{2}\phi_0 \sin \frac{1}{2}a}{\cos a + \cos\phi_0}. \tag{6.3.18}$$

在角谱函数的表示式(6.3.18)中 a 和 ϕ_0 是对称的，这实际上是电磁互易定理的体现.

半平面衍射问题中(ρ,ϕ)点的 E_z 由 E_z^{i} 和 E_z^{sc} 之和构成，以(6.3.18)式代入(6.3.10a)式或(6.3.11a)式后即得

$$E_z(\rho,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)} + \frac{1}{\pi \mathrm{j}}\int_C \frac{\sin \frac{1}{2}\phi_0 \sin \frac{1}{2}a}{\cos a + \mathrm{coa}\phi_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi\mp a)}\mathrm{d}a, \tag{6.3.19}$$

这里，对于 $y>0$ 半空间被积函数指数中的 a 前面取一号，对于 $y<0$ 半空间 a 前取+号.

求解(6.3.14)式这种类型的、定义于有公共区域的两个半无界区域上的一对积分方程的典型方法是一种特殊的积分变换法，称为 Wiener-Hopf 方法[①]，但在这里我们可以看到用回路积分法求解半平面的衍射问题是相当简单的.

5. 积分方程的解化为 Fresnel 积分

可以将半平面衍射问题的解(6.3.19)式化成用 Fresnel 积分表示的形式，这样做不但可以利用已有的 Fresnel 积分表进行数值计算，而且解也将具有更为清晰的物理意义. 为此，我们先用简单的三角函数关系将(6.3.19)式中的散射场的路径积分表示式变换为

$$\begin{aligned} E_z^{\mathrm{sc}}(\rho,\phi) &= \frac{1}{\pi \mathrm{j}}\int_C \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}\phi_0 \sin \frac{1}{2}a}{\cos a + \cos\phi_0}\exp[-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi\mp a)] \right\}\mathrm{d}a \\ &= \frac{1}{4\pi \mathrm{j}}\int_C \left[\sec\left(\frac{a+\phi_0}{2}\right) - \sec\left(\frac{a-\phi_0}{2}\right)\right]\exp[-\mathrm{j}k\rho\cos(\phi\mp a)]\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

显然，这个路径积分容易用 §4.7 中介绍过的最速下降法来近似求值. 对于 $y>0$ 半空间中的散射场(6.3.20)式的鞍点为 $a=\phi$，通过鞍点 ϕ 的最速下降路径 $S(\phi)$ 示于图 6.18.

图 6.18 中的积分路径 C 可以用扇形区域内的无穷大半径的半圆沿顺时针方向闭合成回路. 在路径 C 上的一阶极点 $a=\pi-\phi_0$ 已通过无穷小半径的半圆避开，如图 6.18 所示. 完成路径的闭合后沿 C 的积分就可变形为沿最速下降路径

① 关于 Wiener-Hopf 方法可参考 R. E. Collin, Field theory of guided waves, 2nd ed., §10.1, IEEE Press, 1991；或 E. Yamashita, Analysis methods for electromagnetic wave problems, ch. 8, Artech House, 1990.

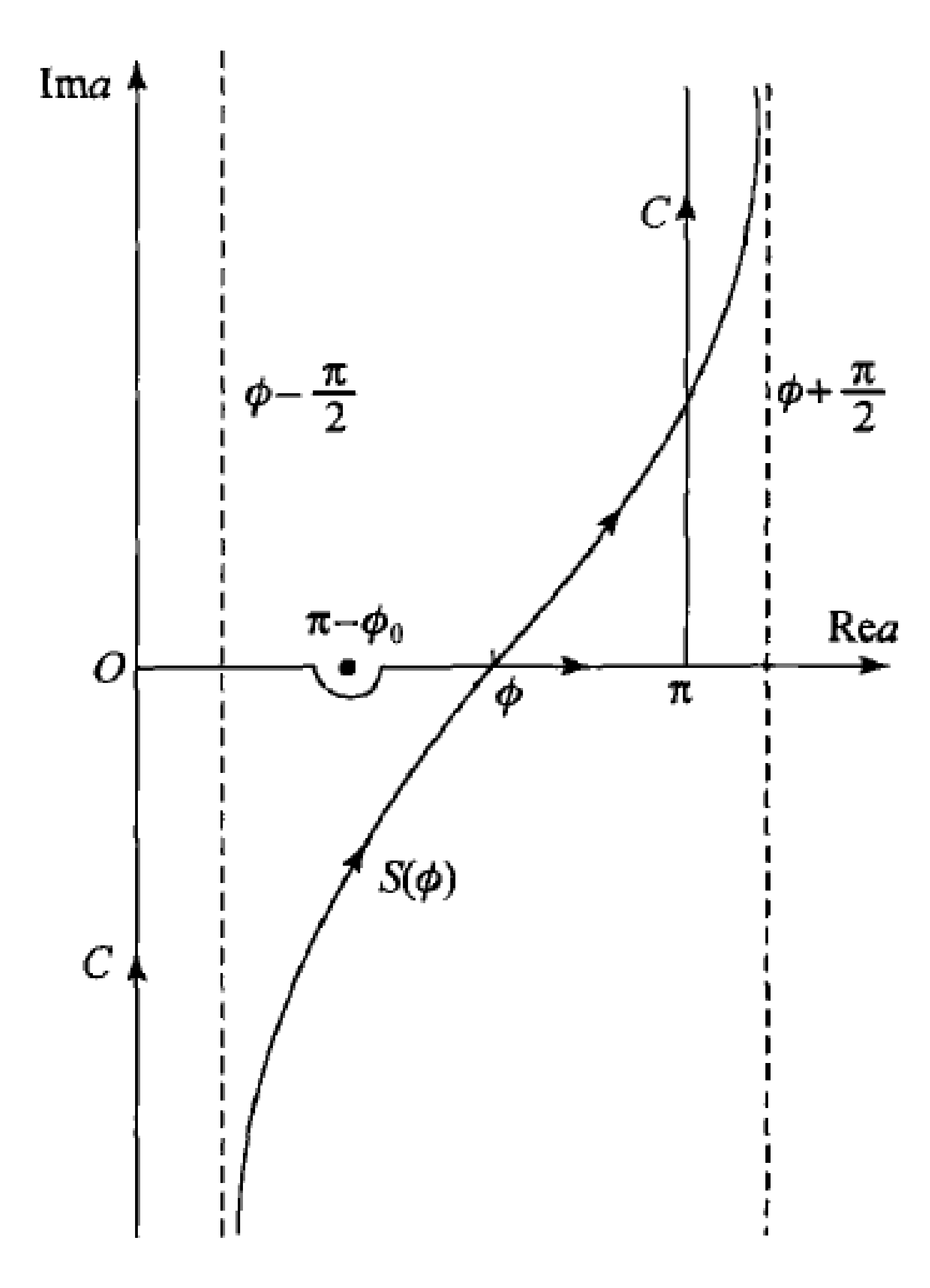


图 6.18　式(6.3.20)中的积分路径 C 在复 a 平面上的走向和变形为通过鞍点的最速下降路径

$S(\phi)$的积分：

$$E_z^{sc}=\frac{1}{4\pi j}\int_{S(\phi)}\left[\sec\left(\frac{a+\phi_0}{2}\right)-\sec\left(\frac{a-\phi_0}{2}\right)\right]\exp[-jk\rho\cos(\phi-a)]da. \tag{6.3.21}$$

但是，当 $\phi<\pi-\phi_0$ 时在路径 C 变形为路径 $S(\phi)$的过程中积分路径将会通过极点 $a=\pi-\phi_0$，因此在(6.3.21)式中还应该加上积分回路中所包围的这个一阶极点的贡献而改写成

$$E_z^{sc}=\frac{1}{4\pi j}\int_{S(\phi)}\left[\sec\left(\frac{a+\phi_0}{2}\right)-\sec\left(\frac{a-\phi_0}{2}\right)\right]\exp[-jk\rho\cos(\phi-a)]da$$
$$-2\pi j\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\pi j}\oint\{\cdot\}da\right]_{a=\pi-\phi_0}，当\ \phi<\pi-\phi_0. \tag{6.3.22}$$

这里$\{\cdot\}$表示(6.3.20)第一个等式中$\{\cdot\}$内的被积函数，留数项前面的负号是由于现在路径的绕向为负方向. 我们先求出沿最速下降路径的积分，然后再加上极点的贡献.

显然，求(6.3.22)式中沿 $S(\phi)$的积分值时仅需直接计算方括号中第一项的积分：

$$I_1=\int_{S(\phi)}\sec\left(\frac{a+\phi_0}{2}\right)\exp[-jk\rho\cos(\phi-a)]da, \tag{6.3.23}$$

然后在求得的结果中令 $\phi_0=-\phi_0$ 就可得第二项的积分值. 在(6.3.23)式中作变

量变换 $a=a'+\phi$,则 I_1 变为

$$I_1=\int_{S(\phi)}\sec\left(\frac{a'+\phi+\phi_0}{2}\right)\exp[-\mathrm{j}k\rho\cos a']\mathrm{d}a'$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S(\phi)}\left[\sec\left(\frac{a'+\phi+\phi_0}{2}\right)+\sec\left(\frac{a'-\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\exp[-\mathrm{j}k\rho\cos a']\mathrm{d}a'$$

$$=2\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\int_{S(\phi)}\frac{\cos\frac{1}{2}a'\exp[-\mathrm{j}k\rho\cos a']}{\cos a'+\cos(\phi+\phi_0)}\mathrm{d}a'. \tag{6.3.24}$$

再一次作变量变换,令

$$t=\sqrt{2}\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{1}{2}a',$$

当沿最速下降路径 $S(\phi)$ 积分时 t 将取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的实数值.

因为 $\cos a'=1-\mathrm{j}t^2$,所以当 $k\rho\gg1$ 时(6.3.24)式被积函数的指数项随着离开 $t=0$ 点迅速衰减. 积分 I_1 用变量 t 表示为

$$I_1=-2b\exp\left[-\mathrm{j}\left(k\rho+\frac{\pi}{4}\right)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-k\rho t^2)}{t^2+\mathrm{j}b^2}\mathrm{d}t, \tag{6.3.25}$$

其中 $b=\sqrt{2}\cos\left[\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)\right]$,上式可以改写为用 Fresnel 积分表示的形式.

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\zeta t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\zeta}},$$

利用此式可将(6.3.25)右侧的积分化成 Fresnel 积分的形式,以 $\exp(-\mathrm{j}k\rho b^2)$ 乘以该积分,经运算后(具体过程见[9],p. 52)可得下式:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho b^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k\rho t^2}}{t^2+\mathrm{j}b^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\int_{k\rho}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b^2\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\mathrm{d}\zeta=\frac{2\sqrt{\pi}}{|b|}\int_{|b|\sqrt{k\rho}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

若定义 Fresnel 积分为

$$F(a)=\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau^2}\mathrm{d}\tau \tag{6.3.26}$$

就有

$$b\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-k\rho t^2}}{t^2+\mathrm{j}b^2}\mathrm{d}t=\pm2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho b^2}F(\pm b\sqrt{k\rho}),$$

当 $b>0$ 时用上面的符号,$b<0$ 时用下面的符号. 于是,用(6.3.26)式定义的 Fresnel 积分,(6.3.25)式可表示为

$$I_1=\mp4\sqrt{\pi}\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[\pm\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right], \tag{6.3.27}$$

式中符号的选择取决于 $\cos\left[\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)\right]\gtrless0$ 或 $\phi\lessgtr\pi-\phi_0$. 在(6.3.27)式中将

ϕ_0 用 $-\phi_0$ 代替就得到(6.3.21)式方括号中第二项的积分值,但不会有符号的选择问题.

剩下的问题是求出当 $\phi<\pi-\phi_0$ 时才有的极点贡献项.根据留数定理不难求出极点的贡献为

$$I_{\mathrm{P}}=-\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)],\tag{6.3.28}$$

显然它相应于几何光学近似中从半平面导体被入射波照明的一侧发出的反射波.于是在 $y>0$ 半空间中的散射场可表示为

$$E_z^{sc}(\rho,\phi)=\frac{\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\pm\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[\pm\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]F\left[\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right\}-\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)],\tag{6.3.29}$$

最后一项仅当 $\phi<\pi-\phi_0$ 时才存在.(6.3.29)式加上入射场 $\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]$ 构成了 $y>0$ 半空间中的总场 $E_z(\rho,\phi)$.利用关系式

$$F(a)+F(-a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mathrm{j}\tau^2)\mathrm{d}\tau=\sqrt{\pi}\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)$$

可进一步将入射波和反射波并入 Fresnel 积分,最后 $y>0$ 半空间中的总场可写成非常简单的形式

$$E_z(\rho,\phi)=\frac{\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right\}.\tag{6.3.30}$$

在求 $y<0$ 半空间中的散射场时,积分

$$\int_C\frac{\sin\frac{1}{2}\phi_0\sin\frac{1}{2}a}{\cos a+\cos\phi_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+a)}\mathrm{d}a$$

的一阶极点位于 $a=\pi+\phi_0$,仅当 $\phi>\pi+\phi_0$ 时才会被最速下降路径 $S(2\pi-\phi)$ 扫过.$\phi>\pi+\phi_0$ 区域相当于半平面下面的几何光学阴影区,在阴影区内的极点项刚好与入射波相抵消.因此,(6.6.30)式给出的 $E_z(\rho,\phi)$ 的表示式是对于整个 $0\sim2\pi$ 区间内的任何 ϕ 和 ϕ_0 值均正确的表示式,这也正是 Sommerfeld(1896)首先得到的半平面问题的精确解的形式.

6. 解的特性

Sommerfeld 解的重要特征在于它是以 4π 为周期的函数,这使得 E_z 可以满足在半平面导体的上、下两个面($\phi=0,2\pi$)上为零但在 $\phi=\pi$ 面上却不为零的条

件. 如果在 $k\rho\gg1$ 的条件下将解(6.3.30)式简化还可得到更为清晰的物理图像. 我们令

$$u=-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0),$$

$$v=-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0),$$

$$G(a)=e^{ja^2}F(a),$$

(6.3.30)式可以用这些符号简写为

$$E_z(\rho,\phi)=\frac{\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}e^{-jk\rho}[G(u)-G(v)]. \tag{6.3.30a}$$

在 $k\rho\gg1$ 的条件下除去在 $\phi=\pi-\phi_0$ 和 $\phi=\pi+\phi_0$ 附近的小区域外分别有 $|v|\gg1$ 和 $|u|\gg1$,而函数 $G(a)$ 仅对于 $|a|$ 的小值才取较大的值. 参量 u 和 v 的数量级的空间分布形成了场解与几何光学概念符合的五个空间区域(见图 6.19). 反射区内的场是入射场与反射场之和,照明区内仅为入射场,影区内则为雕落场. 在两个过渡区内的衍射场形成了两个相邻区域内的几何光学场之间的平滑过渡. 实际上在以 $\phi=\pi-\phi_0$ 和 $\phi=\pi+\phi_0$ 为中心的这两个过渡区域内,由于函数 G 取较大的值,衍射场达到了与入射场相同的数量级,衍射场与入射场叠加而形成干涉条纹. 当 E 型平面波以 $\phi_0=\pi/2$ 垂直投射于半平面导体边缘上时在 $y=-3\lambda_0$ 平面上测量到的 $|E_z|$ 分布示于图 6.20,在这里可看到衍射场与入射场叠加形成的干涉条纹.

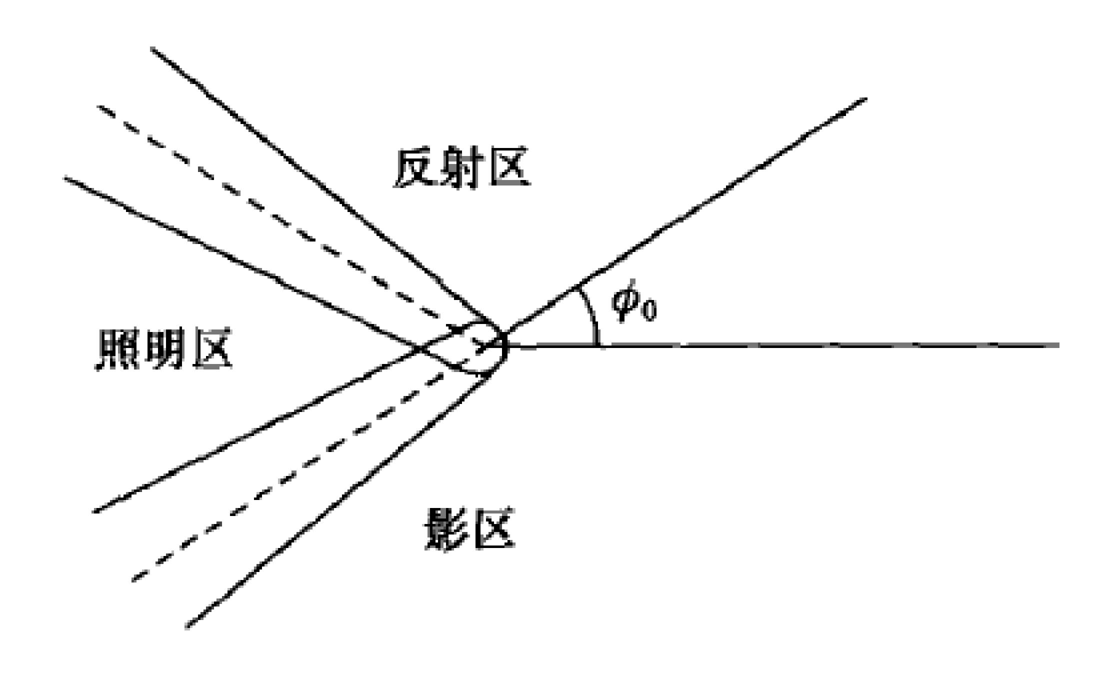


图 6.19 半平面边缘衍射问题场解的五个空间区域

对于 $k\rho\ll1$ 下所得到的半平面边缘附近的近场的研究表明,磁场具有 $\rho^{-\frac{1}{2}}$ 量级的奇异性($y=0$ 平面除外). 场的奇异性是由于无限薄导体的假设引起的,而无限薄导体的模型对于边缘衍射问题的严格理论处理则是必需的. 尽管场存在着这样的奇异行为,但场是可积的,即场中的储能仍然有限,在这样的条件之

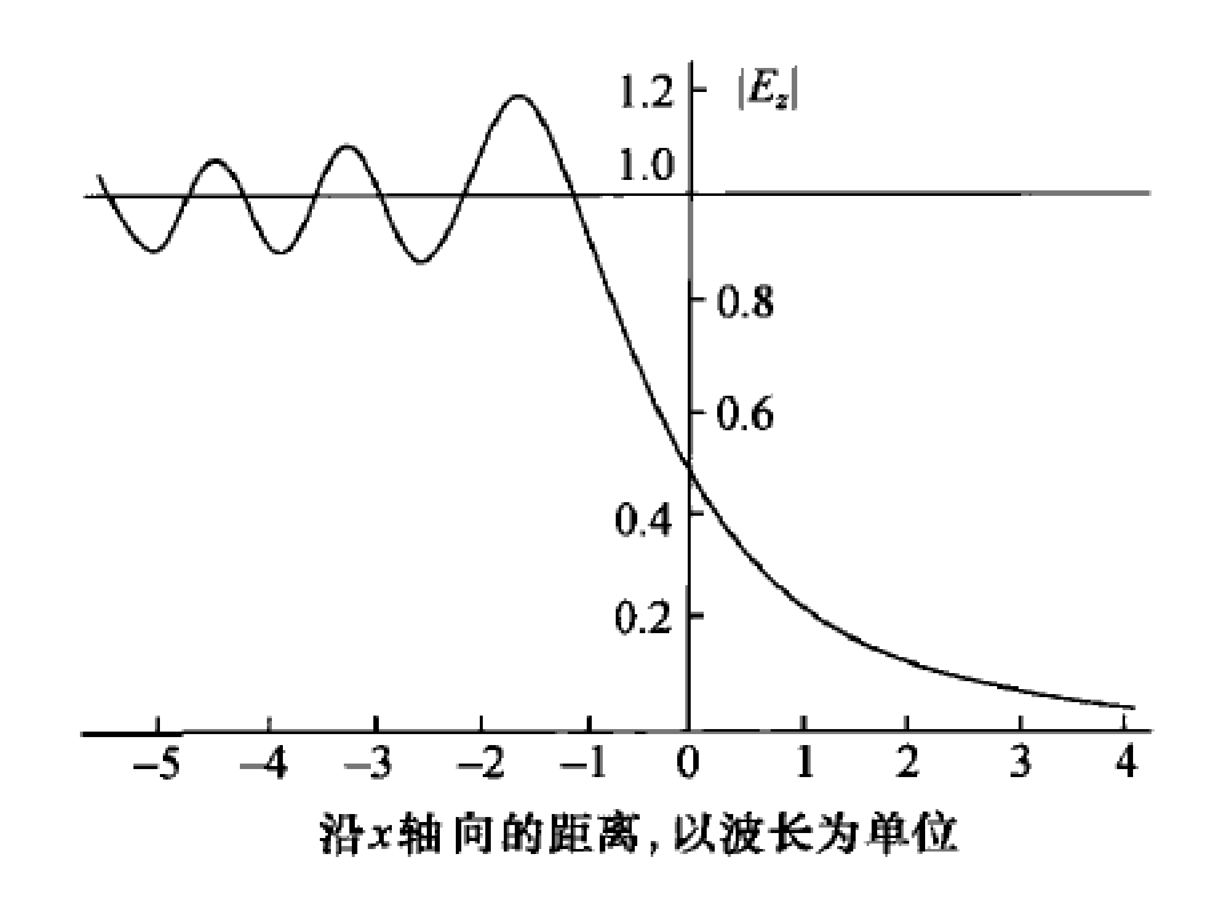


图 6.20 E 型平面波垂直投射于导体半平面边缘时，平面下电场分布显示的照明区干涉条纹和阴影区场的雕落

下可保证得到唯一的解. 关于电磁场在导体边缘的行为可参考 Meixner 的论文①.

§6.4 地波绕地球表面的传播

1. 早期研究概述

自从 Marconi 于 1901 年首次实现了无线电波从苏格兰到纽芬兰的横越大西洋传播以来，无线电波绕地球表面长距离传播问题就引起了科学界的持续研究兴趣. 我们在 §4.7 中论述了 Sommerfeld 在此背景下于 1909 年发表的以有耗平面半空间上偶极子辐射问题为模型的开创性研究. Sommerfeld 的研究肯定了 Zenneck 于 1907 年提出的表面波的概念，开启了电磁表面波沿有耗半空间表面传播问题的持续研究.

另一方面，数学家 Watson 于 1918 年发表了电磁波绕地球表面衍射问题的研究论文②，基于发射和接收天线都在地球表面的简化模型，这个问题的解可用球坐标下标量波动方程解的球 Hankel 函数的级数式表示，但遇到级数求和的收敛困难. Watson 提出了将球 Hankel 函数的级数展开式变换为复平面上回路积分，以克服收敛困难，这就是著名的 Watson 变换. 我们在 §6.2 中已详细论述

① J. Meixner, The behavior of electromagnetic fields at edges, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. AP-20, pp. 442—446, 1972.

② G. N. Watson, The diffraction of electric waves by the Earth, *Proc. Roy. Soc.*, *London*, Ser. A, vol. 95, pp. 83—99, 1918.

了利用 Watson 变换求解平面电磁波在导体圆柱上衍射场的过程,可以看出即使使用 Watson 变换,这个求解过程也相当复杂. 尽管如此,Watson 求出的衍射区的场成为后来许多研究结果的检验标准.

不同于 Watson 直接求球坐标下标量波动方程的解,苏联学者 Fock 在 1945 年发表的论文中将标量波动方程的解表示成 $\exp(-jk_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)$ 与一个慢变函数 W 的乘积,以满足点源位于球面以上时导体球面的边界条件. 这个乘积解的前一个因子是当地球不存在时处于 $\boldsymbol{r}_0$ 点的点源的自由空间解,后一因子 W 称为衰减函数,满足二阶抛物型偏微分方程,问题便转化成抛物型方程的求解[①].

以荷兰学者 Van der Pol 和 Bremmer 为代表的一批学者在 20 世纪 30 年代沿着 Sommerfeld 和 Watson 的求解路线继续研究. 使用适合于地球表面的物质常数,他们完成了留数级数的许多数值计算工作,发表了多篇论文,许多结果后来也汇集于 Bremmer 的专著中[②]. Fock 用 Airy 积分给出的结果与荷兰学者用三分之一阶球 Hankel 函数给出的结果一致. 在 Bremmer 以及美国学者 Norton 等人的研究中已经考虑到低层大气(对流层)的折射率随离地面高度变化对沿地球表面传播的表面波的影响,通常认为低层大气的折射率随离地面的高度以线性律递减. 基于 20 世纪 30 年代后期完成的数值计算工作,Norton 于 1941 年发表了便于工程应用的地波场强计算曲线[③].

Norton 在这篇论文中将"地波"一词的涵义界定为:"地波是指无线电波的一部分,它在空间中的传播受到地的影响;地波不包括受到除地面之外的任何其他部分反射的波;因此电离层波(sky waves)和对流层波不包括在内."由于低层大气的折射率随离地面的高度递减,地波受到大气的轻微折射. Norton 提出大气折射对于地波传播的影响可以用增大的地球半径来补偿,由此引入有效地球半径的概念,它等于地球的实际半径乘以一个大于 1 的乘子. 该乘子的具体取值与波的频率有关,当高于 30 MHz 时通常取作 1.33. 依据 Sommerfeld 提出的概念,在距发射天线的短传播距离内,地波由空间波和表面波之和构成,空间波由天线的直射波和直射波经地面反射后的反射波叠加而成. 但空间波不能达到切于地表的直视距以远的阴影区,只有表面波可传播到此区域,所以表面波是衍射波,在阴影区中的地波所指就是表面波. 使用有效地球半径相当于将直射线在球面上的切点推到了更远处.

---

① V. A. Fock, Diffraction of radio waves around the Earth's surfaces, *J. Phys.*, *U. S. S. R*, vol. 9, pp. 256—266, 1945.

② H. Bremmer, Terrestrial radio waves, Elsevier, 1949.

③ K. A. Norton, The calculation of ground-wave field intensity over a finitely conducting spherical Earth, *Proc. IRE*, vol. 29, pp. 623—639, Dec. 1941.

基于均匀的地球表面上垂直或水平短电流元辐射的模型，运用 Watson 变换计算沿地球表面传播的表面波场强的详细过程已经在 Wait 的两部专著中给出①，我们在此不作重复. 在后一著作中，Wait 对于有效地球半径概念的正确性作出了数学证明. 但是，这种解析性的理论研究只能建立在理想化的地球模型之上，需要假定地表的电磁常数是均匀的，而且表面光滑. 然而实际上在表面波传播的路径上介质常数可能会发生很大变化，例如从陆地面到水面、海洋；由于地形起伏、山丘或植物、建筑物等，地表也不是光滑的. 因此，需要有更切合地球表面实际条件的模型和研究方法.

20 世纪 70 年代，在以声纳研究为背景的海洋声波传播问题的研究中，使用分步 Fourier 变换求解抛物型偏微分方程的数值方法获得相当的发展，这种方法可应用于在垂直和水平两个方向上具有不均匀声速的媒质中的声波传播问题. 受此推动，从 20 世纪 80 年代开始展开了用分步 Fourier 变换的数值解法求解抛物型方程以解决在实际地面和大气条件下地波传播问题的研究，结果表明这种方法对于传播路径上地面电磁常数不均匀和垂直方向上大气折射率随高度变化的复杂条件下地波传播问题的求解是有效的. 因此，在本节中我们主要论述用抛物型方程方法求解地波沿地球表面传播问题的原理，主要依据 Kuttler 和 Dockery 的论文②.

2. 理想导体球面地球外竖直电偶极子的场；抛物型方程近似

我们使用如下的模型来研究地波沿地球表面传播. 地球设为理想导体，半径为 a，考虑地表以上距球心 $r_s(r_s \geqslant a)$ 的竖直电偶极子的辐射场沿地表的传播. 考虑到地球的旋转对称性，将由球心引向电偶极子的直线取作球坐标的极轴，如图 6.21 所示，这样整个几何结构对于 z 轴具有轴对称性，球面以上大气的电磁常数也如此，设为 $\varepsilon=\varepsilon(r,\theta)$，$\mu=\mu_0$.

对于在地表以上非均匀大气中传播的电磁波，由 Maxwell 方程组出发可导出磁场满足下面的矢量波动方程：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \frac{1}{\varepsilon(r,\theta)} \nabla\varepsilon(r,\theta) \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \omega^2 \mu\varepsilon(r,\theta)\boldsymbol{H} = 0. \qquad (6.4.1)$$

对于图 6.21 所示几何结构，由仅有的矢势分量 A_z 导致场仅有三个非零球坐标

---

① J. R. Wait, Electromagnetic surface waves, *in* Advances in radio research, vol. 1, J. A. Saxton ed., pp. 157—217, Academic Press, 1964; Electromagnetic waves in stratified media, ch. 5, IEEE Press, 1996.

② J. R. Kuttler and G. D. Dockery, Theoretical description of the parabolic approximation/Fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere, *Radio Science*, vol. 26, no. 2, pp. 381—393, 1991.

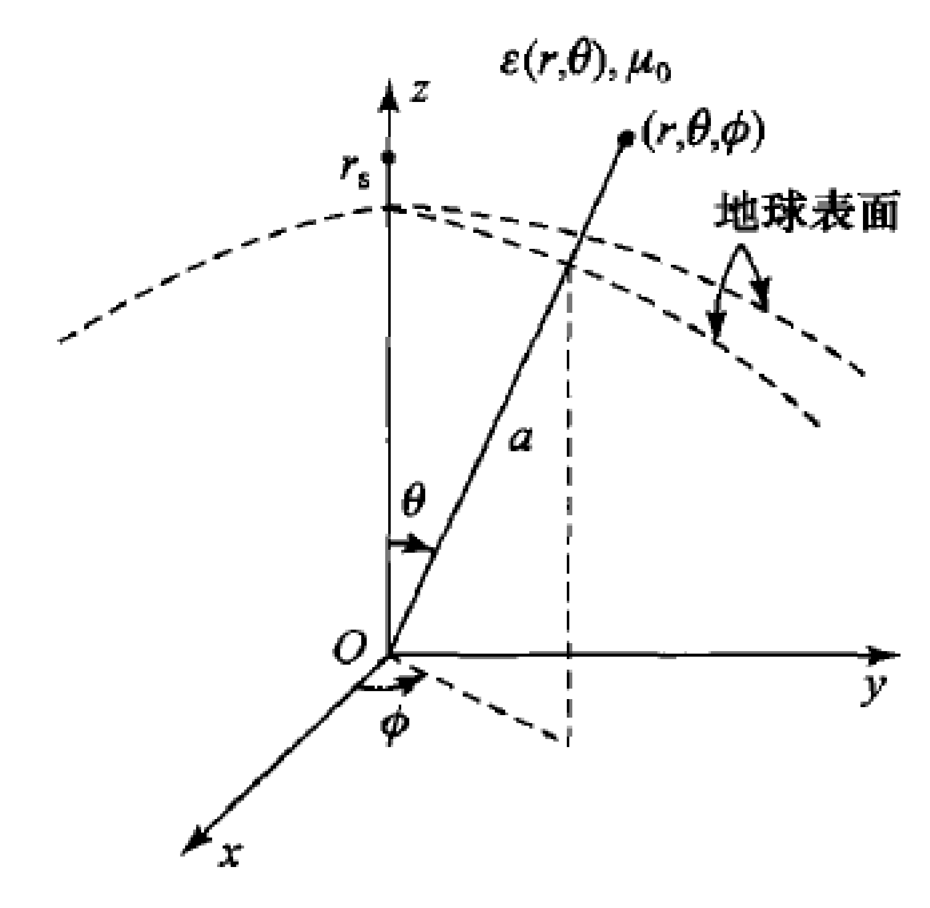


图 6.21 球面地球表面外的竖直电偶极子

分量：E_r，E_θ 和 H_ϕ. 在 $\partial\varepsilon/\partial\phi=0$ 的假定下，由(6.4.1)式可以导出 H_ϕ 满足下面的波动方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\varepsilon\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, H_\phi)\right]+\omega^2\mu H_\phi=0. \tag{6.4.2}$$

电场的两个非零分量可由 H_ϕ 通过 Maxwell 方程求出，因此问题便归结为由(6.4.2)式求解 H_ϕ.

方程(6.4.2)相当复杂，但可使用变换技术予以简化. 为此，我们设

$$H_\phi(r,\theta)=\varepsilon^\beta(\sin\theta)^\gamma r^\nu\, U(r,\theta), \tag{6.4.3}$$

式中 β，γ 和 ν 是待定常数. (6.4.3)式代入(6.4.2)式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^{\nu+1}}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{\nu+1}U)+(2\beta-1)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\nu+1}U)\right]\\&\quad+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\left[(2\beta-1)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}+(2\gamma+1)\cot\theta\right]\frac{\partial U}{\partial\theta}\right\}\\&\quad+[g(\varepsilon,r,\theta)+\mu\varepsilon\omega^2]U=0,\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

左侧最后一项中的 $g(\varepsilon,r,\theta)$ 是个相当复杂的函数. 可以看出，如果取 $\beta=\frac{1}{2}$，$\gamma=-\frac{1}{2}$，方程(6.4.4)将简化为

$$\frac{1}{r^{\nu+1}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{\nu+1}U)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}U+(g+\mu\varepsilon\omega^2)U=0, \tag{6.4.5}$$

同时，复杂的函数 $g(\varepsilon,r,\theta)$ 也简化为

$$g=-\sqrt{\varepsilon\sin\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\sin\theta}}. \tag{6.4.6}$$

若在(6.4.5)式中设 $\nu=-\frac{1}{2}$，它便化为简单的二维(柱坐标)标量 Helmholtz 方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)U(r,\theta)+\left(g-\frac{1}{4r^2}+k_0^2n^2\right)U(r,\theta)=0,\tag{6.4.5a}$$

这里 $k_0^2=\mu_0\varepsilon_0\omega^2$，$n=(\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ 为大气折射率. $H_\phi(r,\theta)$ 则由上式的解得出：

$$H_\phi(r,\theta)=\sqrt{\frac{\varepsilon(r,\theta)}{r\sin\theta}}U(r,\theta).\tag{6.4.7}$$

实际上还需在(6.4.7)式的右侧加上由源的强度决定的幅度常数，但是我们主要关心辐射远场沿球表面的传播问题，即其幅度在传播路径上的相对变化，就不必加这个常数了.

在理想导体地球表面须满足电场切线分量为零的条件，由 H_ϕ 求出切线电场 E_θ，得 $U(r,\theta)$ 应满足的边界条件

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)\bigg|_{r=a}=\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r\varepsilon(r,\theta)}U\right]\bigg|_{r=a}=0.\tag{6.4.8}$$

还需要对方程(6.4.5a)作进一步的变换和简化，才能到达便于执行数值求解的出发点.

首先，通过保角变换将 (r,θ) 变换到复 (x,z) 平面，为此引入复变量

$$\zeta=r\sin\theta+\mathrm{j}r\cos\theta,\tag{6.4.9}$$

通过变换

$$\xi=x+\mathrm{j}z=2a\frac{a+\mathrm{j}\zeta}{\zeta+\mathrm{j}a}\tag{6.4.10}$$

构成复 (x,z) 平面. 复 (x,z) 平面的原点对应于 $r=a$，$\theta=0$ 点，即偶极子正下方的球面极点. 在 θ 取小值和 $r\approx a$ 的条件下由变换(6.4.10)可得

$$x\approx a\theta,\quad z\approx r-a,\tag{6.4.11}$$

所以 x 表示沿球面的弧长，即波传播的路径长度，z 表示观察点(场点)距地面的高度.

(r,θ) 系中的 Helmholtz 方程(6.4.5a)可简记为

$$(\nabla_{r,\theta}^2+h_{r,\theta})U(r,\theta)=0,\tag{6.4.5b}$$

这里 $\nabla_{r,\theta}^2$ 表示(6.4.5a)式左侧第一个圆括号内的 Laplace 算符，$h_{r,\theta}$ 则表示第二个圆括号内的系数. 经变换后 $U(x,z)$ 在 (x,z) 直角坐标系中满足

$$\left(\nabla_{x,z}^2+\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|^{-2}h_{x,z}\right)U(x,z)=0,\tag{6.4.12}$$

这里 $\nabla_{x,z}^2$ 为 (x,z) 直角系中的 Laplace 算符，$h_{x,z}$ 为用 x，z 变量表示的 $h_{r,\theta}$.

经变换后沿球面地球表面的传播问题变为在 (x,z) 直角系中在近地面的高

度($r/a\approx1$)下沿水平的 x 方向的传播问题. 将快速涨落的周期性相位变化从 $U(x,z)$ 中提出,可以设

$$U(x,z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx}u(x,z), \tag{6.4.13}$$

上式中的波数 k 为常数. 上式代入(6.4.12)式,得慢变函数 $u(x,z)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\mathrm{j}k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(h_{x,z}\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|^{-2}-k^2\right)u=0. \tag{6.4.14}$$

在

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\ll k\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \tag{6.4.15}$$

的条件下将 $\partial^2 u/\partial x^2$ 项略去,方程(6.4.14)便简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\mathrm{j}k\frac{\partial u}{\partial x}+\left(h_{x,z}\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|^{-2}-k^2\right)u=0, \tag{6.4.16}$$

与波动方程不同,这个二阶偏微分方程属于抛物型方程.

近似条件(6.4.15)在物理上相当于略去了传播过程中的背向散射. 这个条件要成立,就要求 u 是随 x 慢变的平滑函数,因此也要求 ε 是 x 的慢变平滑函数. 对于地面附近的对流层,这个条件通常是成立的.

为求解,还需将 $h_{x,z}|\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\zeta|^{-2}$ 具体写出并化简. 由(6.4.9)和(6.4.10)式,$|\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\zeta|=4a^2/(r^2+a^2+2ra\cos\theta)^2$. 在小 θ 角和 $r\approx a$ 的条件下近似有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|^{-2}\approx\left(1+\frac{z}{2a}\right)^4\approx1+\frac{2z}{a}. \tag{6.4.17}$$

但 $h_{x,z}$ 是个相当复杂的函数. 近地面的对流层折射率与 1 的差别在 $n^2-1\approx6\times10^{-4}$ 量级,在 $a/r\approx1$ 和

$$\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right|^2,\ \left|\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\right|,\ \left|\frac{\partial n}{\partial x}\right|^2,\ \left|\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right|\ll10^{-4}k^2,\ x\gg100k^{-1}$$

的条件下近似有

$$h_{x,z}\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|^{-2}-k^2=k^2\left(n^2-1+\frac{2z}{a}\right). \tag{6.4.18}$$

u 满足的方程式最终简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\mathrm{j}k\frac{\partial u}{\partial x}+k^2\left(n^2-1+\frac{2z}{a}\right)u=0. \tag{6.4.19}$$

3. 有限电导球面地球外竖直电偶极子的场;阻抗边界条件

将地球表面设为理想导体球面的模型过于粗糙,实际上地球的表面层具有有限的电导率 σ 和不同于 1 的相对介电常数 κ_e. 在 § 3.3 中我们已经知道,由有限电导率导致的损耗是表面波得以维系的必要条件,因此对于地波绕地球表面传播的问题,在模型中必须认为地球具有有限电导. 将电导并入介电常数,地表

层的复介电常数

$$\varepsilon=\varepsilon_0(\kappa'-\mathrm{j}\kappa'')=\varepsilon_0\kappa_e-\mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega}=\varepsilon_0\left(\kappa_e-\mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right), \qquad (6.4.20)$$

在良导体条件下，$\sigma/\omega\varepsilon_0\gg\kappa_e$，复介电常数为纯虚数

$$\varepsilon\approx-\mathrm{j}\,\frac{\sigma}{\omega}. \qquad (6.4.20\text{a})$$

陆地 κ_e 的典型值为 10～15，σ 的典型值为 $10^{-3}\sim10^{-2}$ S/m，满足良导体条件的波频率最高可达 $f<1.8$MHz. 而海水的 κ_e 和 σ 典型值分别为 80 和 4S/m，良导体条件的频率会提高到约 $f<90$MHz. 由于表面波的衰减随着波频率的增加而迅速增加，讨论高于良导体条件频率的表面波长程传播问题没有实际意义. 表面波绕地球表面传播正是这样的长程传播问题，所涉及的频率不会超越良导体条件的限制，下面将会看到，良导体条件会使阻抗边界条件相当简化.

为得到有限电导球面上电磁场应满足的边界条件，须回到介质的平面分界模型. 设平面电磁波从真空 μ_0,ε_0 入射到导电介质 $\mu_0,\varepsilon_1,\sigma$ 的平面界面上，图6.22示出了波的入射平面. 在分界面两侧电磁场的切线分量应连续：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)&=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_t,\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)&=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_t,\end{aligned}\right\}(6.4.21)$$

在界面下方的介质中，透射波的电磁场之间有关系

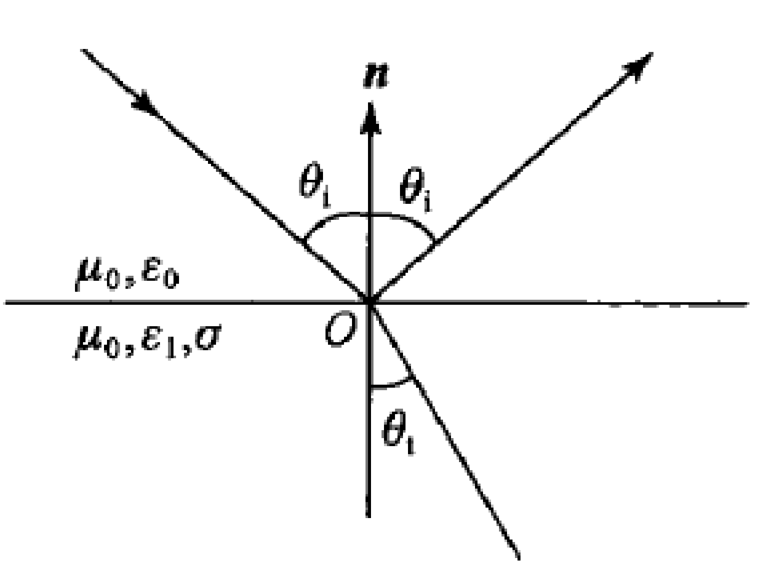


图 6.22　平面电磁波从真空入射于导电介质平面

$$\boldsymbol{H}_t=\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{k}_t\times\boldsymbol{E}_t,\quad \boldsymbol{E}_t=-\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{k}_t\times\boldsymbol{H}_t,$$

这里 $\boldsymbol{k}_t$ 为透射波的单位波矢量，Z_1 为导电介质的波阻抗，$Z_1=\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1-\mathrm{j}\sigma/\omega)}$. 利用这两个关系式(6.4.21)式可以表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)&=-Z_1[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}_t)\boldsymbol{k}_t-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}_t)\boldsymbol{H}_t],\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)&=\frac{1}{Z_1}[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_t)\boldsymbol{k}_t-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}_t)\boldsymbol{E}_t].\end{aligned}\right\} \qquad (6.4.22)$$

上式说明分界面两侧的电场和磁场之间，以及磁场和电场之间，有确切的相互联系. 更进一步地明确它们之间的关系，须分别考虑入射波的两种极化.

考虑 TM 型波入射的情况，电矢量在入射面内，磁矢量垂直于入射面(图6.23). 此时 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_t=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}_t=-\cos\theta_t$，(6.4.22)的第一式此时写作

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)=-Z_1\cos\theta_t\boldsymbol{H}_t, \qquad (6.4.23)$$

这里 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r$ 是分界面以上的总电场，$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$ 为总电场的切线分量，而 $\boldsymbol{H}_t$ 须等于分界面上方的切线磁场. 所以，有限电导介质表面外侧的切线电场与切线磁

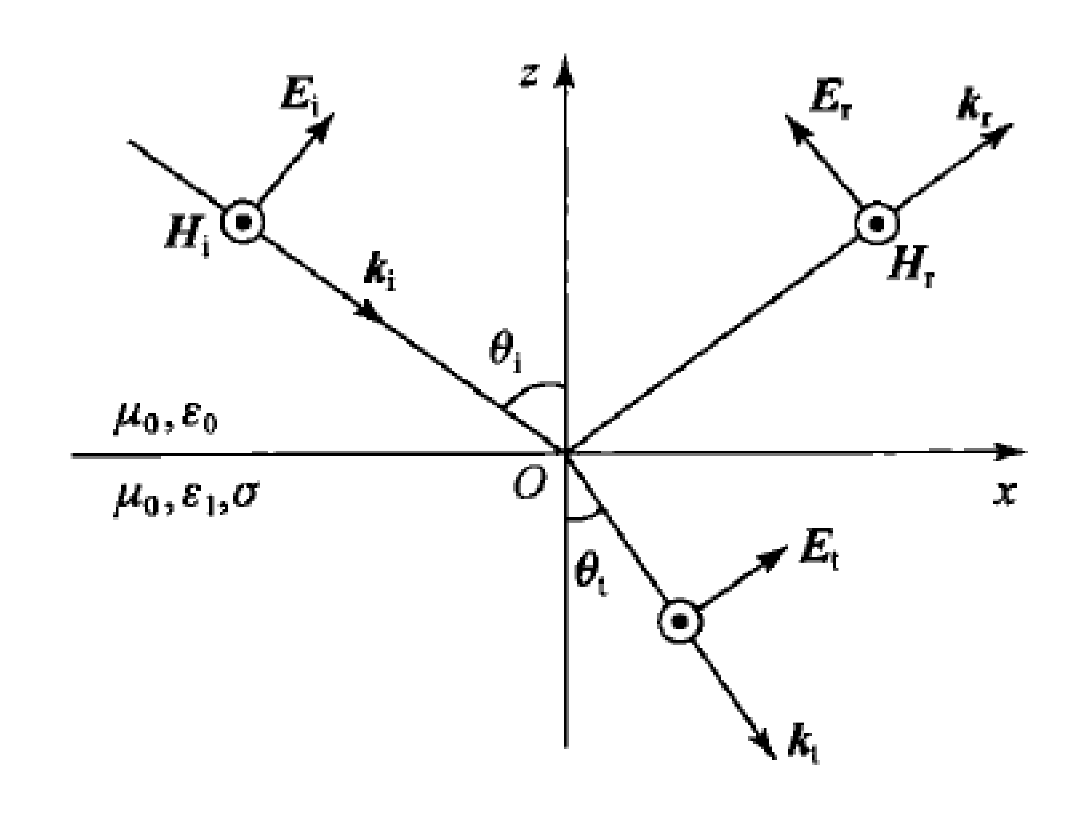


图 6.23 TM 型波从真空入射于导电介质平面

场之比,即介质表面呈现的表面阻抗,与 Z_1 和 Z_0 之间有以下关系:

$$Z=-\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}_t}=Z_1\cos\theta_t=\eta_{\parallel}Z_0, \tag{6.4.24}$$

这就是在阻抗性介质表面外侧的场应满足的精确边界条件,称为阻抗边界条件. 上式中的 $\eta_{\parallel}=Z_1\cos\theta_t/Z_0$ 为归一化的表面阻抗,应用折射定律 $k_1\sin\theta_t=k_0\sin\theta_i$ 可得

$$\eta_{\parallel}=\frac{k_0}{k_1}\left[1-\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2\sin^2\theta_i\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4.25}$$

因此,表面阻抗值与入射角有关. 上式中 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $k_1=\omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1-\mathrm{j}\sigma/\omega)}$, $\varepsilon_1=\varepsilon_0\kappa_e$.

TE 型入射波的电场垂直于入射面, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_t=0$, 由(6.4.22)的第二式有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)=\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{E}_t\cos\theta_t=Y\boldsymbol{E}_t=Y_0\eta_{\perp}\boldsymbol{E}_t, \tag{6.4.26}$$

这里 $Y_0=1/Z_0$ 为真空的波导纳,

$$Y=\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E}_t}=\frac{1}{Z_1}\cos\theta_t=Y_1\cos\theta_t=\eta_{\perp}Y_0 \tag{6.4.27}$$

为阻抗性介质的表面导纳,而归一化的表面导纳

$$\eta_{\perp}=\frac{Y_1\cos\theta_t}{Y_0}=\frac{k_1}{k_0}\left[1-\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^2\sin^2\theta_i\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4.28}$$

以上导出的阻抗边界条件(6.4.24)和(6.4.27)是阻抗性介质表面外侧的切向电场和磁场之间应满足的精确关系式. 在求解实际问题中会经常用到以另一种方式表示的边界条件,它给出了阻抗性介质表面外侧电磁或磁场的某一分量的法向微商与该分量场之间的比例关系. 仍考虑图 6.23 所示的 TM 型波入射情况,写出分界面外侧的切线磁场

$$H_y=\exp[-\mathrm{j}k_0(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)]+\Gamma_{\parallel}\exp[-\mathrm{j}k_0(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)],$$

这里已将入射波磁场的幅度设作 1，$\Gamma_{\parallel}$ 表示反射系数. 对于 TM 型波入射

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{Z_0\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_0\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} = \frac{\eta\cos\theta_i - (\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\eta\cos\theta_i + (\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (6.4.29)$$

得到后一等式时使用了折射定律，上式中

$$\eta = \frac{k_1^2}{k_0^2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}. \qquad (6.4.30)$$

再求出

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathrm{j}k_0\cos\theta_i \cdot \exp[-\mathrm{j}k_0(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)] - \mathrm{j}k_0\Gamma_{\parallel}\cos\theta_i \cdot \exp[-\mathrm{j}k_0(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)],$$

在分界面（$z=0$）上方得

$$\frac{\partial H_y/\partial z}{H_y} = \mathrm{j}k_0\cos\theta_i\,\frac{1-\Gamma_{\parallel}}{1+\Gamma_{\parallel}} = \mathrm{j}k_0\,\frac{(\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\eta}.$$

于是，磁场切线分量应满足的边界条件可以写作

$$\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=0} + \alpha_{\parallel} H_y|_{z=0} = 0, \qquad (6.4.31)$$

式中的常数

$$\alpha_{\parallel} = -\mathrm{j}k_0\cos\theta_i\,\frac{1-\Gamma_{\parallel}}{1+\Gamma_{\parallel}} = -\mathrm{j}k_0\,\frac{(\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\eta}. \qquad (6.4.32)$$

由 Maxwell 方程的旋度式，分界面外侧的切线电场 E_x 可由 H_y 求出：

$$\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \alpha_{\parallel} H_y,$$

将(6.4.32)式的 $\alpha_{\parallel}$ 代入上式，不难看出如此求出的阻抗性介质表面阻抗与(6.4.24)式相同：

$$Z = \left.\frac{E_x}{H_y}\right|_{z=0} = \eta_{\parallel} Z_0 = Z_0\,\frac{(\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\eta}. \qquad (6.4.33)$$

所以，(6.4.31)式是阻抗边界条件(6.4.24)的另一种形式.

当 TE 型波入射时（图 6.24），阻抗性介质面外侧的切线电场分量 E_y 有类似的边界条件

$$\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=0} + \alpha_{\perp} E_y|_{z=0} = 0, \qquad (6.4.34)$$

这里

$$\alpha_{\perp} = -\mathrm{j}k_0\cos\theta_i\,\frac{1-\Gamma_{\perp}}{1+\Gamma_{\perp}} = -\mathrm{j}k_0(\eta - \sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.4.35)$$

同样，由 Maxwell 方程的旋度式求出磁场的切线分量 H_x 后，得表面阻抗

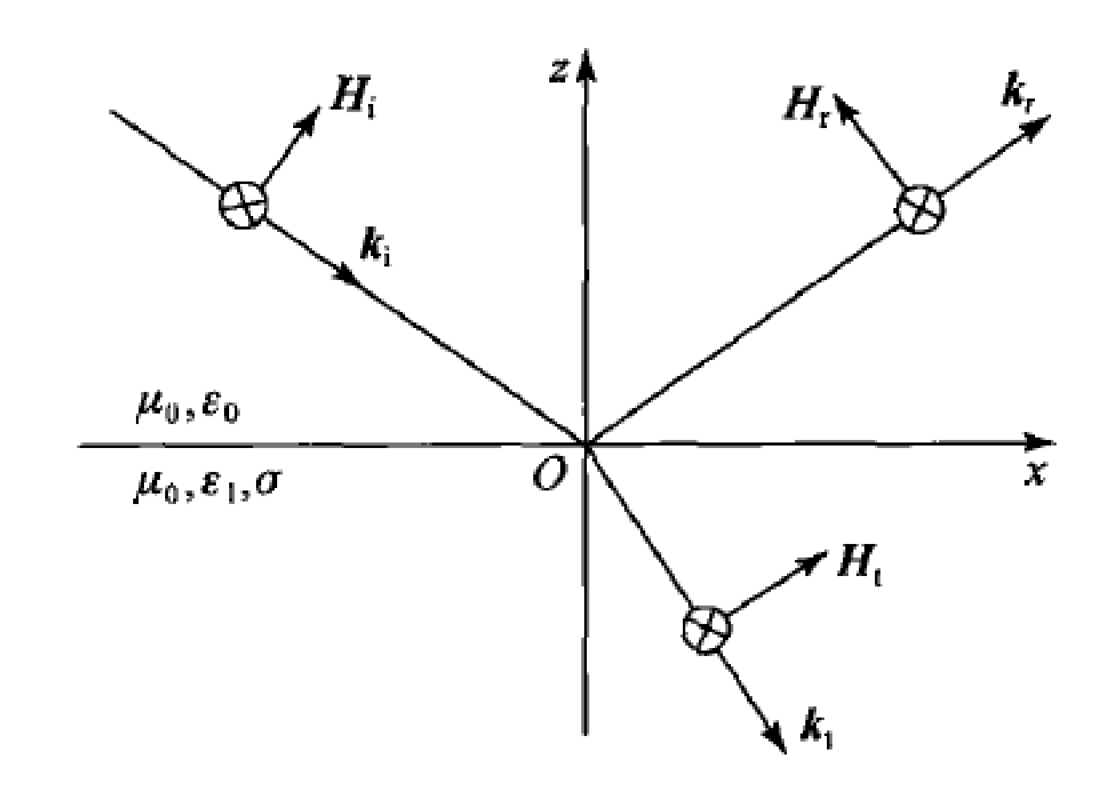


图 6.24 TE 型波从真空入射于导电介质平面

$$Z=\frac{E_y}{H_x}\bigg|_{z=0}=-\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{\alpha_\perp}=Z_0\,\frac{1}{(\eta-\sin^2\theta_i)^{\frac{1}{2}}},\tag{6.4.36}$$

不难看出,它与(6.4.27)式相同.

因此,一般说来阻抗性平面介质对于外侧的入射波呈现的表面阻抗值与入射波的极化和入射角这两者都有关.但在良导体条件成立的情况下,表面阻抗值对于入射波极化和入射角的敏感均不存在.在良导体条件下$|\eta|\gg1$,而$\sin^2\theta_i$的最大值为$1(\theta_i=\pi/2$,掠入射).此时,(6.4.33)和(6.4.36)式便统一成为一个简单的关系式

$$Z=\frac{Z_0}{\sqrt{\eta}},\tag{6.4.37}$$

与入射波的极化和入射角这两者都没有关系.通常将良导体的阻抗边界条件(6.4.24)和(6.4.27)写成矢量式:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=Z\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}),\tag{6.4.38}$$

Z由(6.4.37)式给出,这种形式的阻抗边界条件称为 Leontovich 近似边界条件,因 Leontovich 和 Fock 在研究地波沿地球表面传播问题时首次使用此条件①.使用阻抗边界条件,特别是 Leontovich 近似边界条件,使沿良导体传播的表面波问题的求解得以简化,因为此时无须考虑透入导体内部的波.

回到有限电导球面的地球表面外竖直电偶极子的辐射场沿地球表面传播问题,由于在入射点附近的局部球面可视为平面,而边界条件自身,即切线电场与磁场之间的关系,是一种纯局部性的关系,只与所考虑的场点局部的物质性质有

① М. А. Леонтович, Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли, Изв. АН СССР, сер. физическая, Том 8, стр. 16, 1944; М. А. Леонтович, В. А. Фок, Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, ЖЭТФ, Том 16, стр. 557, 1946.

关，所以可以使用以上根据平面分界面模型导出的阻抗边界条件. 竖直电偶极子产生 TM 型入射波，须使用边界条件(6.4.31)，这里的 H_y 相当于球坐标系的 H_ϕ. 将(6.4.7)式的 H_ϕ 代入(6.4.31)式，应用保角变换(6.4.10)变换到直角系，再使用变换关系(6.4.13)将 $U(x,z)$ 变换为 $u(x,z)$，最终得到 $u(x,z)$ 应满足的边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\left[\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}+\left(\alpha_{\parallel}-\frac{1}{2a}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]u=0. \tag{6.4.39}$$

至此，问题便归结为求方程式(6.4.14)满足边界条件(6.4.39)的解.

在本节的第 2 小节我们已经知道，在地表附近的对流层实际物理条件下方程式(6.4.14)可简化为抛物型方程(6.4.19). 同样，对边界条件(6.4.39)具体考察后发现它也可以简化. 当传播路径长度小于 500 km 时可以认为 $\cos(\theta/2)\approx 1$，因为地球半径 a 相当大. 同样，与 $\alpha_{\parallel}$ 值比较 $1/2a$ 可略去，$(1/n)(\partial n/\partial z)$ 也可略去. 因此，边界条件(6.4.39)简化后变得与边界条件(6.4.31)相同，只需将 H_y 换成 u. 这样，方程(6.4.19)和边界条件(6.4.31)便作为我们求解竖直电偶极子的辐射场沿有限电导球形地球表面传播问题的出发方程式.

为书写简单，将抛物型方程(6.4.19)简写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\mathrm{j}k\frac{\partial u}{\partial x}+k^2 mu=0, \tag{6.4.19a}$$

这里 $m=(n^2-1+2z/a)$. 应用 Fourier 变换

$$\tilde{u}(x,p)=\mathscr{F}[u(x,z)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}pz}\,\mathrm{d}z \tag{6.4.40}$$

将方程(6.4.19a)化为仅含有微商项 $\partial\tilde{u}/\partial x$ 的方程，在区间 $[x_0,\ x]$ 上积分得

$$\tilde{u}(x,\ p)=\tilde{u}(x_0,\ p)\exp[-\mathrm{j}(k^2m-p^2)(x-x_0)/2k]. \tag{6.4.41}$$

应用 Fourier 变换求解 Helmholtz 方程的技术我们已经数次使用(见 §3.7，§4.7)，这里不再写出其过程，但现在认为在传播路径的 $[x_0,\ x]$ 区间内 m 是不随 x 和 z 变化的常数，在 x 点的解 $u(x,z)$ 便可通过(6.4.40)式的逆变换由 x_0 点的解 $u(x_0,z)$ 求出：

$$u(x,z)=\exp\left[-\mathrm{j}\,\frac{1}{2}km(x-x_0)\right]\mathscr{F}^{-1}\left\{\exp\left[\mathrm{j}\,\frac{p^2(x-x_0)}{2k}\right]\tilde{u}(x_0,\ p)\right\}. \tag{6.4.42}$$

这种求解方法称为分步 Fourier 变换解法. 在整个传输路径上逐个区间地向前推进，在不同的区间 m 可以取不同数值，这种方法便可应用于沿传输路径物理常数有变化的非均匀路径传输问题的计算.

阻抗边界条件(6.4.31)现在可以写作

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}+\alpha u\ |_{z=0}=0, \tag{6.4.31a}$$

这里为书写简单已将 $\alpha_{\parallel}$ 的脚标略去不写. 这是一种混合型的边界条件，即 Direchlet型(第一类)和 Neumann 型(第二类)的混合型边界条件，也称为第三类边界条件. 为使阻抗边界条件(6.4.31a)得以平滑地满足，Kuttler 和 Dockery 在他们的论文中建议使用以下的混合 Fourier 变换求解：

$$\tilde{u}(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,z)(\alpha\sin pz-p\cos pz)\mathrm{d}z, \tag{6.4.43}$$

其逆变换为

$$u(x,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{u}(x,p)\,\frac{\alpha\sin pz-p\cos pz}{\alpha^2+p^2}\mathrm{d}p+K(x)\mathrm{e}^{-\alpha z}, \tag{6.4.44}$$

这里

$$K(x)=\begin{cases}2\alpha\int_0^{\infty}u(x,y)\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{d}z, & \mathrm{Re}(\alpha)>0;\\ 0, & \mathrm{Re}(\alpha)\leqslant 0.\end{cases} \tag{6.4.45}$$

因为他们的论文使用 $\exp(-\mathrm{j}\omega t)$时间因子，这里的 α 值与(6.4.32)式的 $\alpha_{\parallel}$ 值反符号.

将变换(6.4.43)应用于方程(6.4.19a)，其满足边界条件(6.4.31a)的解与(6.4.41)式相同，即

$$\tilde{u}(x,p)=\tilde{u}(x_0,p)\exp[-\mathrm{j}(k^2m-p^2)\delta x/2k], \tag{6.4.41a}$$

这里 $\delta x=x-x_0$，而 $K(x)$满足方程

$$-2\mathrm{j}k\frac{\partial K}{\partial x}+\alpha^2K+k^2mK=0. \tag{6.4.46}$$

对上式积分得

$$K(x)=K(x_0)\exp[-\mathrm{j}(k^2m+\alpha^2)\delta x/2k]. \tag{6.4.47}$$

在良导体条件下 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$，由逆变换(6.4.44)求得的方程(6.4.19a)满足阻抗边界条件(6.4.31a)的分步 Fourier 变换解为：

$$u(x,z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}km\delta x/2}\Bigg\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha^2\delta x/2k}\mathrm{e}^{-\alpha z}K(x_0)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin pz-p\cos pz}{\alpha^2+p^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}p^2\delta x/2k}\left[\int_0^{\infty}u(x_0,z')(\alpha\sin pz'-p\cos pz')\mathrm{d}z'\right]\mathrm{d}p\Bigg\}. \tag{6.4.48}$$

由于 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$，解(6.4.48)为表面波，$\mathrm{e}^{-\alpha z}$使得场强的分布离开地表以指数律衰减.

§ 6.5 衍射的高频渐近理论

1. 衍射解的高频渐近性

在上一节我们看到，电磁波沿地球表面传播（衍射）问题，通过引入抛物型方程近似使求解变得容易，虽然这个问题主要还只是涉及低频电磁波. 对于高频电磁波散射问题的求解，在求解过程中作近似是不可避免的. 让我们回忆已经讨论过的高频散射和衍射问题，除了平面电磁波在导体半平面边缘的衍射问题获得了精确的解析形式闭合解（§ 6.3）外，其余的几个典型问题的解都具有高频渐近的性质.

这些问题主要涉及用分离变数法可求解的几种形状简单的导体（球、圆柱等）的高频电磁散射问题，用本征函数的无穷级数表示的只是形式解，随着波频率的增加 ka 变大，a 为散射体的特征长度（球或圆柱半径），级数收敛困难增加，使级数解的实际应用变得不可能. 尽管使用 Watson 变换可将本征函数的无穷级数的求和问题转换为复平面上回路积分的计算问题，即留数级数的求和问题，但仍然涉及级数求和的收敛问题. 而在具体执行计算时仍需使用渐近近似，包括：使用 Hankel 函数的各种渐近形式，特别是大宗量渐近式；使用鞍点法或稳相法等积分渐近求值技术. 这就使所获得的解并不完全精确，其精度随 ka 趋向于其极限值而增加.

从发展历史来看，在获得本征函数的无穷级数解之后经过了很多年才可能获得令人满意的渐近形式的解，因为后者要求有更高的聪明和才智. 而渐近解受限于散射物体的几何形状，只适用于那些有本征函数级数解的几何形状，即球、圆柱、抛物柱、半无限锥以及劈. 导出新形式的渐近公式，不论对新的几何形状还是同一几何形状的不同区域，几乎是不可能的[①]. 因此，难于沿着这样的路线继续发展，须探索新的衍射求解途径.

2. Maxwell 方程组的渐近解

由 Luneberg (1944)和 Kline (1951)提出的一个高频渐近展开式作为 Maxwell 方程组的解，其形式为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}}(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1/k_0 + \boldsymbol{E}_2/k_0^2 + \cdots), \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\mathscr{L}}(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1/k_0 + \boldsymbol{H}_2/k_0^2 + \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{6.5.1}$$

① R. G. Kouyoumjian, Asymptotic high-frequency methods, *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 864—876, Aug. 1965.

这里 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$是空间坐标的函数，$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$为常数，介质设为各向同性非均匀介质．这是一种难于证明却又为实践确认无疑的假定①，它为衍射问题的求解提供了新的途径．

将(6.5.1)式代入 Maxwell 方程组的旋度式，消去 $e^{-jk_0\mathscr{L}}$因子后得

$$\begin{aligned}&-jk_0\nabla\mathscr{L}\times(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1/k_0+\cdots)+\nabla\times(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1/k_0+\cdots)\\&\quad+j\omega\mu(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1/k_0+\cdots)=0,\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

$$\begin{aligned}&-jk_0\nabla\mathscr{L}\times(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1/k_0+\cdots)+\nabla\times(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1/k_0+\cdots)\\&\quad-j\omega\mu(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1/k_0+\cdots)=0,\end{aligned}\tag{6.5.3}$$

将 k_0 的同次幂项归并后各项须分别为零，因 k_0 是很大的量．由首项，即 k_0 的一次幂项，得

$$\omega\mu\boldsymbol{H}_0=k_0\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{E}_0,\quad\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_0=-k_0\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{H}_0.\tag{6.5.4}$$

上式说明展开式(6.5.1)的零级项 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 相互正交，而且它们也均与$\nabla\mathscr{L}$正交．将(6.5.4)第一式的 $\boldsymbol{H}_0$ 代入第二式，消去 $\boldsymbol{H}_0$ 后因为 $\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\mathscr{L}=0$ 得

$$(\nabla^2\mathscr{L}-n^2)\boldsymbol{E}_0=0.\tag{6.5.5}$$

上式中 $n^2=\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0$，$n$ 为介质的光学折射率，由上式立即得

$$\nabla^2\mathscr{L}=n^2,\tag{6.5.5a}$$

这就是程函方程，$\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$为程函．我们在§2.8 中论述几何光学近似时只取了展开式(6.5.1)的第一项，然后在 $k_0\to\infty$的极限下由 Maxwell 方程组导出了这个程函方程．

现在再来导出几何光学的输运方程．由(6.5.2)和(6.5.3)式 k_0 的零次幂项得

$$j\boldsymbol{E}_1\times\nabla\mathscr{L}+\nabla\times\boldsymbol{E}_0+j(\omega\mu/k_0)\boldsymbol{H}_1=0,\tag{6.5.6}$$

$$j\boldsymbol{H}_1\times\nabla\mathscr{L}+\nabla\times\boldsymbol{H}_0-j(\omega\mu/k_0)\boldsymbol{E}_1=0,\tag{6.5.7}$$

以$\nabla\mathscr{L}$又乘(6.5.6)式，再利用(6.5.7)式消去 $\boldsymbol{H}_1$ 得

$$-j(\boldsymbol{E}_1\cdot\nabla\mathscr{L})\nabla\mathscr{L}+\nabla\mathscr{L}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)+(\omega\mu/k_0)\boldsymbol{H}_0=0.\tag{6.5.8}$$

将展开式(6.5.1)代入散度方程$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=0$，由 k_0 的零次幂项得

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}_0)=j\varepsilon\boldsymbol{E}_1\cdot\nabla\mathscr{L}.\tag{6.5.9}$$

将(6.5.9)式代入(6.5.8)式得

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)[\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}_0)]\nabla\mathscr{L}+\nabla\mathscr{L}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)+(\omega\mu/k_0)\boldsymbol{H}_0=0.\tag{6.5.10}$$

对(6.5.4)的第一式取旋度得

$$\left(\frac{\omega}{k_0}\right)\nabla\times\boldsymbol{H}_0=\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)\times(\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{E}_0)+\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{E}_0)-\frac{1}{\mu}\nabla(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\mathscr{L}),$$

---

① 见本章末的参考文献[3]，p.113，(18)式，以及该页脚注引用的参考文献．

在等式右侧加上第三项是因为有$\nabla\mathscr{L}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$. 对上式右侧的第二、三项应用相应的矢量运算恒等式后得

$$\left(\frac{\omega}{k_0}\right)\nabla\times\boldsymbol{H}_0=\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)\times(\nabla\mathscr{L}\times\boldsymbol{E}_0)+\frac{1}{\mu}[(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\nabla\mathscr{L}$$
$$-\boldsymbol{E}_0\nabla^2\mathscr{L}-2(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0-\nabla\mathscr{L}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)].$$

将上式代入(6.5.10)式以消去$\boldsymbol{H}_0$,经整理后便得

$$2(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0+\mu\boldsymbol{E}_0\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)\nabla\mathscr{L}\right]+\frac{1}{\mu\varepsilon}[\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla(\mu\varepsilon)]\nabla\mathscr{L}=0,\tag{6.5.11}$$

这就是确定场振幅$\boldsymbol{E}_0$变化的输运方程,不难看出它与§2.8中导出的输运方程(2.8.25)式相同.

因此,由 Maxwell 方程组代入展开式(6.5.1)所得的k_0一次幂和零次幂等式,我们得到了几何光学近似的全部内容. 展开式(6.5.1)的引入为获得更高阶近似提供了一种可能途径,由几何光学概念和方法引伸、扩展而导致形成求解衍射问题的新方法,这就是衍射的几何理论.

3. 几何光学近似和物理光学近似

尽管几何光学不能直接用来解决衍射问题,但几何光学的射线方法贯穿于衍射的几何理论的运用过程,为着在这里的使用,除了在§2.8中已经介绍的射线方法的基本内容之外,还需要作一点补充. 在折射率为n的各向同性均匀介质中,沿射线方向的方向微商为

$$\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla=n\left(\frac{\nabla\mathscr{L}}{n}\right)\cdot\nabla=n\boldsymbol{s}\cdot\nabla=n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},\tag{6.5.12}$$

这里$\boldsymbol{s}$为沿射线方向的单位矢量,s为沿射线的弧长. 由于上式,程函方程(6.5.5a)变为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}s}=n,\tag{6.5.13}$$

沿射线积分后得射线上s点的程函

$$\mathscr{L}(s)=\mathscr{L}(s_0)+\int_{s_0}^{s}n\mathrm{d}s=\mathscr{L}(s_0)+n(s-s_0),\tag{6.5.14}$$

这里s_0为程函的参考点. 在均匀介质中输运方程(6.5.11)写作

$$(\nabla\mathscr{L}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathscr{L})\boldsymbol{E}_0=0.\tag{6.5.15}$$

应用(6.5.12)式,沿射线积分后得射线上s点的零阶电场幅度

$$\boldsymbol{E}_0(s)=\boldsymbol{E}_0(s_0)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{n}(\nabla^2\mathscr{L})\mathrm{d}s\right].\tag{6.5.16}$$

式(6.5.12)—(6.5.16)在§2.8中已经给出,为便于阅读此处重新写出.

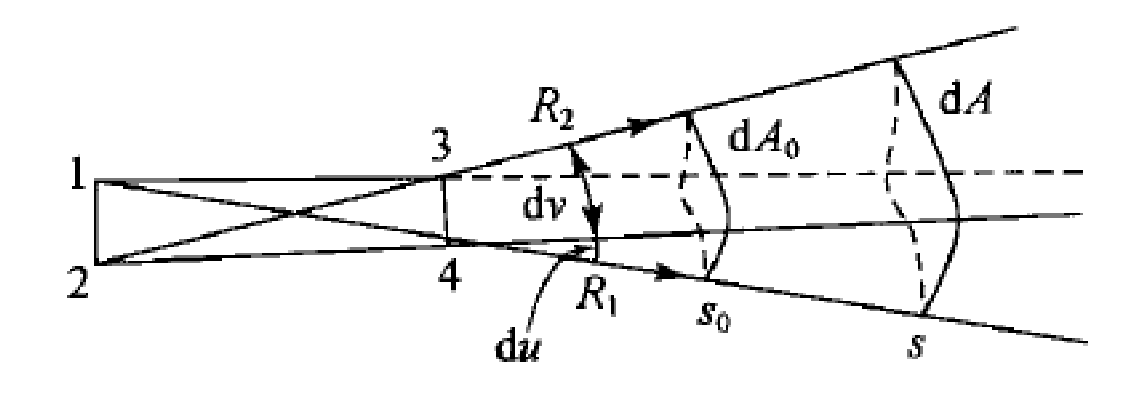


图 6.25 像散波的射线管

考虑图 6.25 所示的射线管，$\mathscr{L}(s_0)$ = 常数 1，$\mathscr{L}(s)$ = 常数 2，两个等相面截在射线管内的面积元分别用 dA_0 和 dA 表示. 等相面的弯曲形状由它的两个主曲率半径确定，等相面的 Gauss 曲率 G 定义为 $G=1/R_1R_2$. 射线管内这两个面积元的面积分别为 $dA_0=R_1(s_0)R_2(s_0)dudv=dudv[1/G(s_0)]$，$dA=R_1(s)R_2(s)dudv=dudv[1/G(s)]$，$du$，$dv$ 分别为两条射线相对于各自的交点(即图中的焦点 4，2 或 3，1)的夹角(弧度). 定义矢量 $\boldsymbol{F}=Gn\boldsymbol{s}$，在两个面元 dA_0 和 dA 之间的射线管段的表面作 $\boldsymbol{F}$ 的积分，由于侧面对积分无贡献而有

$$\oiint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s})\big|_s dA-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s})\big|_{s_0}dA_0=n(dudv-dudv)=0,$$

所以 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$. 由此有 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot Gn\boldsymbol{s}=Gn\nabla\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\cdot\nabla Gn=0$. 因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{s}=-\frac{1}{Gn}\boldsymbol{s}\cdot\nabla(Gn)=-\frac{1}{Gn}\frac{d(Gn)}{ds}=-\frac{d\ln(Gn)}{ds}.$$

由程函方程(6.5.5a)有 $\nabla^2\mathscr{L}=\nabla\cdot\nabla\mathscr{L}=\nabla\cdot(n\boldsymbol{s})=n\nabla\cdot\boldsymbol{s}$，利用上式便得到

$$\nabla^2\mathscr{L}=-n\frac{d\ln(Gn)}{ds}=-n\frac{d\ln G}{ds}. \tag{6.5.17}$$

上式代入(6.5.16)式再考虑到(6.5.14)式给出的相位变化，最终得到 s 点的几何光学场与 s_0 点场之间有如下关系：

$$\boldsymbol{E}_0(s)=\boldsymbol{E}_0(s_0)e^{-jk_0\mathscr{L}(s_0)}\sqrt{\frac{G(s)}{G(s_0)}}e^{-jk_0(s-s_0)}. \tag{6.5.18}$$

上面这个几何光学场表示式中的 Gauss 曲率 G 改用主曲率半径表达要更直观，我们有

$$\boldsymbol{E}_0(s)=\boldsymbol{E}_0(s_0)e^{-jk_0\mathscr{L}(s_0)}\sqrt{\frac{R_1R_2}{[R_1+(s-s_0)][R_2+(s-s_0)]}}e^{-jk_0(s-s_0)}. \tag{6.5.19}$$

此式说明，若某参考点 s_0 的几何光学场的幅值和阵面为已知，即 $\boldsymbol{E}_0(s_0)e^{-jk_0\mathscr{L}(s_0)}$ 为已知，就可以推知射线上任意其他点的几何光学场. 射线管的几何结构取决于波阵面(等 $\mathscr{L}(\boldsymbol{r})$ 面)的几何形状，当 R_1 和 R_2 均为有限但不等，如图6.25所示，这样的射线管表示的几何光学场称为像散波. 当 $R_1=R_2$ 而且有限时为球面波. 若一个主曲率半径为无穷大，例如 $R_1=\infty$，另一有限，则为柱面波. 当 R_2 也为无穷大时便是平面波. 如果从 s_0 点逆射线方向追索，$s-s_0$ 取负值，当 $s-s_0=-R_1$ 或 $s-s_0=-R_2$ 时，几何光学场变为无穷大，这就是焦点，如图 6.25 中的 3，4 点或 1，2 点. 在焦区几何光学场发散，这是几何光学近似遇到的一个困难，几何光学近似不适用于焦区，对于焦区场需要采取其他求解或修正方法.

物理光学近似较几何光学近似的近似程度有所提高，主要用于导体的辐射和散射问题. 在入射电磁波的作用下在导体表面感生的面电流是再辐射或散射波源，在面电流辐射的精确积分表示式中使用由几何光学确定的近似面电流分布即为物理光学近似. 一个形状任意的三维理想导体，由入射波在其表面感应的面电流密度 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r}')$，这里 $\boldsymbol{n}$ 为单位外法线. 根据镜像原理，镜像电流与感应电流同相叠加，在几何光学近似下得到的作为再辐射源的近似面电流分布为

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')=\begin{cases}2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r}') & (\text{在 } S_i \text{ 上})；\\ 0 & (\text{在 } S_s \text{ 上})，\end{cases} \tag{6.5.20}$$

这里 S_i 和 S_s 分别表示导体被入射波照明的表面和未照明的阴影面. 远区的辐射场可通过辐射积分 $\boldsymbol{N}(\theta,\phi)$ 求出（§4.1）：

$$\boldsymbol{E}^{sc}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{N}(\theta,\phi), \tag{6.5.21}$$

$$\boldsymbol{N}(\theta,\phi)=\oiint_{S_i}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r}\mathrm{d}S'. \tag{6.5.22}$$

在以上三式中，r 为原点至场点的距离，$\boldsymbol{r}'$为由原点引向 S_i 面上任意点的矢径，μ 为散射体外的均匀各向同性介质的磁导率，(6.5.22)式中的 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')$为(6.5.20)式的几何光学近似面电流.

物理光学近似较之几何光学近似在精度上有所提高，一个明显的理由是物理光学散射场的表达式(6.5.21)与频率有关. 来看一个具体例子，由物理光学近似计算的半径为 a 的理想导体球的雷达散射截面为①：

$$\sigma_{rad}=\pi a^2\left|\frac{1}{\mathrm{j}}\left(1-\frac{1}{2\mathrm{j}ka}\right)\right|^2. \tag{6.5.23}$$

当 $ka\to\infty$时，$\sigma_{rad}=\pi a^2$，这是几何光学近似下球的雷达散射截面，源于展开式(6.5.1)的首项，与频率无关. 上式右侧圆括号中的第二项则来自展开式(6.5.1)的第二项，导致 σ_{rad}随频率变化.

但是，物理光学近似存在着明显的缺点：在照明区与阴影区边界的两侧，面电流分布发生突变. 实际上，在边界的阴影区一侧感生面电流并不为零，而是进入阴影区后逐渐减弱为零. 根据物理光学近似作计算时，这种不符合物理实际的电流分布假定会引起一定的计算误差，须对此作适当的处理，仍可参考本页脚注所引用的 Stutzman 和 Thiele 的著作. 此外，一般说来物理光学近似不满足互易定理，这主要涉及双静态散射的情况. 根据互易定理，当发射源与接收器的位置互换时应得到相同的散射截面，但物理光学近似会导致不相同的结果. 镜面反射

① 见，例如，W. L. Stutzman and G. A. Thiele, Antenna theory and design, §9.2, (9-35)式，Wiley, 1981.

方向则是例外,在这个方向及其邻域物理光学近似可以给出满意的结果,对此可参考 325 页脚注所引 Kouyoumjian 的论文.

4. 衍射的几何理论

这是将几何光学的原理和概念加以推广,运用几何光学的射线方法来处理衍射现象的近似方法,主要用于导体的衍射问题. Keller 提出衍射的几何理论(geometrical theory of diffraction, GTD)时主要依据对衍射现象的如下思考和推断①:

(1) 光的传播是局部现象,因为光波长极短,在一确定地点的传播仅由该点的介质性质以及该点的小邻域内的场结构决定. 因此,所有光学场须有相同的局部结构,即平面波,而不论它是怎样产生的. 所以,衍射场也须沿射线运动,而衍射射线也必须遵从普通的几何光学定律.

(2) 当普通的射线投射到边缘、锥的尖顶,或掠入射到曲面的表面时,几何光学的反射和折射定律不再成立. 此时会发生衍射,这些入射射线将产生衍射射线.

(3) 对于边缘衍射,从源点 P 到衍射场的观察点 Q 之间有一条射线相连,该射线须有一点落在衍射边缘,射线的路径由 Fermat 原理确定,即射线所取的实际路径是由 P 到 Q 的光程取极值的路径. Q 点的衍射场强与入射波的场强的关系遵从能量守恒原理.

自然,这些推断只是假设,难以证明. 对于边缘衍射问题,Keller 所作的假设与杨氏(Thomas Young)对于衍射问题的见解一致. 杨氏于 1802 年在论述屏上的孔衍射问题时认为屏后的波是透过孔的直射波与在孔边缘产生的衍射波的叠加②. 杨氏的这个见解后来被 Sommerfeld 的导体半平面边缘衍射精确解证实,Sommerfeld 解(见 § 6.3)表明在屏后照明区中的场是直射波和衍射波的叠加,而衍射波是由屏边缘发出的柱面波. 同样,Keller 也从 Sommerfeld 解找到了对他的衍射射线概念的支持. Sommerfeld 解由入射波、反射波和衍射波三者构成,当入射波沿与衍射屏直边垂直的方向入射时,衍射波是以直边为轴的柱波,与柱波的波阵面正交的直线是由直边上的同一点(即衍射点)发出的,这些直线可视为衍射波射线. 当入射波方向与直边成一定交角 $\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$ 斜入射时,衍射波是锥波,衍射波的波阵面是以直边为公共轴的平行锥,与波阵面垂直的直线也是从直边上的同一点发出的,形成衍射射线锥. Keller 由此得到直边衍射的如下定律:

---

① J. B. Keller, A geometrical theory of diffraction, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, pp. 116—130, Feb. 1962.

② 见 J. W. Goodman, Introduction to fourier optics, p. 48, McGraw-Hill, 1968.

入射射线和衍射射线在衍射点与直边的夹角相等，但分布在通过衍射点且与直边垂直的平面的不同侧．若屏外为同种均匀介质，这符合 Fermat 原理．直边垂直入射和斜入射情况下衍射射线的分布分别在图 6.26 和图 6.27 中示出，可看出衍射射线可以进入阴影区．图 6.27 所示衍射射线锥称为 Keller 锥．

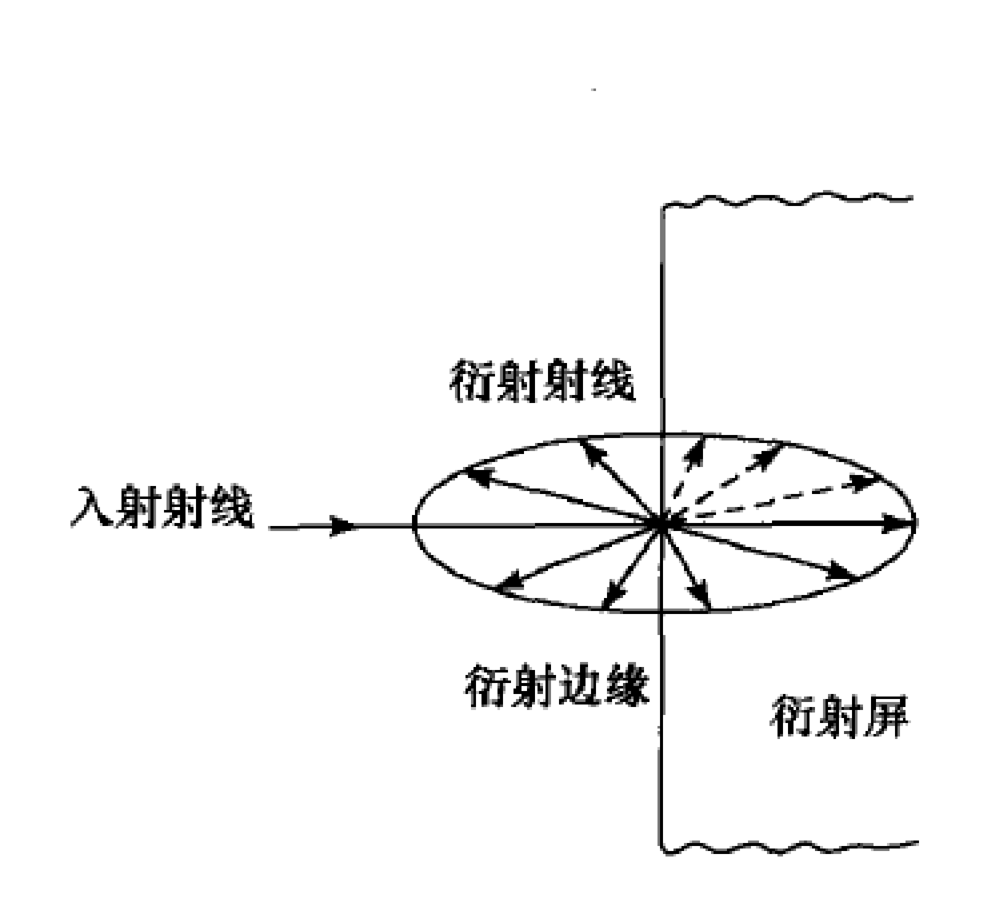


图 6.26　垂直入射于导电屏边缘时产生的衍射射线

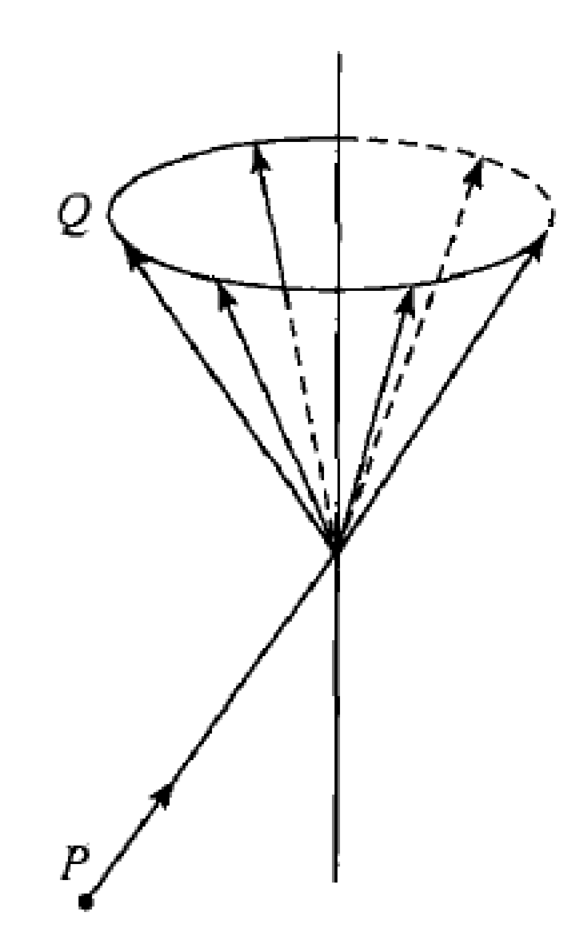


图 6.27　斜入射于导电屏边缘时产生的衍射射线锥（Keller 锥）

确立了衍射射线概念之后，便可以运用几何光学的规则计算衍射场．仍然考虑平面波垂于边缘投射到导体半平面边缘的衍射问题，设 E 型波沿 ϕ_0 角入射（如图6.14），到达衍射点的入射波为 $E_0 e^{-j\phi_i}$，E_0 为幅度，ϕ_i 为相角．在(ρ,ϕ)点的衍射场幅度可通过射线管确定，在与衍射直边垂直的平面上取定将 ϕ 角夹于其间的两条相邻射线，而构成射线管，射线管的纵向（z 向）高度设为 1．在 ρ 点的衍射场幅度设为 $A(\rho)$，由几何光学强度定理 $\rho A^2(\rho)$为常数，所以 $A(\rho)\sim\rho^{-\frac{1}{2}}$．此外，$A(\rho)$ 须与 E_0 成正比，便可写出 $A(\rho)=E_0 D\rho^{-\frac{1}{2}}$，$D$ 为比例常数．因此，(ρ,ϕ)点的衍射场可写作

$$E_z^{\mathrm{d}}(\rho,\phi)=E_0 D\rho^{-\frac{1}{2}}e^{-j(k\rho+\phi_i)}=E_0^{\mathrm{i}} D\rho^{-\frac{1}{2}}e^{-jk\rho},\tag{6.5.24}$$

这里 $E_0^{\mathrm{i}}=E_0 e^{-j\phi_i}$，$D$ 称为衍射系数，类比于反射或透射系数而得名．在(6.5.24)中只有衍射系数 D 尚未确定，它可以通过 Sommerfeld 解的高频渐近形式导出．

为此，我们将 Sommerfeld 解(6.3.30)重新写下：

$$E_z(\rho,\phi)=E_0^{\mathrm{i}}\frac{\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\exp[jk\rho\cos(\phi-\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\exp[jk\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right\},\tag{6.5.25}$$

现在加上了入射波的幅度,这里的 Fresnel 积分由(6.3.26)式定义.半平面衍射问题的解明显地划分为三个空间区域:区域Ⅰ,$0<\phi<\pi-\phi_0$;区域Ⅱ,$\pi-\phi_0<\phi<\pi+\phi_0$;区域Ⅲ,$\pi+\phi_0<\phi<2\pi$.在区域Ⅰ中的场为入射波、反射波和衍射波三者的叠加.区域Ⅱ中没有反射波,场为入射波与衍射波的叠加.区域Ⅲ中仅有衍射波.(6.5.25)式适用于这三个区域.如果令 $a_1=-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)$,$a_2=-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)$,在区域Ⅰ中,$a_1<0$,$a_2<0$;在区域Ⅱ中,$a_1<0$,$a_2>0$;在区域Ⅲ中,$a_1>0$,$a_2>0$.

考虑远区的衍射场,此时 $k\rho>1$,若 $a>0$ 且 $a>\sqrt{10}$,通过部分积分可得 Fresnel 积分的高频渐近式

$$F(a)=\int_a^\infty e^{-j\tau^2}\,d\tau=\frac{1}{2ja}\exp(-ja^2).\tag{6.5.26}$$

当 $a<0$ 且 $|a|>\sqrt{10}$时,将上式代入恒等式

$$F(a)+F(-a)=\sqrt{\pi}\exp\left(-j\,\frac{\pi}{4}\right)\tag{6.5.27}$$

得到 Fresnel 积分的另一高频渐近式

$$F(a)=\frac{1}{j2a}\exp(-ja^2)+\sqrt{\pi}\exp\left(-j\,\frac{\pi}{4}\right).\tag{6.5.28}$$

在(6.5.25)式中应用(6.5.28)式,求得区域Ⅰ中远区场的高频渐近式

$$\begin{aligned}E_z(\rho,\phi)=E_0^i\Bigg\{&\exp[jk\rho\cos(\phi-\phi_0)]-\exp[jk\rho\cos(\phi+\phi_0)]\\&-\frac{\exp\left(-j\,\frac{\pi}{4}\right)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)-\sec\frac{\phi+\phi_0}{2}\right]\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{6.5.29}$$

显然,第一项为入射波,第二项为反射波,第三项为衍射波.(6.5.24)式与这里的衍射波比较,便求得直边的衍射系数

$$D(\phi,\phi_0)=-\frac{\exp\left(-j\,\frac{\pi}{4}\right)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)-\sec\frac{\phi+\phi_0}{2}\right],\tag{6.5.30}$$

现在已明确写出 D 是 ϕ 和 ϕ_0 的函数.如果在(6.5.25)式中应用渐近式(6.5.26)求区域Ⅲ中的衍射场,只有(6.5.29)式的第三项,也可求得衍射系数(6.5.30).

如果入射波为 H 型波,磁场仅有 H_z 分量,因为已有了 E 波解,可通过运用 Babinet 原理得到 H 波解(见[10],§7.4.2).为此,考虑 H 波以与 $+x$ 轴夹角为 ϕ_0 入射到 $y=0$ 平面上半无穷导体平面的衍射问题(见图 6.14),但现在衍射屏处于 $y=0$ 平面上的 $-\infty<x<0$ 区域,入射波的磁场为

$$H_z^i=H_0^i\exp[jk\rho\cos(\phi-\phi_0)].\tag{6.5.31}$$

根据 Babinet 原理，由(5.6.7)的第一式，在 $y<0$ 半空间中的磁场为

$$H_z = \frac{1}{Z}(E_z^{\mathrm{i}} - E_z^{\mathrm{e}}) = H_z^{\mathrm{i}} - \frac{1}{Z}E_z^{\mathrm{e}}, \tag{6.5.32}$$

这里 Z 为衍射屏外介质的波阻抗，H_z^{i} 为(6.5.31)式的入射波磁场，$H_0^{\mathrm{i}} = \frac{1}{Z}E_0^{\mathrm{i}}$，而 E_z^{e} 为被对偶源激励的 $-\infty<x<0$ 半平面上导电盘的补盘衍射问题的解，这就是解(6.5.25). 将(6.5.25)和(6.5.31)式代入(6.5.32)式，得

$$H_z = H_0^{\mathrm{i}} \frac{\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]F\left[\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right\}, \tag{6.5.33}$$

得到此式时使用了恒等式(6.5.27). 再将角 ϕ_0 和 ϕ 代换为与图 6.14 相适应的值，即 ϕ_0 和 ϕ 分别代换为 $\phi_0+\pi$ 和 $\phi-\pi$，适用于 H 型波入射到图6.14所示半平面导体屏问题的解：

$$H_z = H_0^{\mathrm{i}} \frac{\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi+\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right\}, \tag{6.5.34}$$

这个解适用于全空间 $0<\phi<2\pi$. 衍射磁场仍然可以用(6.5.24)式表示，但需将 E 换为 H，而现在衍射系数为

$$D(\phi,\phi_0) = -\frac{\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}\right)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+\sec\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]. \tag{6.5.35}$$

对于极化方向任意的线极化平面波斜入射于 $y=0$ 平面上 $0<x<\infty$ 半平面导电屏边缘的衍射问题(图 6.28)，入射波的相位

$$\exp(\mathrm{j}kr) = \exp[\mathrm{j}k(x\cos\phi_0\cdot\sin\beta_0 + y\sin\phi_0\cdot\sin\beta_0 + z\cos\beta_0)]. \tag{6.5.36}$$

当 $\beta_0=\frac{\pi}{2}$ 时入射波方向与衍射直边垂直，三维问题便退化为二维问题，而二维场问题总可以分解为 E 型和 H 型两组独立的方程式分别处理(§5.1). 只需在二维解中以 $k\sin\beta_0$ 取代 k，而各个分量场解均乘以

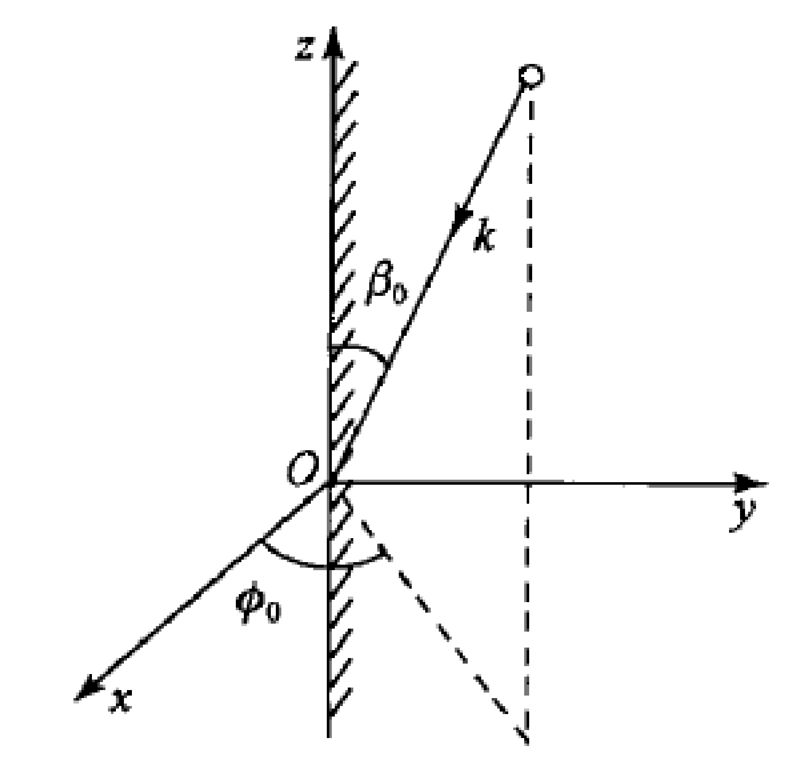


图 6.28 任意线极化波斜入射于导体半平面边缘

$\exp(\mathrm{j}kz\cos\beta_0)$,便可由对应的二维问题解得到斜入射的三维问题解.例如,斜入射 E 型波衍射问题的解便可由(6.5.25)式直接写出:

$$E_z = E_0^{\mathrm{i}}\sin\beta_0 \cdot \frac{\exp\left(\mathrm{j}kz\cos\beta_0 + \mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\cdot \left\{\exp[\mathrm{j}k\rho\sin\beta_0 \cdot \cos(\phi-\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho\sin\beta_0}\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left. - \exp[\mathrm{j}k\rho\sin\beta_0 \cdot \cos(\phi+\phi_0)]F\left[-\sqrt{2k\rho\sin\beta_0}\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\right\}, \quad (6.5.37)$$

这里 ρ 是场点距衍射直边的垂直距离.以 s 表示从衍射点至场点的射线长度,有 $s=\rho/\sin\beta_0=-z/\cos\beta_0$.利用 Fresnel 积分的高频渐近式(6.5.26),远区衍射场可以写作

$$E_z^{\mathrm{d}} = -E_0^{\mathrm{i}}\sin\beta_0 \frac{\exp[\mathrm{j}k(z\cos\beta_0-\rho\sin\beta_0)]\exp\left(-\mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi k\rho\sin\beta_0}}$$

$$\cdot \left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right) - \sec\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]$$

$$= E_0^{\mathrm{i}}\sin\beta_0 \frac{\exp(-\mathrm{j}ks)}{\sqrt{s}}D(\phi,\phi_0), \quad (6.5.38)$$

衍射系数

$$D(\phi,\phi_0) = -\frac{\exp\left(-\mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi k}\sin\beta_0}\left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right) - \sec\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]. \quad (6.5.39)$$

对于 H 型入射波,其衍射系数只需将上式方括号中第二项前的负号改为正号.

以上所得出的这些衍射系数的表达式都是根据平面波在半平面导体边缘衍射问题的精确解.这种可以获得精确解的简单几何结构和入射波类型的衍射问题在衍射的几何理论中被称作正则问题(canonical problems),包括导体半平面、圆柱、劈和圆锥等,大多是二维问题.这些正则问题的解构成了衍射的几何理论的基础,如同在上面已经看到的.

衍射的几何理论的魅力在于,依据其基本假定,将正则问题的解推广应用于解决更宽范围的衍射问题.推广之一是应用于曲线边缘的衍射:将导体的曲线边缘的一小段视作在衍射点与曲边相切的无穷长直边的一部分,而使用相应于该切线的无穷长直边的衍射系数.这同样是个难于证明的假定,所依据的概念仍然是:衍射是局域效应,只由衍射点邻域的物理结构决定衍射.实践证明由此得出的衍射场近似解是正确的.另一推广是不限制入射波为平面波,可以是任意波,例如点源产生的球面波,只需点源距衍射点足够远,在衍射点处近似为平面波,但由于球面波的发散因子不同于平面波(无发散),(6.5.24)式的衍射场须改

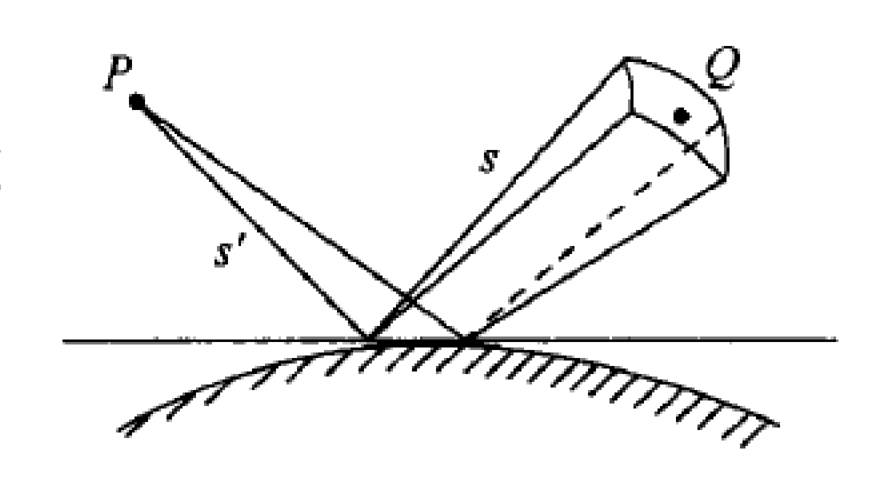


图 6.29　点源发出的球面波衍射后形成的像散波射线管

用不同的发散因子. 由图 6.29 可见,点源发出的球面波经衍射点后到达观察点时一般为像散波. 比较图 6.29 与图 6.25 所示射线管可见,图 6.29 中的像散管相当于图 6.25 中 $R_1=0$ 的情形,此时 s_0 点与焦点重合,微分面元的面积 $dA_0\to 0$. 主曲率半径 R_2 现在为点源发射的球面波前的半径,也就是源点 P 到衍射点的距离,现在用 s'表示,而且$s-s_0=s$. 在 $R_1\to 0$ 的极限下(6.5.18)和(6.5.19)式中 s_0 点的场强$|\boldsymbol{E}_0(s_0)|\to\infty$,但$|\boldsymbol{E}_0(s_0)|^2R_1$保持有限. 由(6.5.19)式,对于点源入射的情况,衍射的几何理论的衍射场表示式(6.5.24)须改写作

$$E^{\mathrm{d}}=E_0^{\mathrm{i}}D\left[\frac{s'}{s(s+s')}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ks},\tag{6.5.40}$$

现在 R_1 的数值已并入 E_0^{i} 以保持它有限,由衍射系数 D 配平衡(6.5.40)式的量纲. (6.5.40)式的严格推导见[6], § 5.4. (6.5.24)式只适用于柱面衍射波.

除了边缘衍射外,在导体的尖顶(如导体圆锥的尖顶)也会产生电磁波的衍射. 但尖顶的衍射是发自尖顶的球面波,发散因子不同于柱面波和像散波. 尖顶衍射波公式为

$$E^{\mathrm{d}}=E_0^{\mathrm{i}}D\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ks}}{s},\tag{6.5.41}$$

s 为尖顶至观察点的距离,衍射系数可由相应的正则问题解求出. 但是,尖顶衍射的强度较边缘衍射要弱很多,这可以从衍射系数的量级看出. 由于量纲平衡的要求,边缘衍射的衍射系数 $D\sim k^{-\frac{1}{2}}$,而尖顶衍射的 $D\sim k^{-1}$,两者有数量级的差别,所以尖顶衍射相对说来是不重要的.

当由源点 P 发出的电磁波掠入射到光滑的导体凸面上时,设掠射点为 A,衍射射线将由 A 点出发沿导体绕行,到达出射点 A'后沿切线方向射到阴影区的观察点 Q. 衍射射线 $PAA'Q$ 形成一条连续射线并遵从 Fermat 原理. 若导体曲面为圆柱面,AA'段为螺旋线,对于球面则为大圆,对任意曲面则为测地线(最短线). 在 AA'段路径上假定射线以爬行波方式运动. 在路径的每段局部路径上视作具有相同曲率半径的无穷长导体圆柱上平面波入射时的爬行波. 这样,在 AA'段的绕行路径上将遭受累计的指数衰减,设 AA'段射线路径总长为 τ,(6.2.20)式中由 ν_n的负虚部决定的指数衰减因子为$\alpha(\tau')$,它是路径曲率半径的函数,AA'段路径上的总衰减为 $\exp\left[-\int_0^{\tau}\alpha(\tau')\mathrm{d}\tau'\right]$,$\tau'$为从 A 点计算的路径长度. 由于 ν_n与 k 成正比,绕导体曲面绕射遭受的衰减更甚于尖顶衍射,这种衍射效应相对说来是最弱的.

6. 衍射的物理理论

几乎与 Keller 的衍射几何理论同时,苏联学者 Ufimtsev 提出了处理高频衍射的另一种近似理论,称为衍射的物理理论(physical theory of diffraction,PTD)①. 衍射的几何理论是将几何光学的射线概念加以推广以包括导体边缘的衍射效应,而衍射的物理理论则是对物理光学近似方法加以推广,在物理光学面电流之外引入附加边缘电流以包括导体边缘的衍射效应. 衍射的物理理论认为,在入射电磁波照射下导体表面的感应面电流由两部分组成:

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}_1, \tag{6.5.42}$$

$\boldsymbol{J}_0$ 是均匀面电流,即(6.5.20)式的物理光学面电流;$\boldsymbol{J}_1$ 是非均匀面电流,主要存在于导体面曲率发生突变的区域,即边缘电流. 在入射波照射下产生的散射场相应地也分为两部分:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^{po}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^{f}(\boldsymbol{r}), \tag{6.5.43}$$

$\boldsymbol{E}^{po}(\boldsymbol{r})$为物理光学电流 $\boldsymbol{J}_0$ 产生的场,其远区场由(6.5.21)式计算;$\boldsymbol{E}^{f}(\boldsymbol{r})$为边缘电流产生的场,即为衍射场:

$$\boldsymbol{E}^{f}(\boldsymbol{r}) = \iint \mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{6.5.44}$$

这里 $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为自由空间并矢 Green 函数,积分面积实际上为边缘电流存在的小区域.

如果边缘电流 $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r})$能够实际求出,而且物理光学场积分和衍射场积分也能够积出,衍射的物理理论就不失为一种很有应用价值的理论. 然而,Ufimtsev 并未能导出边缘电流的具体表达式,实际上 $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r})$通常只能根据精确的场解求出. 此外,即使 $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r})$可以求出,而由积分(6.5.44)计算衍射场也并非易事,而且没有通用方法,只能逐个解决. 比较起来,用衍射的几何理论求解实际问题却要直接而且简单得多,所以有的评论认为衍射的物理理论其概念意义多于实际意义.

为了说明边缘电流的涵义,我们以半平面导体衍射问题为例来具体计算边缘电流,以下主要依据[6]中 § 5.6 写出. 设位于 P 点的源产生的平面电磁波垂直于半平面导体边缘照亮半平面导体的上半平面($y=0^+$)(图 6.30). 对于 H 型

---

① P. Ya. Ufimtsev, Approximate computation of the diffraction of plane electromagnetic waves at certain metal bodies: I. Diffraction patterns at a wedge and a ribbon," ЖТФ, vol. 27, no. 8, pp. 1708—1718, 1957; Approxiamte computation of the diffraction of plane electromagnetic waves at certain metal bodies: Ⅱ. The diffraction by a disk and by a finite cylinder, ЖТФ, vol. 28, no. 11, pp. 2604—2616, 1958.

波入射，仅有的入射波磁场为

$$H_z^{\mathrm{i}} = h(\rho,\phi)\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)], \tag{6.5.45}$$

这里 $h(\rho,\phi)$ 为 P 点的辐射源的辐射方向分布，入射波在 $0\leqslant x<\infty$ 半平面上的某点 x 处经反射后到达场的观察点 $Q(\rho,\phi)$. $y=0^+$ 半平面上感应面电流分布为

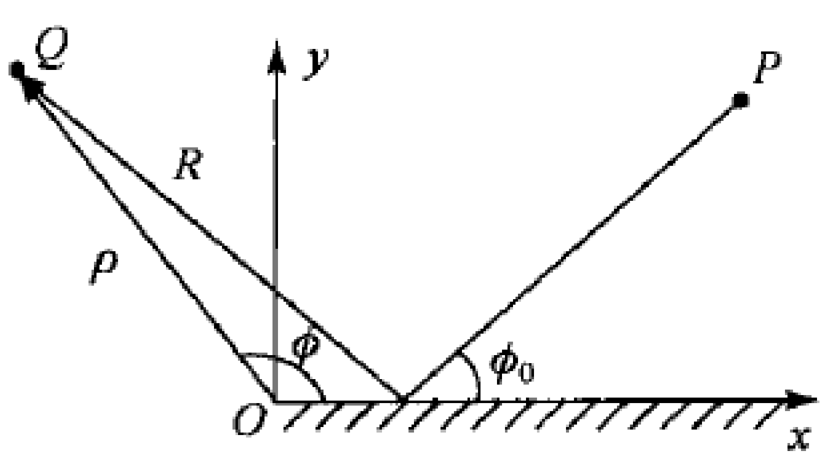


图 6.30　平面波投射于半平面导体的上表面及边缘

$$\boldsymbol{J}_s(\rho') = 2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}|_{\phi=0} = 2\boldsymbol{a}_x h(x)\exp(\mathrm{j}kx\cos\phi_0)\ \begin{pmatrix}0\leqslant x<\infty\\ 0<\phi_0<\pi\end{pmatrix}. \tag{6.5.46}$$

对于现在的二维问题，在矢势 $\boldsymbol{A}$ 的积分表示式(1.2.22)中将三维标量 Green 函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 改换为(6.1.13)式给出的二维标量 Green 函数 $g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$，我们有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \mu\left(-\frac{\mathrm{j}}{4}\right)\iint_{S'}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{H}_0^{(2)}(k\,|\,\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\,|)\mathrm{d}S'. \tag{6.5.47}$$

上式中的零阶 Hankel 函数以其大宗量渐近式(4.7.59)代入，由面电流 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{\rho}')$ 在 Q 点产生的远区磁场，即为物理光学散射磁场，于是写作：

$$\boldsymbol{H}_z^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}k}{8\pi}}\iint_{S'}[\boldsymbol{J}_s(\rho')\times\hat{\boldsymbol{R}}]\,\frac{\exp(-\mathrm{j}kR)}{\sqrt{R}}\mathrm{d}S'\ (kR\gg 1), \tag{6.5.48}$$

这里

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{x} = \rho(\boldsymbol{a}_x\cos\phi+\boldsymbol{a}_y\sin\phi)-\boldsymbol{x},$$

$$R = |\,\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\,| = (\rho^2+x^2-2\rho x\cos\phi)^{\frac{1}{2}},\ \hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}/R,$$

如图 6.30 所示. 将(6.5.46)式和 R 的表示式代入(6.5.48)式，远区散射磁场归结为如下的积分：

$$\boldsymbol{H}_z^{\mathrm{sc}}(\rho,\phi) = \boldsymbol{a}_z\sqrt{\frac{\mathrm{j}k}{8\pi}}2\rho\sin\phi\int_0^{\infty}h(x)R^{-3/2}\exp[\mathrm{j}k(x\cos\phi_0-R)]\mathrm{d}x. \tag{6.5.49}$$

积分(6.5.49)可用稳相法求出，为此将它写成如下形式：

$$H_z^{\mathrm{sc}}(\rho,\phi) = I = \int_0^{\infty}f(x)\exp[\mathrm{j}kg(x)]\mathrm{d}x, \tag{6.5.50}$$

这里

$$f(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{j}k}{8\pi}}2\rho\sin\phi\cdot h(x)R^{-3/2},\quad g(x) = x\cos\phi_0-R.$$

求出相函数的微商

$$g'(x) = \cos\phi_0-R^{-1}(x-\rho\cos\phi),\quad g''(x) = -R^{-1}+R^{-3}(x-\rho\cos\phi). \tag{6.5.51}$$

由 $g'(x_s)=0$ 求出稳相点,现在只有一个稳相点,记作 x_0:

$$x_0 = R\cos\phi_0 + \rho\cos\phi_0. \tag{6.5.52}$$

稳相点的 $g(x_0)$ 和 $g''(x_0)$ 分别为

$$g(x_0) = \rho\cos\phi\cos\phi_0 - R\sin^2\phi, \quad g''(x_0) = -R^{-1}\sin^2\phi_0. \tag{6.5.53}$$

积分(6.5.50)属于下面类型的积分:

$$I = \int_a^b f(x)\exp[\mathrm{j}kg(x)]\mathrm{d}x, \tag{6.5.54}$$

可将它写作

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp[\mathrm{j}kg(x)]\mathrm{d}x - \int_b^{\infty} f(x)\exp[\mathrm{j}kg(x)]\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{-a}^{\infty} f(-x)\exp[\mathrm{j}kg(-x)]\mathrm{d}x \\ &= I_0 - I_b - I_{-a}. \end{aligned} \tag{6.5.55}$$

现在 $a=0, b=\infty, I_b=0$,所以

$$I = I_0 - I_{-a}, \tag{6.5.55a}$$

后一积分为(6.5.50)的积分下限,即半平面的边缘,所导致的. 由稳相法积分公式(5.3.35),

$$I_0 = f(x_0)\exp[\mathrm{j}kg(x_0)]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{j}kg''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]\mathrm{d}(x-x_0),$$

上式中的积分可以写作

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{j}kg''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]\mathrm{d}(x-x_0) \\ &= 2\left[\frac{2}{k\,|\,g''(x_0)\,|}\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\exp\{\mathrm{j}\tau^2\operatorname{sgn}[g''(x_0)]\}\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

这里 $\tau=\sqrt{k}(x-x_0)$,sgn[·]表示括号中的量的符号. 上式右侧的积分就是(6.3.26)所定义的 Fresnel 积分当 $a=0$ 时的值:

$$F_{\pm}(0) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\tau^2}\mathrm{d}\tau, \tag{6.5.56}$$

不难由恒等式

$$F_{\pm}(a) + F_{\pm}(-a) = \sqrt{\pi}\exp\left(\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right) \tag{6.5.57}$$

求出

$$F_{\pm}(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right),$$

这里 $F_{\pm}$ 分别表示 Fresnel 积分(6.5.56)被积函数指数分别取+号或−号. 因此

$$I_0=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[jkg(x)]dx$$
$$=\left[\frac{2\pi}{k\mid g''(x_0)\mid}\right]^{\frac{1}{2}}f(x_0)\exp\left\{j\left[kg(x_0)+\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\{g''(x_0)\}\right]\right\}$$
$$=\frac{\rho\sin\phi}{R\sin\phi_0}h(x_0)\exp[jk(\rho\cos\phi\cos\phi_0-R\sin^2\phi_0)]. \qquad (6.5.58)$$

由图 6.30 可见，$R\sin\phi_0=\mp\rho\sin\phi$，对于 $\phi>\pi$ 或 $\phi<\pi$，我们最后得

$$I_0=\mp h(x_0)\exp[jk\rho\cos(\phi\mp\phi_0)],\ 对于\ \phi\gtrless\pi. \qquad (6.5.59)$$

在上半空间($\phi<\pi$)，这就是几何光学的反射场；在下半空间($\phi>\pi$)，这是入射波场，但反符号，它与入射波叠加相消，形成阴影区.

再看(6.5.55a)式中的第二个积分，现在 $a=0$，

$$I_{-a}=\int_{-a}^{\infty}f(-x)\exp[jkg(-x)]dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)\exp[jkg(x)]dx.$$

此时，稳相点 x_0 在积分区间内趋近端点 $x=0$，为求出积分须在 $x=0$ 点附近将 $g(x)$ 展开为 Taylor 级数至二阶微商项，得(见[6]，p. 33)

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)\exp[jkg(x)]dx$$
$$=\left[\frac{2}{k\mid g''(0)\mid}\right]^{\frac{1}{2}}f(0)\exp[jkg(0)\mp jv^2]F_{\pm}(v),\ 对于\ g''(0)\gtrless 0,$$

这里

$$v=\left[\frac{k}{2\mid g''(0)\mid}\right]^{\frac{1}{2}}\mid g'(0)\mid.$$

现在

$$g'(0)=\cos\phi_0+\cos\phi,\quad \mid g''(0)\mid=\frac{1}{\rho}\sin^2\phi,$$
$$v=\sqrt{\frac{k\rho}{2}}\left|\frac{\cos\phi_0+\cos\phi}{\sin\phi}\right|. \qquad (6.5.60)$$

我们最终得到在 H 型波入射时基于物理光学近似计算的半平面导体散射磁场为

$$H_z^{sc}(\rho,\phi)=I_0+\sqrt{\frac{j}{\pi}}h(0)\exp(-jk\rho)\exp(jv^2)F_-(v). \qquad (6.5.61)$$

I_0 和 v 分别由(6.5.59)和(6.5.60)式给出，I_0 是几何光学场，第二项则是由半平面边缘产生的衍射场.

单独写出衍射磁场

$$H_z^{d}(\rho,\phi)=\sqrt{\frac{j}{\pi}}h(0)\exp(-jk\rho)\exp(jv^2)F_-(v)$$
$$=h(0)K_-(v)\exp(-jk\rho), \qquad (6.5.62)$$

函数 K_- 称为变型的 Fresnel 积分,定义为

$$K_-(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}F_-(x)\exp\left[\mathrm{j}\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{6.5.63}$$

当 $x>3$ 时其级数展开式(见[6],p. 20,(38a)式)的首项已给出足够好的近似:

$$K_-(x)\approx\frac{1}{2x\sqrt{\pi}}\exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}\right). \tag{6.5.63a}$$

因此,远区的衍射磁场

$$\begin{aligned}H_z^{\mathrm{d}}(\rho,\phi)&=-h(0)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2\sin\phi}{\cos\phi_0+\cos\phi}\,\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho)}{\sqrt{\rho}}\\&=h(0)D^{\mathrm{m}}(\phi,\phi_0)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho)}{\sqrt{\rho}},\end{aligned} \tag{6.5.64}$$

这里

$$D^{\mathrm{m}}(\phi,\phi_0)=-\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2\sin\phi}{\cos\phi_0+\cos\phi}\quad(\text{物理光学}) \tag{6.5.65}$$

为 H 型波入射时的物理光学衍射系数. 由(6.5.35)式,精确解的衍射系数

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{m}}(\phi,\phi_0)&=-\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\left[\sec\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+\sec\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]\\&=-\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{4\cos\dfrac{1}{2}\phi\cdot\cos\dfrac{1}{2}\phi_0}{\cos\phi_0+\cos\phi}\quad(\text{精确解}).\end{aligned} \tag{6.5.66}$$

对于 E 型波入射,z 分量衍射场为电场,

$$E_z^{\mathrm{d}}(\rho,\phi)=h(0)D^{\mathrm{e}}(\phi,\phi_0)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho)}{\sqrt{\rho}}, \tag{6.5.67}$$

物理光学近似和精确解的衍射系数分别为

$$D^{\mathrm{e}}(\phi,\phi_0)=\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2\sin\phi_0}{\cos\phi_0+\cos\phi}\quad(\text{物理光学}), \tag{6.5.68}$$

$$D^{\mathrm{e}}(\phi,\phi_0)=\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2(2\pi k)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{4\sin\dfrac{1}{2}\phi\cdot\sin\dfrac{1}{2}\phi_0}{\cos\phi_0+\cos\phi}\quad(\text{精确解}). \tag{6.5.69}$$

现在求出面电流,设入射波的电场有 ϕ 和 z 两个方向分量:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}=(\boldsymbol{a}_\phi E_{\phi_0}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{a}_z E_{z0}^{\mathrm{i}})\exp[\mathrm{j}k\rho\cos(\phi-\phi_0)]. \tag{6.5.70}$$

这个入射波是由 E 型和 H 型两种入射波组合而成. 根据 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 分别与 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 的关系(1.2.2a)和(1.2.7a)式,E 型波的 $\boldsymbol{A}$ 和 H 型波的 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 均只有一个 z 分量:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_zA_z$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{a}_zA_{\mathrm{m}z}$. 由(1.2.11)和(1.2.12)式,在 $\partial/\partial z=0$ 的条件下,A_z 和 $A_{\mathrm{m}z}$ 分别与 E_z 和 H_z 有简单的比例关系:

$$A_z=-E_z/\mathrm{j}\omega,\quad A_{\mathrm{m}z}=-H_z/\mathrm{j}\omega. \tag{6.5.71}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的其余分量可分别由 A_{mz} 和 A_z 得出：

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{a}_z \times \nabla A_{mz}, \quad \boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{a}_z \times \nabla A_z. \tag{6.5.72}$$

这样，A_z 和 A_{mz} 的作用就像是两个独立的标量势函数，由它们可得到 E 型和 H 型二维场的组合场的所有分量. 由上式求出 $\boldsymbol{H}$ 的横向分量和纵向分量与电场的关系分别为

$$\boldsymbol{H}_\perp = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{a}_z \times \nabla E_z, \quad H_z = -\frac{k}{\omega\mu}E_\phi,$$

因此，$\boldsymbol{H}$ 可用 $\boldsymbol{E}$ 表示为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{a}_z \times \nabla E_z - \frac{k}{\omega\mu}E_\phi \boldsymbol{a}_z. \tag{6.5.73}$$

在物理光学近似下，由(6.5.20)式，半平面导体上的面电流 $\boldsymbol{J}_s^{po} = 2\boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{H}^i(\phi=0)$. 将入射波的电场(6.5.70)式代入(6.5.73)式，得入射波的磁场在 $\phi=0$ 半平面上的值：

$$\boldsymbol{H}^i(\phi = 0) = \left[-\boldsymbol{a}_x \frac{E_{\phi_0}^i}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\phi} - \boldsymbol{a}_z \frac{k}{\omega\mu}E_{\phi_0}^i\right]\exp[\mathrm{j}kx\cos(\phi - \phi_0)],$$

因为在 $\phi=0$ 半平面上 $\rho=x$，$H_\rho = H_x$，$H_\phi = 0$，在物理光学近似下，面电流的两个分量分别为：

$$\left.\begin{aligned} J_{sx}^{po} &= -\frac{2k}{\omega\mu}E_{\phi_0}^i \exp(\mathrm{j}kx\cos\phi_0), \\ J_{sz}^{po} &= \frac{2k}{\omega\mu}E_{z_0}^i \sin\phi_0 \cdot \exp(\mathrm{j}kx\cos\phi_0). \end{aligned}\right\} \tag{6.5.74}$$

为求出精确的面电流分布，需要求出半平面导体上、下两个面之间的磁场突变：

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{a}_y \times [\boldsymbol{H}(\rho,\phi = 0) - \boldsymbol{H}(\rho,\phi = 2\pi)], \tag{6.5.75}$$

这里 $\boldsymbol{H}$ 是入射波(6.5.70)入射时半平面问题精确解的磁场，由(6.5.73)式有

$$\boldsymbol{H} = -\frac{E_{z_0}^i}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{1}{x}\frac{\partial u^e}{\partial\phi}\boldsymbol{a}_x - \frac{k}{\omega\mu}E_{\phi_0}^i u^m \boldsymbol{a}_z, \tag{6.5.76}$$

u^e 和 u^m 分别为由(6.5.25)和(6.5.34)式给出的去掉场的幅度 E_0^i 或 H_0^i 后精确解的场函数. 由变型 Fresnel 积分的定义(6.5.63)，u^e 和 u^m 可分别用 K_- 表示为

$$u^e = \left\{K_-\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\right] - K_-\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0)\right]\right\}\exp(-\mathrm{j}k\rho), \tag{6.5.77}$$

$$u^m = \left\{K_-\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\right] + K_-\left[-\sqrt{2k\rho}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0)\right]\right\}\exp(-\mathrm{j}k\rho). \tag{6.5.78}$$

精确的面电流可以写作

$$J_{sx} = J_{sx}^{po} + J_{sx}^{c}, \quad J_{sz} = J_{sz}^{po} + J_{sz}^{c}, \tag{6.5.79}$$

J_{sx}^{c}和J_{sz}^{c}为对物理光学近似电流的修正项,即(6.5.42)式中的$\boldsymbol{J}_1$,分别为

$$\left.\begin{aligned} J_{sx}^{c} &= -2J_{sx}^{po}\sqrt{\frac{\mathrm{j}}{\pi}}F_{-}(v), \\ J_{sz}^{c} &= -2J_{sz}^{po}\left[F_{-}(v) - \frac{\exp(-\mathrm{j}v^2)}{2\mathrm{j}v}\right], \end{aligned}\right\} \tag{6.5.80}$$

这里

$$v = \sqrt{2kx}\left|\cos\frac{1}{2}\phi_0\right|. \tag{6.5.81}$$

6. 对衍射的几何理论的改进

衍射的几何理论有以下的明显缺点:

(1) 在反射和阴影区的边界,即$\phi=\pi\pm\phi_0$,衍射系数是奇异的.

(2) 在衍射射线的交点,即焦点,波的空间扩散因子变为无穷.

(3) 如果没有生成通过场的观察点的 Keller 锥,该观察点的衍射场绝对为零.

后两个缺点是几何光学概念必然有的,为克服第一个缺点现已有了一些改进方案,主要有两种.

方案之一,将边缘衍射问题的解,例如电场,写作

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{G} + \boldsymbol{E}^{d}, \tag{6.5.82}$$

这里$\boldsymbol{E}^{d}$仍然是 Keller 衍射的几何理论中的衍射场,但$\boldsymbol{E}^{G}$不同于 Keller 理论,在 Keller 理论中这一项是几何光学场,用$\boldsymbol{E}^{g}$表示.现在$\boldsymbol{E}^{G}$涉及 Fresnel 积分的特殊渐近展开级数,该 Fresnel 积分的宗量称为迂路参量(detour parameter),其平方为由边缘发出的衍射射线与由源直接发出的直射线到达场点处的相位差,在反射及阴影区边界附近迂路参量很小或为零,再加上特殊的符号选择规则使得$\boldsymbol{E}^{G}$与$\boldsymbol{E}^{d}$的奇异性相消,而保持总场有限;在远离反射及阴影边界处,迂路参量变得很大,$\boldsymbol{E}^{G}$变为几何光学场,从而与 Keller 理论保持一致.这种方案称为衍射的一致渐近理论(uniform asymptotic theory, UAT),可参考 Lee 和 Deschamps 的论文①.

由 Kouyoumjian 和 Pathak 提出的另一改进方案仍然保持 Keller 理论的框架,即散射场依然是几何光学场和边缘衍射场之和:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{g} + \boldsymbol{E}^{d}. \tag{6.5.83}$$

他们认为 Keller 的衍射系数在反射区和阴影区边界附近(称为过渡区)的奇异

① S. W. Lee and G. A. Deschamps, A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-24, pp. 25—34, Jan. 1976.

性是由于使用 Fresnel 积分的高频渐近式(6.5.26)和(6.5.28)所致. 而在过渡区,(6.5.25)式中的 a_1 和 a_2 已不满足渐近式(6.5.26)和(6.5.28)式所要求的条件 $|a_1|>\sqrt{10}$ 和 $|a_2|>\sqrt{10}$,需要用另外的方法求衍射系数. 根据线源激励的入射波在直边衍射问题的近似解,对于 E 型波入射他们得到的衍射场为

$$E_z^{\mathrm{d}} = E_0^{\mathrm{i}} D(\phi,\phi_0)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho)}{\sqrt{\rho}}, \tag{6.5.84}$$

这里 ρ 为边缘上的衍射点至场点的距离. 而新的衍射系数

$$D(\phi,\phi_0) = \frac{-\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}}\left\{\frac{F_-\left[2kL\cos^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)} - \frac{F_-\left[2kL\cos^2\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)}\right\}, \tag{6.5.85}$$

这里的 Fresnel 积分 $F_-(X)$ 定义为

$$F_-(X) = 2\mathrm{j}\sqrt{X}\exp(\mathrm{j}X)\int_{\sqrt{X}}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}\tau^2)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.5.86}$$

在(6.5.85)式中,L 是与入射波的类型有关的参量,称为距离参量,对于柱波入射

$$L = \frac{\rho\rho'}{\rho+\rho'}, \tag{6.5.87}$$

ρ' 是源点至直边上衍射点的距离. (6.5.84)中的 E_0^{i} 为投射到衍射点的入射波幅度,它与源点的发射波幅度 E_0 的关系为

$$E_0^{\mathrm{i}} = E_0\,\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho')}{\sqrt{\rho'}}. \tag{6.5.88}$$

这个新的衍射系数在过渡区中也不发散,适用于所有区域,这个理论称为一致性几何衍射理论(uniform geometrical theory of diffraction, UDT)[①]. 对于 H 型波入射,只需将衍射系数(6.5.85)式花括号中第二项前的负号改为正号,同时将(6.5.84)式中的 E 换为 H.

总场由入射场、反射场及衍射场之和构成,但在反射与照明区的边界上反射场突然降为零,而在照明与阴影区的边界入射场也突然降为零,所以正确的衍射场在跨越这两个边界时也必须是不连续的,而且能抵消几何光学场的突变,使得总场是连续变化的. 衍射场解(6.5.84)符合此要求. 例如考虑衍射场在入射波与反射波边界 $\phi+\phi_0=\pi$ 两侧的变化. (6.5.85)式花括号中第二项的符号由 $\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)$

① R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface, *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1448—1461, Nov. 1974.

决定,因为 $F_-(X)$ 的宗量 X 须取正值, $\sqrt{X}=(2kL)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)\right|$,所以 $\sqrt{X}/\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)=\pm(2kL)^{\frac{1}{2}}$,等式右侧的±号由 $\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)$ 的取值正负决定. 当 $\phi+\phi_0=\pi$ 时, $X=0$,由(6.5.57)式可得

$$-\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}}\frac{F_-\left[2kL\cos^2\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0)}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\sqrt{L}, \text{若 } \phi<\pi-\phi_0,\\ \frac{1}{2}\sqrt{L}, \text{若 } \phi>\pi-\phi_0.\end{cases}$$

这样,衍射场在边界 $\phi+\phi_0=\pi$ 两侧发生突变. 由(6.5.84)—(6.5.88)式,在入射区与反射区边界附近的衍射场

$$E_z^{\mathrm{d}}=-E_0^{\mathrm{i}}\frac{\exp(-\mathrm{j}\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}}\frac{F_-\left[2kL\cos^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)}\frac{\exp(-\mathrm{j}k\rho)}{\sqrt{\rho}}\pm\frac{1}{2}E_0\frac{\exp[-\mathrm{j}k(\rho+\rho')]}{\sqrt{\rho+\rho'}}, \tag{6.5.89}$$

它的第一项在 $\phi=\pi-\phi_0$ 分界线两侧是连续的,但由于第二项前取不同符号,在分界线两侧不连续: 当 $\phi<\pi-\phi_0$ 时(反射区)取正号;当 $\phi>\pi-\phi_0$ 时(照明区)取负号. 入射场在分界线两侧是连续的,但反射场有突变:

$$E_z^{\mathrm{r}}=\begin{cases}-E_0\frac{\exp[-\mathrm{j}k(\rho+\rho')]}{\sqrt{\rho+\rho'}}, & \text{当 } \phi<\pi-\phi_0;\\ 0, & \text{当 } \phi>\pi-\phi_0.\end{cases} \tag{6.5.90}$$

衍射场的突变与反射场的突变刚好相抵消,总场在照明区与反射区分界线两侧保持着连续性.

衍射的几何理论以及一致性几何衍射理论已获得相当的实际应用,特别是在天线工程领域,这个理论发展过程中的基本论文及重要的工程应用论文已经汇集于 Hansen 编辑的论文集[11]中. 也有相当多的专著出版,此处就不一一列举了.

参考文献

[1] Stratton J A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill, 1941: §8.13, §8.14. [中译本: 电磁理论. 何国瑜译. 北京: 北京航空学院出版社,1986.]

[2] Jackson J D. Classical electrodynamics, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1975: ch. 9. [中译本: 经典电动力学. 朱培豫译. 北京: 人民教育出版社,1978.]

[3] Born M, Wolf E. Principles of optics, 6th ed., Pergamon Press, 1980: ch. 8, ch. 11. [中译本: 光学原理. 杨霞荪等译. 北京: 科学出版社,1978.]

[4] Kong J A. Electromagnetic wave theory. John Wiley & Sons，1986：ch. 5，ch. 6.
[5] Jones D S. The theory of electromagnetism. Pergamon Press，1964：ch. 8，ch. 9.
[6] James G L. Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. Peter，London，1980：ch. 2，ch. 3.
[7] King R W P，Wu T T. The scattering and diffraction of waves. Harvard University Press，1959：ch. 2.
[8] Sommerfeld A. Optics. Academic Press，1949：§ 38.
[9] Clemmow P C. The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields. Pergamon Press，1966：ch. 2，ch. 3.
[10] Jull E V. Aperture antennas and diffraction theory. Peter，London，1981：ch. 7，Appendixes A. 4，A. 5.
[11] Hansen R C (ed.). Geometrical theory of diffraction. IEEE Press，1981.

附录 A　矢量与张量分析公式

1. 矢量公式

$$\nabla(\Phi+\psi)=\nabla\Phi+\nabla\psi \tag{A.1}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{A.2}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{A.3}$$

$$\nabla(\Phi\psi)=\Phi\nabla\psi+\psi\nabla\Phi \tag{A.4}$$

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{A.5}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{A.6}$$

$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{A.7}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{A.8}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{A.9}$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi \tag{A.10}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{A.11}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0 \tag{A.12}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{A.13}$$

$$\iiint_V \nabla\Phi \mathrm{d}V = \oiint_S \Phi \mathrm{d}S \tag{A.14}$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{（散度定理）} \tag{A.15}$$

$$\iiint_V \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S \tag{A.16}$$

$$\iiint_V (\Phi\nabla^2\psi+\nabla\Phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V = \oiint_S \Phi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}S \quad \text{（第一格林公式）} \tag{A.17}$$

$$\iiint_V (\Phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V = \oiint_S (\Phi\nabla\psi-\psi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{（第二格林公式，格林定理）} \tag{A.18}$$

$$\iint_S \boldsymbol{n}\times\nabla\Phi\mathrm{d}S = \oint_C \Phi\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{A.19}$$

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad \text{（斯托克斯定理）} \tag{A.20}$$

2. 正交曲线坐标系中的∇算符

(1) 直角坐标系：$u_1=x$，$u_2=y$，$u_3=z$，$h_1=h_2=h_3=1$

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\tag{A.21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{A.22}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\tag{A.23}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\tag{A.24}$$

(2) 圆柱坐标系：$u_1=\rho$，$u_2=\phi$，$u_3=z$，$h_1=1$，$h_2=\rho$，$h_3=1$

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\tag{A.25}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{A.26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{a}_z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]\tag{A.27}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\tag{A.28}$$

(3) 球坐标系：$u_1=r$，$u_2=\theta$，$u_3=\phi$，$h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=r\sin\theta$

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{a}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\tag{A.29}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\tag{A.30}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]+\boldsymbol{a}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\tag{A.31}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\tag{A.32}$$

(4) 一般正交曲线坐标系：$u_1,u_2,u_3,h_1,h_2,h_3,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\boldsymbol{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}+\boldsymbol{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\tag{A.33}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]\tag{A.34}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\boldsymbol{a}_1\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial u_3}\right]+\boldsymbol{a}_2\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial u_1}\right]+\boldsymbol{a}_3\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial u_2}\right] \tag{A.35}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{A.36}$$

3. 张量公式

$$\nabla(\Phi\mathbf{A})=(\nabla\Phi)\mathbf{A}+\Phi(\nabla\mathbf{A}) \tag{A.37}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{AB})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\mathbf{A}\times\nabla)\boldsymbol{B} \tag{A.38}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{AB})=\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{A.39}$$

$$\iiint\limits_V(\nabla\mathbf{A})\,\mathrm{d}V=\oiint\limits_S\boldsymbol{n}\mathbf{A}\,\mathrm{d}S \tag{A.40}$$

$$\iiint\limits_V\nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V=\oiint\limits_S\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}S \tag{A.41}$$

$$\iiint\limits_V\nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}V=\oiint\limits_S\boldsymbol{n}\times\mathbf{A}\mathrm{d}S \tag{A.42}$$

附录 B 常用函数

1. Dirac δ 函数

三维空间中的定义

$$\iiint_V f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V = \begin{cases} f(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0 \in V; \\ 0, & \boldsymbol{r}_0 \notin V. \end{cases} \tag{B.1}$$

正交曲线坐标系中的表示式

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\delta(u_1-u_{10})}{h_1}\frac{\delta(u_2-u_{20})}{h_2}\frac{\delta(u_3-u_{30})}{h_3} \tag{B.2}$$

在圆柱坐标系(ρ,ϕ,z)中

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \delta(\rho-\rho_0,\phi-\phi_0,z-z_0) \\ &= \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \delta(\rho,z-z_0) = \frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho)\delta(z-z_0) \quad (\boldsymbol{r}_0\text{ 在 } z \text{ 轴上}) \tag{B.3a}$$

在球坐标系(r,θ,ϕ)中

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \delta(r-r_0,\theta-\theta_0,\phi-\phi_0) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \delta(r-r_0,\theta-\theta_0) \\ &= \frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \quad (\boldsymbol{r}_0\text{ 在 } z \text{ 轴上}, \theta_0 = 0 \text{ 或 } \pi)\end{aligned} \tag{B.4a}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi r^2}\delta(r) \quad (\boldsymbol{r}_0\text{ 在原点}) \tag{B.4b}$$

一维 δ 函数及其一阶微商的积分表示式

$$\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}k(x-x_0)}\,\mathrm{d}k \tag{B.5}$$

$$\delta'(x-x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \mathrm{j}k\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}k(x-x_0)}\,\mathrm{d}k \tag{B.5a}$$

2. Bessel 函数

Bessel 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{B.6}$$

第一类 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 的级数式

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \tag{B.7}$$

第二类 Bessel 函数(Neumann 函数)Y_n 的定义

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \tag{B.8}$$

当 ν 为非整数时 $J_{\pm\nu}(x)$ 构成 Bessel 方程(B.6)的一对线性无关独立解. 当 $\nu=n$ 为整数时须构造第二个独立解 $Y_n(x)$. 实际上不论 ν 是否为整数均使用 $Y_n(x)$ 作为第二个独立解. 以下公式中的 n 不须为整数.

第三类 Bessel 函数(Hankel 函数)的定义

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + jY_n(x) \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - jY_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{B.9}$$

第一类和第二类变型 Bessel 函数的定义

$$\left.\begin{aligned} I_n(x) &= j^{-n}J_n(jx) \\ K_n(x) &= \frac{\pi}{2}j^{n+1}H_n^{(1)}(jx) \end{aligned}\right\} \tag{B.10}$$

它们是下面的微分方程的两个线性无关独立解:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{B.11}$$

递推关系

$$\frac{2n}{x}Z_n(x) = Z_{n+1}(x) + Z_{n-1}(x) \tag{B.12}$$

($Z_n(x)$ 表示第一、二、三类 Bessel 函数中的任一个)

$$\left.\begin{aligned} \frac{2n}{x}I_n(x) &= I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) \\ \frac{2n}{x}K_n(x) &= K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) \end{aligned}\right\} \tag{B.13}$$

微分公式

$$\left.\begin{aligned} &xZ_n'(x) = nZ_n(x) - xZ_{n+1}(x) = -nZ_n(x) + xZ_{n-1}(x) \\ &Z_0'(x) = -Z_1(x), Z_1'(x) = Z_0(x) - \frac{1}{x}Z_1(x) \\ &xI_n'(x) = nI_n(x) + xI_{n+1}(x) = -nI_n(x) + xI_{n-1}(x) \\ &I_0'(x) = I_1(x) \\ &xK_n'(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x) = -nK_n(x) - xK_{n-1}(x) \\ &K_0'(x) = -K_1(x) \end{aligned}\right\} \tag{B.14}$$

小宗量渐近公式($x \ll 1$)

$$\left.\begin{aligned}
&J_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right) \\
&Y_n(x) \sim \frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n (n\neq 0) \\
&I_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&K_0(x) \sim -\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right) \\
&K_n(x) \sim \frac{\Gamma(n)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n (n\neq 0)
\end{aligned}\right\} \tag{B.15}$$

($\gamma=0.5772\cdots$为 Euler 常数.)

大宗量渐近公式($x\gg 1,n$)

$$\left.\begin{aligned}
&J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right) \\
&Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right) \\
&H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{j(x-\pi/4-n\pi/2)} \\
&H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-j(x-\pi/4-n\pi/2)} \\
&I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x} \\
&K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}
\end{aligned}\right\} \tag{B.16}$$

积分公式

$$\left.\begin{aligned}
&\int x^{-n}Z_{n+1}(x)\mathrm{d}x = -x^{-n}Z_n(x) \\
&\int Z_1(x) = -Z_0(x) \\
&\int x^{n}Z_{n-1}(x)\mathrm{d}x = x^{n}Z_n(x) \\
&\int xZ_0(x)\mathrm{d}x = xZ_1(x) \\
&\int xZ_n(\alpha x)Z_n(\beta x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}[\beta Z_n(\alpha x)Z_{n-1}(\beta x)-\alpha Z_{n-1}(\alpha x)Z_n(\beta x)]\ (\alpha\neq\beta) \\
&\int xZ_n^2(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}[Z_n^2(\alpha x)-Z_{n-1}(\alpha x)Z_{n+1}(\alpha x)] \\
&\qquad = \frac{x^2}{2}\left[Z_n'^2(\alpha x)+\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2x^2}\right)Z_n^2(\alpha x)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{B.17}$$

Wronsky 关系

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{Y}_n'(x)-\mathrm{J}_n'(x)\mathrm{Y}_n(x)&=\mathrm{J}_{n+1}(x)\mathrm{Y}_n(x)-\mathrm{J}_n(x)\mathrm{Y}_{n+1}(x)\\&=\mathrm{J}_n(x)\mathrm{Y}_{n-1}(x)-\mathrm{J}_{n-1}(x)\mathrm{Y}_n(x)=\frac{2}{\pi x}\\\mathrm{I}_n(x)\mathrm{K}_n'(x)-\mathrm{I}_n'(x)\mathrm{K}_n(x)&=-\mathrm{I}_n(x)\mathrm{K}_{n+1}(x)-\mathrm{I}_{n+1}(x)\mathrm{K}_n(x)\\&=-I_n(x)\mathrm{K}_{n-1}(x)-\mathrm{I}_{n-1}(x)\mathrm{K}_n(x)=-\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\tag{B. 18}$$

3. 球 Bessel 函数

微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left[1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right]R=0\tag{B. 19}$$

(B. 19)的解可用半整数阶的 Bessel 函数表示，称为球 Bessel 函数，记作 $\mathrm{z}_n(x)$. 但以下的公式中，n 不必为整数.

球 Bessel 函数的定义

$$\mathrm{z}_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{Z}_{n+\frac{1}{2}}(x)\tag{B. 20}$$

($\mathrm{z}_n(x)$表示三类球 Bessel 函数，可以是 $\mathrm{j}_n(x)$，$y_n(x)$以及 $\mathrm{h}_n^{(1)}(x)$，$\mathrm{h}_n^{(2)}(x)$.)

递推关系和微分公式

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{z}_{n-1}(x)+\mathrm{z}_{n+1}(x)&=\frac{2n+1}{x}\mathrm{z}_n(x)\\\mathrm{z}_n'(x)&=\frac{1}{2n+1}[n\mathrm{z}_{n-1}(x)-(n+1)\mathrm{z}_{n+1}(x)]\end{aligned}\right\}\tag{B. 21}$$

Wronsky 关系

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{j}_n(x)y_n'(x)-\mathrm{j}_n'(x)y_n(x)&=\frac{1}{x^2}\\\mathrm{j}_n(x)[\mathrm{h}_n^{(2)}(x)]'-\mathrm{j}_n'(x)\mathrm{h}_n^{(2)}(x)&=-\frac{\mathrm{j}}{x^2}\end{aligned}\right\}\tag{B. 22}$$

4. Legendre 函数

Legendre 函数方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+n(n+1)R=0\quad(-1\leqslant x\leqslant 1, n\text{ 为非负整数})\tag{B. 23}$$

(B. 23)的解为有限多项式，称为 Legendre 函数.

第一类 Legendre 函数 $\mathrm{P}_n(x)$的微分表示式

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\quad(\text{Rodrigues 公式})\tag{B. 24}$$

连带 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]R=0 \quad (m\ 为整数) \tag{B. 25}$$

(B. 25)的解称为连带 Legendre 函数.

第一类连带 Legendre 函数 $\mathrm{P}_n^m(x)$

$$\mathrm{P}_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_n(x)\ (0\leqslant m\leqslant n) \tag{B. 26}$$

低阶第一类 Legendre 函数

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0=1,\mathrm{P}_1=x=\cos\theta,\mathrm{P}_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)\\
&\mathrm{P}_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=\frac{1}{8}(5\cos3\theta+3\cos\theta)\\
&\mathrm{P}_4=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{64}(35\cos4\theta+20\cos2\theta+9)
\end{aligned}\right\} \tag{B. 27}$$

低阶第一类连带 Legendre 函数

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0^0(x)=1 && \mathrm{P}_3^0(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
&\mathrm{P}_1^0(x)=x && \mathrm{P}_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}\\
&\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2} && \mathrm{P}_3^2(x)=15x(1-x^2)\\
&\mathrm{P}_2^0(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) && \mathrm{P}_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}\\
&\mathrm{P}_2^1(x)=3x(1-x^2)^{1/2} &&\\
&\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x) &&
\end{aligned}\right\} \tag{B. 28}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0^0(\cos\theta)=1 && \mathrm{P}_3^0(\cos\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta(5\cos^2\theta-3)\\
&\mathrm{P}_1^0(\cos\theta)=\cos\theta && \mathrm{P}_3^1(\cos\theta)=\frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)\\
&\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)=\sin\theta && \mathrm{P}_3^2(\cos\theta)=15\cos\theta\cdot\sin^2\theta\\
&\mathrm{P}_2^0(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) && \mathrm{P}_3^3(\cos\theta)=15\sin^2\theta\\
&\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)=3\cos\theta\cdot\sin^2\theta &&\\
&\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)=3\sin^2\theta &&
\end{aligned}\right\} \tag{B. 29}$$

递推公式

$$\left.\begin{aligned}
&(2n+1)xP_n^m = (n+m)P_{n-1}^m + (n-m+1)P_{n+1}^m \\
&P_{n-1}^m = xP_n^m - (n-m+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^{m-1} \\
&P_{n+1}^m = xP_n^m + (n+m)(1-x^2)^{1/2}P_n^{m-1} \\
&(2n+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^m = P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} \\
&(1-x^2)^{1/2}P_n^{m+1} = 2mxP_n^m - (n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^{m-1}
\end{aligned}\right\} \tag{B. 30}$$

微分公式

$$\left.\begin{aligned}
&P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n \\
&xP'_n - P'_{n-1} = nP_n \\
&P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n \\
&(1-x^2)P'_n = nP_{n-1} - nxP_n \\
&(1-x^2)\frac{dP_n^m}{dx} = (n+1)xP_n^m - (n-m+1)P_{n+1}^m \\
&\qquad\qquad = (n+m)P_{n-1}^m - nxP_n^m
\end{aligned}\right\} \tag{B. 31}$$

积分公式

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_s^m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{ns} \\
&\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-x^2)}P_n^m(x)P_n^s(x)dx = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{ms}
\end{aligned}\right\} \tag{B. 32}$$

5. 某些积分函数

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \quad \text{正弦积分} \tag{B. 33}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau \quad \text{余弦积分} \tag{B. 34}$$

$$\mathrm{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos\tau}{\tau}d\tau = \gamma + \ln x - \mathrm{Ci}(x) \tag{B. 35}$$

$$\left.\begin{aligned}
&C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi\tau^2\right)d\tau, \quad C(-x) = -C(x) \\
&S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi\tau^2\right)d\tau, \quad S(-x) = -S(x)
\end{aligned}\right\} \text{Fresnel 积分} \tag{B. 36}$$

附录 C　电磁学的单位制

在电磁学中使用着多种单位制，这里有历史原因，更多则是与涉及的领域有关. 现在虽有统一采用国际单位制(SI)的趋势，但仍不排除使用其他单位制的偏好或习惯. 一个突出的例子是 J. D. Jackson 的经典名著《经典电动力学》，该书的第一版(1962)和第二版(1975)均使用 Gauss 单位制，于 1999 年出版的第三版不惜一改已流行 37 年的体制，前 10 章改用国际单位制，只在涉及相对论电动力学的后 6 章仍保持原使用的 Gauss 单位制. Jackson 在该书的第三版序言中说出了促使他作出改变的原因是“几乎所有的本科教材，以及所有各种程度的工程书籍都使用国际单位制”. 电磁学单位制对于从事研究和工程技术实际工作的科技工作者是一个重要问题，在此方面稍有不慎便有可能导致无可挽回的损失. 因此，我们在此对单位制问题作一点稍长的介绍.

1. 关于单位制的一般问题

物理学中有许多物理量，每个物理量都通过物理规律和另一些物理量相联系，为了对物理量统一计量就需要有一定的单位制. 单位制就是选定一些物理量作为基本量并且规定它们的单位作为基本单位，其他的物理量则作为导出量，它们的单位按定义或物理规律确定. 国际单位制是我国的法定单位制.

以下是一些与单位制有关的一般性问题.

(1) 选择哪些量作为基本量，基本量的数目以及基本单位的选取有一定的任意性. 例如，SI 单位制有七个基本量，而电磁学的 Gauss 单位制只有三个基本量.

(2) 所有导出量的单位或者根据定义，或是依据一定的物理规律确定. 在同一个单位制中，当基本的物理规律中的比例系数取定之后，其他公式中的比例系数就不能任意规定了.

(3) 在同一单位制中，所有的导出量都可以表示为基本量的不同因次的乘积，这称为该导出量的量纲. 任一物理公式，其等式两侧的量纲必须相同. 量纲分析是检验任何物理等式(特别是很复杂的等式)的一种基本方法. 同一物理量在不同单位制中的量纲一般不相同.

(4) 同一物理规律在不同的单位制中的数学形式(公式或方程式)一般不同，通常表现为出现不同的系数. 这个问题在电磁学中特别突出，由于单位制不同，同一物理规律的数学形式一般不同.

2. 国际单位制(SI)

自 1960 年开始执行的国际单位制(Système International d'Unités)有七个基本量：长度、质量、时间、电流以及热力学温度、物质的量(amount of substance)、发光强度(luminous intensity). 国际单位制中的四个电磁学基本量的单位规定如下：

米——长度单位，自 1983 年起采用的定义为"光在真空中在时间间隔 1/299 792 458 s 内运动的距离".

千克——质量单位，以存于巴黎国际权度局的铂铱金千克原器的质量作为 1 千克，该标准始于 1889 年.

秒——时间单位，自 1983 年起"以铯(Cs-133)原子的两个基态超精细能级之间在无外场时辐射跃迁的周期 T 作为时间基准，规定 $1\,\mathrm{s}=9\ 192\ 631\ 770\,T$".

安培——电流强度单位，这个单位标准是通过恒稳电流之间的磁相互作用力间接规定的. 当电流通过真空中有相等电流的两根相距 1 米的无限长平行细导线时，每米长导线受力为 2×10^{-7} 牛顿时，导线中的电流强度定义为 1 安培.

根据安培定律，真空中电流相等的两根无限长平行细导线相距为 r 时，每 l 长度导线上受到的磁场力为

$$F = k_1 \frac{2I^2 l}{r}, \tag{C. 1}$$

式中 I 为导线上的电流强度. 在 SI 单位制中比例常数 $k_1=\mu_0/4\pi$，(C. 1)式便写作

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2 l}{r}. \tag{C. 1a}$$

若两导线间距 r 为 1 米，每米长导线上受力为 $F=2\times10^{-7}$ 牛顿时，导线上的电流强度 I 为 1 安培. 由(C. 1a)式便要求

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \frac{\text{牛顿}}{(\text{安培})^2}\left(\text{或}\frac{\text{亨利}}{\text{米}}\right), \tag{C. 1b}$$

基本单位安培的规定相当于对 μ_0 值作了上述规定.

其余电磁学量的单位在 SI 单位制中的都是导出单位，例如电量单位库仑定义为库仑=安培·秒. 库仑定律

$$F = k_2 \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{C. 2}$$

的比例常数 k_2 在 SI 单位制中为 $k_2=1/4\pi\varepsilon_0$. (C. 2)式便写作

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{C. 2a}$$

除 ε_0 外，上式两侧所有的量都有确定的单位，ε_0 便有确定的单位和数值. 由(C. 2a)得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{Fr^2}\frac{(\text{库仑})^2}{\text{牛顿}\cdot\text{米}^2}\left(\text{或}\frac{\text{法拉}}{\text{米}}\right). \tag{C.2b}$$

为得到 ε_0 的数值,须写出库仑定律在绝对电磁单位制(emu)中的形式

$$F = C^2\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{C.3}$$

其中 C 为电动常数,它是在绝对静电单位制(esu)中度量的电量与在绝对电磁单位制中度量的电量的比值.绝对电磁单位制的电量单位称为绝对库仑,有

1 绝对库仑=1 绝对安培·秒=10 安培·秒=10 库仑,

这里使用了

$$1\ \text{绝对安培} = 10\ \text{安培}. \tag{C.4}$$

(C.3)和(C.4)的由来我们会在后面给出.若在(C.3)式中取 $q_1=q_2=1$ 绝对库仑,$r=1$ 厘米,则 $F=C^2$ 达因.将它们代入(C.2b)式,再换算为 SI 制,得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{(1\ \text{绝对库仑})^2}{(1\ \text{厘米})^2\cdot C^2(\text{达因})} = \frac{1}{4\pi\times10^{-11}\times C^2}\frac{(\text{库仑})^2}{\text{牛顿}\cdot\text{米}^2}.$$

将绝对电磁单位制中 C 的数值

$$C = 2.998\times10^{10}\approx 3\times10^{10}$$

代入上式,便得 ε_0 的精确值和近似值

$$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\approx\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\frac{\text{法拉}}{\text{米}}\right). \tag{C.2c}$$

可见

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{C^2}\left(\frac{\text{米}}{\text{秒}}\right)^{-2} \tag{C.5}$$

是电磁学规律导致的必然结果,μ_0 和 ε_0 是 SI 单位制采用的基本常数.

在表 C.1 和 C.2 中分别列出了 SI 单位制中力学量的基本单位和导出单位以及电磁学量的基本单位和导出单位的定义式、单位名称、缩写符号及量纲.

3. 高斯绝对单位制

高斯绝对单位制简称为高斯单位制(Gaussian System of Units),它是建立在绝对静电单位制(esu)和绝对电磁单位制(emu)的基础之上,需要先谈一下这两种单位制.

(1) 绝对静电单位制(esu)

以长度、质量和时间作为基本量,以厘米、克、秒作为基本单位.电量的单位是该单位制的第一个导出单位.在真空中的库仑定律(C.2)式中选取比例系数 $k_2=1$ 得

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{C.6}$$

设两个电荷具有等电量,$q_1=q_2$,由此确定电量的单位.真空中两个具有等电量

的点电荷,相距为 1 厘米时,若电荷受力为 1 达因,规定此时每个电荷的电量为 1 个绝对静电单位制的电量单位,称为静库仑. 由此制定其余导出量的单位.

表 C.1 国际单位制中的力学量

物理量	定义式	单位(符号)	量 纲
长度	l	米(m)	L
质量	m	千克(kg)	M
时间	t	秒(s)	T
速度	$v=l/t$	米/秒(m/s)	LT^{-1}
加速度	$a=v/t$	米/秒²(m/s²)	LT^{-2}
力	$F=ma$	牛[顿](N)	MLT^{-2}
功(能)	$W=Fl$	焦[耳](J)	ML^2T^{-2}
功率	$P=W/t$	瓦[特](W)	ML^2T^{-3}
频率	$f=1/t$	赫[兹](Hz)	T^{-1}

表 C.2 国际单位制中的电磁学量

物理量	定义式	单位(符号)	量 纲
电流强度	(基本单位)	安[培](A)	I
电量	$q=It$	库[仑](C)	TI
电场强度	$E=F/q$	伏[特]·米⁻¹(V/m)	$LMT^{-3}I^{-1}$
电势	$\Delta\Phi=El$	伏[特](V)	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
电容	$C=q/\Phi$	法[拉](F)	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$
电阻	$R=\Delta\Phi/I$	欧[姆](Ω)	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
电导率	$\sigma=J/E$	西门子·米⁻¹(S/m)	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$
电偶极矩	$p=ql$	库[仑]·米(C·m)	LTI
电位移	$D=\varepsilon_0E+P$	库[仑]·米⁻²(C/m²)	$L^{-2}TI$
介电常数	$\varepsilon=D/E$	法[拉]·米⁻¹(F/m)	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$
磁感应强度	$B=F/Il$	特[斯拉](T)	$MT^{-2}I^{-1}$
磁感应通量	$\Phi_m=BS$	韦伯(Wb)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
磁偶极矩	$m=IS$	安[培]·米²(A·m)	L^2I
磁场强度	$H=B/\mu_0-M$	安[培]·米⁻¹(A/m)	$L^{-1}I$
磁导率	$\mu=B/H$	亨[利]·米⁻¹(H/m)	$LMT^{-2}I^{-2}$
电感	$L=\Phi_m/I$	亨[利](H)	$L^2MT^{-2}I^{-2}$

由于只有三个基本量,绝对静电单位制中的物理量的量纲与 SI 制的物理量量纲不同. 绝对静电单位制一般只用于度量电学量.

(2) 绝对电磁单位制(emu)

该单位制选择的基本量和基本单位与静电制相同,但以安培定律确定的电流单位作为度量其他电磁学量的基础. 在无限长细导线间相互作用力的(C.1)

式中令比例系数 $k_1=1$，有

$$F=\frac{2I^2 l}{r}. \tag{C.7}$$

由此确定电流的单位. 当两导线相距为 1 厘米，每厘米长导线受力为 2 达因时，导线上的电流规定为绝对电磁单位制的 1 个电流单位，称为 1 绝对安培. 当两导线相距 1 米，由(C.7)式，每米长导线受力仍为 2 达因 $=2\times10^{-5}$ 牛顿，与 SI 单位制中对安培的规定比较，实际上是取 1 安培 $=10^{-1}$ 绝对安培，这就是(C.4)式的来由.

虽然基本单位的选择相同，由于基本的物理定律选择得不同，电磁制的第一个导出量是电流强度，但电流强度仍然定义为电量的时间变化率，因此电磁制中的电量 q 便与静电制中的电量 q 有不同的量纲. 其他电磁学量的量纲在这两种单位制中也不同，而力学量的量纲则相同.

由(C.6)和(C.7)，绝对静电单位制和绝对电磁单位制中电量 q 的量纲分别为

$$[q]_{\text{esu}}=\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1},$$
$$[q]_{\text{emu}}=\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2},$$

这里以方括号表示其内物理量的量纲. 同一电量 q 在绝对静电单位制中度量所得的数值和单位记作 q_{esu}，在绝对电磁单位制中度量所得记作 q_{emu}，它们的比例和单位为

$$\frac{q_{\text{esu}}}{q_{\text{emu}}}=C=2.998\times10^{10}\ \frac{\text{厘米}}{\text{秒}}, \tag{C.8}$$

C 称为电动常数，其值系由实验测量确定. 因此，可将静电单位制中的库仑定律(C.6)式写作

$$F=\frac{q_{1\text{esu}}\cdot q_{2\text{esu}}}{r^2}=C^2\,\frac{q_{1\text{emu}}\cdot q_{2\text{emu}}}{r^2},$$

这后一等式就是(C.3)式.

绝对电磁单位制一般也只用于度量磁学量，很少用于度量电学量.

(3) 高斯绝对单位制

所有的电学量用绝对静电单位制度量，所有的磁学量用绝对电磁单位制度量，这就是高斯绝对单位制，所以它的基本量也是三个，基本单位仍是厘米、克和秒. 由于高斯制是由两种单位制合成的，在含有电学量和磁学量这两者的公式中就会出现用这两种单位制度量同一物理量时的变换系数，即电动常数 C 的一定因次. 表 C.3 列出了常用的电磁学公式在 SI 和高斯单位制中的形式，供查阅、比较.

由表 C.3 可以看出，高斯制的公式中除了常数 C 之外还经常出现系数 4π.

在 SI 制中,通过选取比例系数 $k_1=\mu_0/4\pi$ 和 $k_2=1/4\pi\varepsilon_0$ 使得无理数 4π 不出现在其他公式中,比例系数的这种选择称为有理化.

表 C.3 国际单位制和高斯单位制中电磁学常用公式或物理量定义对照

定律或物理量	国际单位制	高斯单位制
库仑定律	$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\|^3}$	$\boldsymbol{F}=q_1q_2\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\|^3}$
安培定律	$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{1}{C}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$
法拉第定律	$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$	$\mathscr{E}=-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$
电位移	$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}$
磁场强度	$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}$
欧姆定律	$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$
电磁场能量密度	$u=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$	$u=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$
麦克斯韦方程组	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{C}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{C}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{C}\boldsymbol{J}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
洛伦兹力	$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$
坡印亭矢量	$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{S}=\frac{C}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$
电磁势	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{C}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$

4、国际单位制和高斯单位制的换算

国际单位制和高斯单位制是电磁学中使用的两种主要单位制.国际单位制中选取的力学量基本单位(米、千克、秒)与人类的身材以及日常活动相适应,它的电磁学单位则适用于工业生产,因此获得广泛的使用,SI 单位制曾被称为“人类单位制”.而高斯单位制适用于相对论性电动力学和粒子物理学,被称为“科学的”单位制.应该说这两种单位制各有千秋,选用何者主要取决于所涉及的领域,因此谈论孰优孰劣是不恰当的.

作为在电磁学领域工作的科技工作者,原则上应熟悉这两种单位制.经常会用到 SI 单位制和高斯单位制之间的单位换算,在表 C.4 中列出了常用物理量的

1 个 SI 单位与对应的高斯制单位之间的数值换算关系，其中的 C 仅取数值，即 $C=2.998\times10^{10}\approx3\times10^{10}$.

表 C.4　国际单位制和高斯单位制间的单位换算关系

物理量(符号)	国际单位制	乘数	高斯单位制
长度(l)	1 米(m)	10^2	厘米(cm)
质量(m)	1 千克(kg)	10^3	克(g)
时间(t)	1 秒(s)	1	秒(s)
力(F)	1 牛[顿](N)	10^5	达因(dyn)
功(能)(W)	1 焦[耳](J)	10^7	尔格(erg)
功率(P)	1 瓦[特](W)	10^7	尔格·秒$^{-1}$(erg·s^{-1})
频率(f)	1 赫[兹](Hz)	1	赫[兹](Hz)
电流强度(I)	1 安[培](A)	$\frac{C}{10}\approx3\times10^9$	静库仑·秒$^{-1}$ (statcoul·s^{-1})
电量(q)	1 库[仑](C)	$\frac{C}{10}\approx3\times10^9$	静库仑(statcoul)
电场强度(E)	1 伏·米$^{-1}$ $\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)$	$\frac{10^6}{C}\approx\frac{1}{3}\times10^{-4}$	静伏特·厘米$^{-1}$ (statvolt·cm^{-1})
电位移(D)	1 库[仑]·米$^{-2}$ $\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right)$	$\frac{4\pi C}{10^5}\approx12\pi\times10^5$	静库仑·厘米$^{-2}$ (statcoul·cm^{-2})
电势(Φ)	1 伏[特](V)	$\frac{10^8}{\mathrm{C}}\approx\frac{1}{3}\times10^{-2}$	静伏特(statvolt)
电导率(σ)	1 西门子·米$^{-1}$ $\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}\right)$	$\frac{3\mathrm{C}}{10}\approx9\times10^9$	秒$^{-1}$(s^{-1})
电阻(R)	1 欧[姆](Ω)	$\frac{10^9}{C^2}\approx\frac{1}{9}\times10^{-11}$	秒·厘米$^{-1}$(s·cm^{-1})
电容(C)	1 法[拉](F)	$\frac{C^2}{10^9}\approx9\times10^{11}$	厘米(cm)
磁感应通量(Φ_m)	1 韦伯(Wb)	10^8	高斯·厘米^2(麦克斯韦) (Gs·cm^2)
磁感应强度(B)	1 特[斯拉](T)	10^4	高斯(Gs)
磁场强度(H)	1 安[培]·米$^{-1}$ $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$	$4\pi\times10^{-3}$	奥斯特(Oe)
电感(L)	1 亨[利](H)	$\frac{10^9}{C^2}\approx\frac{1}{9}\times10^{-11}$	静亨利(stathenry)

附录 D　常用物理常数

物理常数

电子的静止质量	$m_e=9.1094\times10^{-31}$	kg
质子的静止质量	$m_p=1.6726\times10^{-27}$	kg
电子的电荷	$e=-1.6022\times10^{-19}$	C
电子的荷质比	$e/m_e=-1.7588\times10^{11}$	$C\cdot kg^{-1}$
电子伏特	$1eV=1.6022\times10^{-19}$	J
普朗克常数	$h=6.6261\times10^{-34}$	$J\cdot s$
玻尔兹曼常数	$k=1.3806\times10^{-23}$	$J\cdot K^{-1}$
引力常数	$G=6.6732\times10^{-11}$	$N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$
阿伏伽德罗常数	$N=6.022\times10^{26}$	mol^{-1}

真空的物理常数

光速	$C=2.997\ 925\times10^{8}$	$m\cdot s^{-1}$
介电常数	$\varepsilon_0=8.854\ 188\times10^{-12}$	$F\cdot m^{-1}$
磁导率	$\mu_0=1.256\ 637\times10^{-6}$	$H\cdot m^{-1}$
平面波的波阻抗	$Z_0=376.730$	Ω

索　引

H

J

K

L

M

O

P

Q

R

S